

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ MARTINGALES

Άσκηση:

Έστω $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με $X_n > 0$ P-σ.β. και $E(X_n)=1 \forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $Z_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n, n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι F_n -martingale με $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Λύση

Επειδή $X_i, i=1, \dots, n$ ανεξάρτητες με $E(X_i) < \infty$ συμπεραίνουμε ότι $E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$. Είναι ακόμα προφανές ότι η τ.μ. Z_n είναι F_n -μετρήσιμη. Τώρα $E(Z_{n+1} / F_n) = E(Z_n \cdot X_{n+1} / F_n) = Z_n E(X_{n+1} / F_n) = Z_n E(X_{n+1})$. Λόγω της ανεξαρτησίας της X_{n+1} από την F_n . Όμως $E(X_{n+1})=1$ και συνεπώς $E(Z_{n+1} / F_n) = Z_n$ P-σ.β.

Άσκηση:

Έστω ακολουθία τ.μ. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, ανεξάρτητων με $E(X_i)=0$ και $V(X_i)=\sigma^2$ για κάθε $i=1, 2, \dots$. Δείξτε ότι η ακολουθία $Y_n = (\sum_{k=1}^n X_k)^2 - n\sigma^2, n \in \mathbb{N}$ είναι F_n -martingale με $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Λύση

Εύκολα διαπιστώνεται ότι $E(|Y_n|) < \infty$ και Y_n είναι F_n -μετρήσιμη. Επίσης έχουμε διαδοχικά και ανακαλώντας τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής :

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} / F_n) &= E((\sum_{k=1}^n X_k + X_{n+1})^2 / F_n) - (n+1)\sigma^2 = \\ &= E((\sum_{k=1}^n X_k)^2 / F_n) + E(X_{n+1}^2 / F_n) + E(2X_{n+1} \sum_{k=1}^n X_k / F_n) - (n+1)\sigma^2 = \\ &= (\sum_{k=1}^n X_k)^2 + E X_{n+1}^2 + (\sum_{k=1}^n X_k) \cdot E(X_{n+1} / F_n) - (n+1)\sigma^2 = \\ &= (\sum_{k=1}^n X_k)^2 - n\sigma^2 + E X_{n+1}^2 - \sigma^2 + (\sum_{k=1}^n X_k) E(X_{n+1}) = \\ &= Y_n + V(X_{n+1}) + E^2(X_{n+1}) - \sigma^2 + (\sum_{k=1}^n X_k) E(X_{n+1}) \end{aligned}$$

και επειδή $V(X_{n+1}) = \sigma^2$ και $E(X_{n+1}) = 0$ έχουμε $E(Y_{n+1} / F_n) = Y_n$ P-σ.β.