<u>Επιπλέον Ασκήσεις</u>

<u>ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΝΤΗΣΕΩΝ</u>

Έστω ότι έχουμε n δοχεία αριθμημένα από το 1 ως n και n σφαίρες αριθμημένες από 1 ως n. Οι σφαίρες τοποθετούνται τυχαία στα δοχεία ανά μία. Εάν μία σφαίρα και το δοχείο της έχουν τον ίδιο αριθμό, λέμε ότι έχουμε μία συνάντηση.

α) Ποια η πιθανότητα το δοχείο k και η σφαίρα k να συναντηθούν;

β) Ποια η πιθανότητα l συγκεκριμένα δοχεία να συναντηθούν με τις αντίστοιχες σφαίρες;

γ) Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον $l(l = 0,1,2,...,n)$ συναντήσεων;

<u>Λύση</u>

Λήμμα 1: Αν $E_1, E_2, ..., E_\nu$ είναι ενδεχόμενα και $\mathrm{I} = \{1,2,...,\nu\}$ τότε $P(E_1 \bigcup E_2 \bigcup ... \bigcup E_\nu) = S_1 - S_2 + ... + (-1)^{\nu-1} S_\nu = \sum_{l=1}^{\nu} (-1)^{l-1} S_l$

όπου $S_l = \sum_{\substack{\Lambda \subset \mathrm{I} \\ |\Lambda| = l}} P(\bigcap_{h \in \Lambda} E_h$. (Δες βιβλίο σελ. 14)

Έστω τώρα $J = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1,2,...,n) = \mathrm{I}$, $J' = \mathrm{I} - J$ και $A_1, A_2, ..., A_n$ ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω. Τότε :

$$P[\bigcap_{i \in J} A_i - \bigcup_{j \in J'}((\bigcap_{i \in J} A_i) \cap A_j)] = P(\bigcap_{i \in J} A_i) - P[\bigcup_{j \in J'}((\bigcap_{i \in J} A_i) \cap A_j)] =$$

(κατά το Λήμμα 1 και $|J'| = n - k$)

$$= P(\bigcap_{i \in J} A_i) - \sum_{m=1}^{n-k} (-1)^{m-1} \sum_{\substack{\Lambda \subset J' \\ |\Lambda| = m}} P((\bigcap_{i \in J} A_i) \cap (\bigcap_{j \in \Lambda} A_j)) =$$

$$= P(\bigcap_{i \in J} A_i) - \sum_{m=1}^{n-k} (-1)^{m-1} \sum_{\substack{\Lambda \subset J' \\ |\Lambda| = m}} P(\bigcap_{i \in J \bigcup \Lambda} A_i) \stackrel{m=r-k}{=}$$

$$= P(\bigcap_{i \in J} A_i) - \sum_{r=k+1}^{n} (-1)^{r-k-1} \sum_{\substack{\Lambda \subset J' \\ |\Lambda| = r-k}} P(\bigcap_{i \in J \bigcup \Lambda} A_i) =$$

$$= P(\bigcap_{i \in J} A_i) + \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \sum_{\substack{\Lambda \subset J' \\ |\Lambda| = r-k}} P(\bigcap_{i \in J \bigcup \Lambda} A_i) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \sum_{\substack{\Lambda \subset J' \\ |\Lambda| = r-k}} P(\bigcap_{i \in J \bigcup \Lambda} A_i),$$

δηλαδή δείξαμε το:

Λήμμα 2: $P[\bigcap_{i \in J} A_i - \bigcup_{j \in J'}((\bigcap_{i \in J} A_i) \cap A_j)] = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \sum_{\substack{\Lambda \subset J' \\ |\Lambda| = r-k}} P(\bigcap_{i \in J \bigcup \Lambda} A_i)$

Έστω τώρα A_i το ενδεχόμενο : η i συνάντηση πραγματοποιείται.

