

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Ασκήσεις στην Μαθηματική Ανάλυση II
(Φυλ. 1)

Ασκηση 1. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} .$$

Ασκηση 2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} .$$

Ασκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} .$$

Δείξτε ότι κατά μήκος κάθε ευθείας $y = \lambda x$, το $f(x, y)$ προσεγγίζει το 0, καθώς $(x, y) \rightarrow 0$. Υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) ;$$

Ασκηση 4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad xy \neq 0 \\ 1 & , \quad xy = 0 \end{cases}$$

Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$; Είναι η f συνεχής στο σημείο αυτό; Τι συμπέρασμα βγάζετε;

Ασκηση 5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \text{ και } g(x, y) = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} .$$

Να δείξετε ότι $f_y(x, y) = g_x(x, y)$.