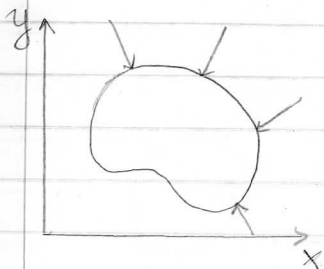


9/3/2009

Ισοστατικά φορείς

Μόνο εγχειώσεις λοoppότητας αρκούν για τον υπολογισμό της έντασης των.

Εγχειώσεις λοoppότητας



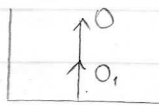
$$\sum F_x, \sum F_y = 0$$

$$\sum M(O) = 0$$

λοoppότητα $\Rightarrow$ συνιστώσα δύναμης
συνιστώσα ροπής ως προς τυχαίο

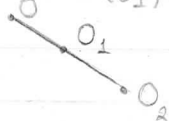
$$\sum F_x = 0, \sum M_O = 0, \sum M_{O_1} = 0$$

Εξαιρέση: $OO_1 \nparallel x$

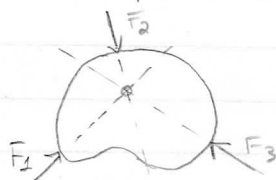


$$\sum M(O) = 0, \sum M(O_1) = 0, \sum M(O_2) = 0$$

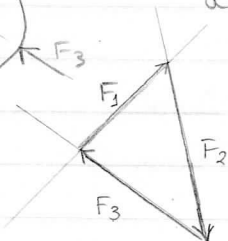
Εξαιρέση



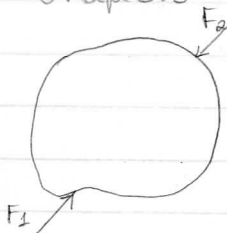
3 Δυνάμεις



$\rightarrow$ πρέπει να διερχονται
από το ίδιο σημείο



2 Δυνάμεις



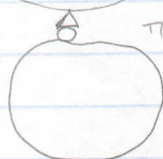
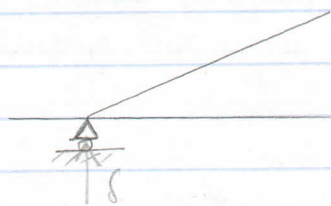
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Δράση - Αντίδραση

Ένα σώμα I που έρχεται σε επαφή με σώμα II ασκεί δύναμη $\vec{R}_{I-II}$, τότε το σώμα II ασκεί στο σώμα I δύναμη $\vec{R}_{II-I} = -\vec{R}_{I-II}$ (αντίθετη της $\vec{R}_{I-II}$)

Στήριξη φορέων

1) Απλή έδραση (κύλιση) (π.χ. στις γέφυρες)

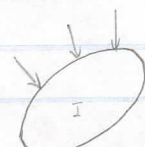


π.χ. σε μεταλλικές
κατασκευές

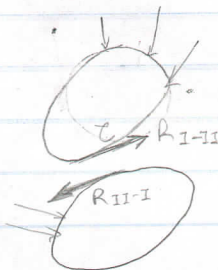
Μετακίνηση μόνο $\perp$ εν
στη διεύθυνση
Στροφή ελεύθερη
Δύναμη συγκεντρωμένης διεύθυνσης
όχι ροπή

13/3/2009

2) Αρθρωση



Μετακινήσεις 0 $\rightarrow$ Δύναμη τυχαίας διεύθυνσης
Στροφή ελεύθερη $\rightarrow$ Ροπή 0

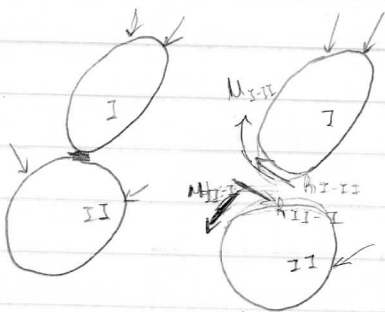


3) Πάκωση



$\rightarrow$ μετατόπισης 0 $\rightarrow$ δύναμη τυχαίας διεύθ.