Τότε το ενδεχόμενο : Οι (συγκεκριμένες) $i_1, ..., i_k$ συναντήσεις πραγματοποιούνται αποδίδεται από την τομή $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}$. Ώστε στο τυχόν υποσύνολο $J \subset \{1,2,...,n\} = \mathrm{I}$

αντιστοιχεί το ενδεχόμενο $\mathrm{B}_J = \bigcap_{i\in J} A_i$ και είναι το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν οι συναντήσεις που βρίσκονται στο J. Είναι φανερό ότι για συγκεκριμένο J ισχύει :

$$P(B_J) = \frac{(n-|J|)!}{n!} \qquad (1)$$

αφού οι ευνοϊκοί για την πραγματοποίηση του B_J τρόποι είναι όσες οι κατανομές των υπολοίπων $n-|J|$ σφαιρών (ανά μία) στα υπόλοιπα $n-|J|$ κελιά.

Ο τύπος (1) απαντά στα ερωτήματα α) και β). Ειδικότερα στο α) έχουμε $|J|=1$ και συνεπώς η πιθανότητα της συγκεκριμένης $i-$συνάντησης είναι $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

Σχετικά με το ερώτημα γ) πρώτα θα απαντήσουμε στο ερώτημα γ΄ του οποίου η διατύπωση έχει ως εξής :

Ποια η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν ακριβώς k συναντήσεις ; Να σημειώσουμε ότι το ερώτημα αφορά τις οποιεσδήποτε k συναντήσεις και όχι συγκεκριμένες.

Για τυχόν $J = \{i_1,...,i_k\} \subset \mathrm{I} = \{1,2,...,n\}$ συμβολίζουμε Γ_J το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν οι συναντήσεις $i_1, i_2, ..., i_k$ και μόνον αυτές.

Θέτω $J' = \mathrm{I} - J$ και προφανώς

$$\Gamma_J = (\bigcap_{i\in J} A_i) \cap (\bigcap_{j\in J'} A_j') = ((\bigcap_{i\in J} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J'} A_j)' = \bigcap_{i\in J} A_i - \bigcup_{j\in J'} A_j = \bigcap_{i\in J} A_i - (\bigcap_{i\in J} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J'} A_j) =$$

$$= \bigcap_{i\in J} A_i - \bigcup_{j\in J'} [(\bigcap_{i\in J} A_i) \cap A_j]$$

και κατά το Λήμμα 2

$$P(\Gamma_j) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \sum_{\substack{\Lambda\subset J' \\ |\Lambda|=r-k}} P(\bigcap_{i\in J\cap\Lambda} A_i) \qquad (2)$$

Το ενδεχόμενο Δ_k : να πραγματοποιηθούν ακριβώς k συναντήσεις είναι $\Delta_k = \bigcup_{\substack{J\subset \mathrm{I} \\ |J|=k}} \Gamma_J$

και η πιθανότητα του συνιστά το αντικείμενο του ερωτήματος γ) που έχει ως εξής :

γ΄) $P(\Delta_\kappa) = P(\bigcup_{\substack{J\subset \mathrm{I} \\ |J|=k}} \Gamma_j)$. Όμως τα ενδεχόμενα $\Gamma_J, J\subset \mathrm{I}$ με $|J|=k$ είναι ξένα μεταξύ τους και άρα $P(\Delta_k) = \sum_{J\subset \mathrm{I}} P(\Gamma_J)$. Χρησιμοποιώντας την (2) έχω

$$P(\Delta_k) = \sum_{\substack{J\subset I \\ |J|=k}} \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \sum_{\substack{\Lambda\subset J' \\ |J|=k}} P(\bigcap_{i\in J\cup\Lambda} A_i) \text{ και λόγω της (1)}$$

$$P(\Delta_k) = \sum_{\substack{J\subset I \\ |J|=k}} \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \sum_{\substack{\Lambda\subset J' \\ |J|=k}} \frac{(n-|J\cup\Lambda|)!}{n!}$$

Το εσωτερικό άθροισμα έχει $\binom{n-r}{r-k}$ προσθετέους (όσα τα υποσύνολα μεγέθους $r-k$ που έχει το μεγέθους $n-k$ σύνολο J') και ο κάθε προσθετέος είναι $\frac{(n-|J\cup\Lambda|)!}{n!}=\frac{(n-r)!}{n!}$ αφού $|J|=k$ και $|\Lambda|=k$ με $\Lambda\subset J'$.

