

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Ασκήσεις στην Μαθηματική Ανάλυση II
(Φυλ. 2)

Ασκηση 1. Αν η συνάρτηση $f(u, v)$ είναι διαφορίσιμη, αποδείξτε ότι για τη συνάρτηση

$$F(x, y, z) = x^2 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

ισχύει

$$xF_x + yF_y + zF_z = 2F.$$

Ασκηση 2. Έστω

$$z = f(x + \varphi(y))$$

όπου οι f, φ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Ασκηση 3. Αν $w = f(x, y)$, όπου $x = u + v$ και $y = u - v$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Ασκηση 4. Υπολογίστε τις κατευθυνόμενες παραγώγους των συναρτήσεων:

- (i) $f(x, y) = x^y$ στο σημείο (e, e) , στη κατεύθυνση του διανύσματος $u = (5, 12)$.
- (ii) $f(x, y, z) = xyz$ στο σημείο $(1, 0, 1)$, στη κατεύθυνση του διανύσματος $u = (1, 0, -1)$.

Ασκηση 5. Ένα έντομο βρίσκεται μέσα σε τοξικό περιβάλλον. Ο βαθμός τοξικότητας, στο σημείο (x, y) , δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y) = 2x^2 - 4y^2.$$

Το έντομο βρίσκεται στο σημείο $(-1, 2)$. Σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί για να βρεθεί το συντομότερο σε περιοχή χαμηλότερης τοξικότητας;