Συνεπώς το εξωτερικό άθροισμα εκτείνεται σε $\binom{n}{k}$ προσθετέους ίσους μεταξύ τους και συνεπώς :

$$P(\Delta_k)=\binom{n}{k}\sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\binom{n-r}{r-k}\frac{(n-r)!}{n!}$$

και εύκολα πλέον

$$P(\Delta_k)=\sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\binom{n}{k}\binom{n-r}{r-k}\frac{(n-r)!}{n!}=\sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}\frac{(n-r)!}{n!}=$$

$$=\sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\frac{1}{k!(r-k)!}=\frac{1}{k!}\sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\frac{1}{(r-k)!}$$

και εκτελώντας το μετασχηματισμό $r-k=h$

$$P(\Delta_k)=\frac{1}{k!}\sum_{h=0}^{n-k}(-1)^h\frac{1}{h!},\ k=1,2,...,n. \qquad (3)$$

γ) Στο ερώτημα ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου E_l: τουλάχιστον $l-$ συναντήσεις πραγματοποιούνται .

Για $l=0$ η απάντηση είναι προφανώς :πιθανότητα 1.

Έτσι εξετάζουμε το ζήτημα για $l=1,2,...,n$

Προφανώς $E_l=\bigcup_{k=l}^{n}\Delta_k$ και τα ενδεχόμενα Δ_κ του ερωτήματος γ) είναι ξένα μεταξύ τους. Έτσι $P(E_l)=\sum_{k=l}^{n}P(\Delta_k)$ και χρησιμοποιώντας την (3)

$$P(E_l)=\sum_{k=l}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{h=0}^{n-k}(-1)^h\frac{1}{h!}$$

Παρατηρήσεις:

α) Στον τύπο (3) και όταν το $n-k$ είναι αρκετά μεγάλο προσεγγιστικά είναι:

$$P(\Delta_k)=\frac{1}{k!}e^{-1}$$

β)Ο τύπος (2) για $|J|=n$ οπότε $J=\mathrm{I}=\{1,2,...,n\}$ συνεπάγεται $P(B_J)=\frac{1}{n!}$. Το ίδιο αποφέρει και ο τύπος (3) όταν $k=n$, πράγμα αναμενόμενο αφού οι οποιεσδήποτε $n-$ συναντήσεις είναι υποχρεωτικά οι $1,2,...,n$

<u>ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΨΙΘΥΡΩΝ</u>

Σε μία πόλη $\nu+1$ κατοίκων ένα άτομο μεταφέρει μία «είδηση» σε ένα δεύτερο άτομο το οποίο μεταφέρει την «είδηση» σε ένα τρίτο κ.ο.κ. Ο εκάστοτε ψιθυριστής εκλέγει τυχαία ένα εκ των υπολοίπων $\nu-1$ κατοίκων (εξαιρείται αυτός από τον οποίο έμαθε την «είδηση») για να την μεταδώσει. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ώστε η «είδηση» να μεταδοθεί κ-φορες

α) χωρίς να επιστρέψει στον πρώτο ψιθυριστή

β) χωρίς να επαναληφθεί σε οποιοδήποτε άτομο ($\kappa<\nu+1$)

<u>Λύση:</u>

Έστω ότι οι κάτοικοι ονομάζονται $1,2,3,...,\nu+1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο πρώτος ψιθυριστής είναι ο 1. Μία διαδρομή κ-διαδόσεων μπορεί να παρασταθεί ως (βλέπε και διάγραμμα στο τέλος)

$$x_1x_2...x_k$$

'οπου x_i είναι ο αποδέκτης της i-διάδοσης ($i=1,2,...,k$) και βέβαια ο αναμεταδότης της στον x_{i+1} ($i=1,2,...,k-1$). Η θέση x_i μπορεί να συμπληρωθεί με ν-τρόπους και κάθε μία από τις θέσεις $x_2,x_3,...,x_k$ μπορεί να συμπληρωθεί με $\nu-1$ τρόπους αφού κανείς δεν μεταδίδει την είδηση στον εαυτό του και σε αυτόν που του την μετέδωσε.

Συνεπώς $\mathrm{N}(\Omega)=\nu(\nu-1)^{\kappa-1}$.

α) Έστω Α το ενδεχόμενο ώστε η «είδηση» να μην επιστρέψει στον 1. Το ενδεχόμενο Α συνίσταται από τις παραστάσεις $x_1,x_2,...,x_k$ για τις οποίες $x_i\neq 1$ για κάθε $i=3,4,...,k$ (ούτως η άλλως $x_1\neq 1$ και $x_2\neq 1$). Συνεπώς η θέση x_1 μπορεί να συμπληρωθεί κατά ν-τρόπους, η θέση x_2 κατά ν-1 τρόπους και κάθε μία από τις $x_3,x_4,...,x_k$ κατά ν-2 τρόπους .

Συνεπώς $\mathrm{N}(\mathrm{A})=\nu(\nu-1)(\nu-2)^{\kappa-2}$ και τελικά

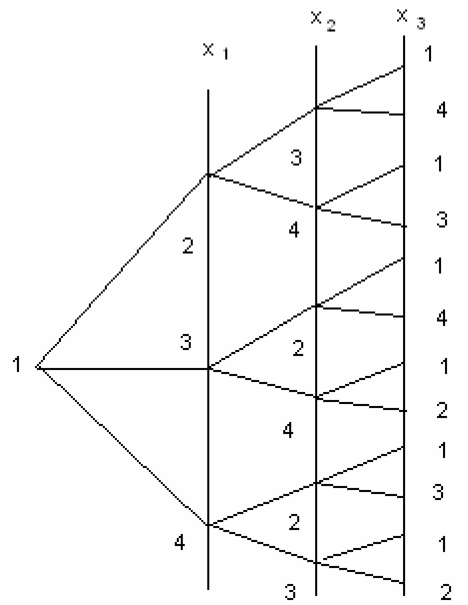
$$P(\mathrm{A})=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)^{\kappa-2}}{\nu(\nu-1)^{\kappa-1}}=(\frac{\nu-2}{\nu-1})^{\kappa-2}$$

β) Αν Β είναι το ενδεχόμενο του ερωτήματος τότε είναι φανετρό ότι το Β αποτελείται από τις παραστάσεις $x_1x_2...x_k$ στις οποίες κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με κατα ένα λιγότερους τρόπους από την προηγούμενη αφού τα x_i πρέπει ολα να είναι διαφορετικά μεταξύ τους

Συνεπώς $\mathrm{N}(\mathrm{B})=\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)...(\nu-\kappa+1)$

Άρα $\quad P(\mathrm{B}) = \dfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)}{\nu(\nu-1)^{\kappa-1}} = \dfrac{(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)}{(\nu-1)^{\kappa-2}}$

<u>Παρατήρηση :</u> 4 άτομα (ν = 4) και κ = 3 μεταδόσεις



<u>ΤΟ ΔΙΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΤΗΛΕΟΠΤΙΚΟΥ ΠΑΙΚΤΗ</u>

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι έχει ως εξής : Ποσό 1000 ευρώ είναι μέσα σε ένα από τρία όμοια κουτιά Α , Β , Γ με ίση πιθανότητα. Ο παίκτης που συμμετέχει δηλώνει ένα κουτί της προτίμησής του (π.χ. το Α) και το κουτί αυτό παραμένει κλειστό. Κατόπιν ο παρουσιαστής του παιχνιδιού που γνωρίζει σε πιο κουτί βρίσκεται το ποσό, ανοίγει ένα από τα δυο άλλα κουτιά (Β ή Γ) που δεν περιέχει το ποσόν και δείχνει στον παίκτη το άδειο κουτί. Ύστερα από αυτό ο παίκτης έχει το δικαίωμα να αλλάξει προτίμηση από το κουτί που δήλωσε αρχικά σε αυτό που παραμένει κλειστό και να κερδίσει ό,τι ποσόν υπάρχει στο κουτί της τελικής προτίμησής του. Συμφέρει να αλλάξει προτίμηση ;
<u>Σημείωση :</u> Όταν το ποσό βρίσκεται στο κουτί που δηλώθηκε στην αρχή (π.χ. το Α) τότε ο παρουσιαστής (που το ξέρει) ανοίγει ένα από τα άλλα δυο κουτιά με την ίδια πιθανότητα

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Α : το ποσό βρίσκεται στο κουτί Α
Β : το ποσό βρίσκεται στο κουτί Β
Γ : το ποσό βρίσκεται στο κουτί Γ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο παίκτης δηλώνει αρχικά το Α. Προφανώς $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) = P(\Gamma) = \frac{1}{3}$ και υπάρχουν τρεις δυνατότητες για τα Β , Γ $\mathrm{E}_1 = \mathrm{B}^c \bigcap \Gamma^c, \mathrm{E}_2 = \mathrm{B}^c \bigcap \Gamma, \mathrm{E}_3 = \mathrm{B} \bigcap \Gamma^c$ με $\mathrm{E}_1 \bigcup \mathrm{E}_2 \bigcup \mathrm{E}_3 = \Omega$ και τα $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3$ είναι ξένα μεταξύ τους έτσι για τα ενδεχόμενα

β : ανοίγει το κουτί Β

γ : ανοίγει το κουτί Γ

ισχύει σύμφωνα με το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(\beta) = P(\beta / \mathrm{B}^c \bigcap \Gamma^c) P(\mathrm{B}^c \bigcap \Gamma^c) + P(\beta / \mathrm{B}^c \bigcap \Gamma) P(\mathrm{B}^c \bigcap \Gamma) + P(\beta / \mathrm{B} \bigcap \Gamma^c) P(\mathrm{B} \bigcap \Gamma^c) =$$

$$= \frac{1}{2} P(\mathrm{B}^c \bigcap \Gamma^c) + 1 P(\mathrm{B}^c \bigcap \Gamma) + 0 P(\mathrm{B} \bigcap \Gamma^c) = \frac{1}{2} P(\mathrm{A}) + 1 P(\Gamma) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Ώστε $P(\beta) = \frac{1}{2}$

και όμοια

$P(\gamma) = \frac{1}{2}$

Λαμβάνοντας τώρα υπ’ όψη το προφανές $\mathrm{A} = \mathrm{B}^c \bigcap \Gamma^c$ έχουμε:

$$P(\mathrm{A} / \beta) = \frac{P(\mathrm{A} \bigcap \beta)}{P(\beta)} = \frac{P(\beta / \mathrm{A}) P(\mathrm{A})}{P(\beta)} = \frac{\frac{1}{2} P(\mathrm{A})}{\frac{1}{2}} = P(\mathrm{A})$$

Ώστε $P(\mathrm{A} / \beta) = P(\mathrm{A})$ (4) (4)

και όμοια

$P(\mathrm{A} / \gamma) = P(\mathrm{A})$ (5)

Από τις (4), (5) προκύπτει ότι η πιθανότητα να είναι τα χρήματα στο Α δεν αλλάζει από το γεγονός ότι ένα από τα δύο άλλα κουτιά είναι άδειο.

Όμως

$$P(\mathrm{B} / \gamma) = \frac{P(\mathrm{B} \bigcap \gamma)}{P(\gamma)} = \frac{P(\gamma / \mathrm{B}) P(\mathrm{B})}{P(\gamma)} = \frac{1 \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

και όμοια

$P(\Gamma / \gamma) = \frac{2}{3}$

Δηλαδή η πιθανότητα ώστε τα χρήματα να βρίσκονται στο Β (αντίστοιχα στο Γ) έχοντας ανοίξει το γ (αντίστοιχα το β) είναι $\frac{2}{3}$. Συνεπώς συμφέρει να αλλάξουμε προτίμηση.

<u>ΤΟ ΔΙΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΦΥΛΑΚΙΣΜΕΝΟΥ</u>

Φυλακισμένος, που έχει υποβάλλει μαζί με άλλους δύο συγκρατούμενούς του αίτηση απονομής χάριτος, πληροφορείται από φίλο του φρουρό ότι δύο από τους τρεις πρόκειται να αποφυλακιστούν. Επειδή ο φρουρός δεν θέλει να πει στον φυλακισμένο αν αυτός είναι μεταξύ των δύο που αποφυλακίζονται, ο φυλακισμένος σκέφτεται να ρωτήσει το φρουρό ποιος από τους δύο άλλους πρόκειται ν’ αποφυλακιστεί αφού έτσι κι αλλιώς είναι γνωστό ότι αυτό θα γίνει για τον ένα από τους δύο. Όμως αμέσως διστάζει και αλλάζει γνώμη γιατί σκέφτεται ότι με την απάντηση του φρουρού μειώνονται οι ελπίδες αποφυλάκισής του από 2/3 σε ½. Είναι σωστός ο συλλογισμός του;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ας είναι Α, Β, Γ οι τρεις φυλακισμένοι και Α αυτός που έχει το δίλημμα. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: απελευθερώνεται ο Α

Β: απελευθερώνεται ο Β

Γ: απελευθερώνεται ο Γ

Για τα ενδεχόμενα $E_1 = A \cap B \cap \Gamma'$, $E_2 = A \cap B' \cap \Gamma$, $E_3 = A' \cap B \cap \Gamma$, έχουμε προφανώς ότι $P(E_i) = \frac{1}{3}$ (i =1,2,3) και ισχύει ο τύπος ολικής πιθανότητας:

$$P(A) = P(A \mid E_1)\,P(E_1) + P(A \mid E_2)\,P(E_2) + P(A \mid E_3)\,P(E_3)$$
$$= 1\,P(E_1) + 1\,P(E_2) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Ώστε

$$P(A) = \frac{2}{3}.$$

Θεωρούμε τώρα τα ενδεχόμενα:

β: ο φρουρός απαντά Β

γ: ο φρουρός απαντά Γ

Τότε

$$P(\beta) = P(\beta \mid E_1)\,P(E_1) + P(\beta \mid E_2)\,P(E_2) + P(\beta \mid E_3)\,P(E_3)$$

Επειδή ο φρουρός δεν θέλει να πει στον φυλακισμένο αν είναι ένας από τους δύο που αποφυλακίζονται θα έχουμε $P(\beta \mid E_1) = 1$. Επίσης $P(\beta \mid E_2) = 0$ και $P(\beta \mid E_3) = ½$.

Συνεπώς

$$P(\beta) = 1\frac{1}{3}+0\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Άρα

$$P(A \mid \beta) = \frac{P(A\cap\beta)}{P(\beta)}=\frac{P(E_1)}{P(\beta)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}.$$

Όμοια

$$P(A \mid \gamma) = \frac{2}{3}.$$

Άρα ο συλλογισμός του δεν είναι σωστός.