$\rightarrow$ στροφή 0 $\rightarrow$ Ροπή $\neq 0$



4) Ελαστική στήριξη



$\rightarrow$ δύναμη κατά τη δ-δ
μετατόπιση // προς δ-δ

—//— κατά δ-δ

στρόφη ελεύθερη $\rightarrow$ Ροπή μηδέν

5) Ελαστική πάκωση



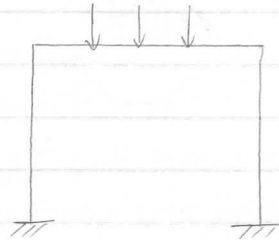
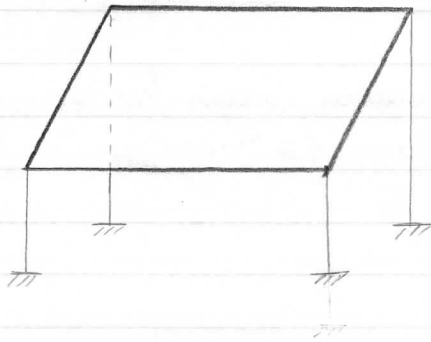
$\kappa\phi$ (συνθ. ακαμψία ελασπριου)

μετατοπίσεις 0 $\rightarrow$ δύναμη τυχαίας διεύθ.

στροφή ελεγχόμενη $\rightarrow$ αιώτηζη ροτής

(αντιθέτως
στη στήριξη,
είναι μικρότερη
από τη ροπή
και ταυομένης
πάκωσης)

Ραβδαίοι Φορείς



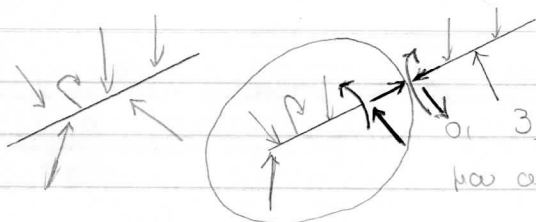
Ραβδαίοι φορείς:
φορείς των οποίων
η μια διάσταση (επιμήκης)
>> (πολύ μεγαλύτερη) από τις άλλες δύο

Ισοστατικός Σχηματισμός

= Ο σχηματισμός του οποίου η ένταση βρίσκεται από μόνες τις εξισώσεις ισορροπίας όταν αυτός υπόκειται σε ένα αυτοισορροπώμενο σύνολο Συνάψεων.

Ο απλούστερος ισοστατικός σχηματισμός είναι μια ράβδος.

Απλή ράβδος



οι 3 εξισώσεις ισορροπίας

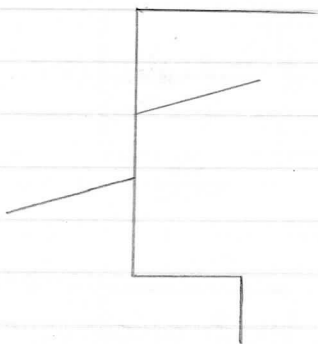
και αρκούν για να υπολογιστεί το "κρίσι" μέγεθος

ένταση = αν χωρίσω τη ράβδο σε δύο κομμάτια

ποιες είναι οι δυνάμεις που ασκεί

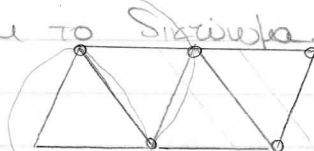
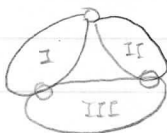
το ένα κομμάτι στο άλλο.

Ο απλώς συνθετός ισοστατικός σχηματισμός είναι ένα σύστημα ράβδων πακτωμένων (Ανοιχτό)



Συνθετός: 3 ισοστατικοί σχηματισμοί που συνδέονται μεταξύ τους με αρθρώσεις. (όχι επί ευθείας)

ο απλούστερος τέτοιος σχηματισμός είναι το Σταύρωμα



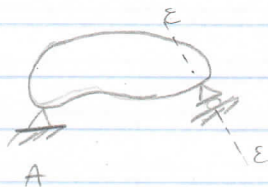
Ένα σύστημα κλειστό πακτωμένων ράβδων δεν είναι ισοστατικός σχηματισμός



Ισοστατικός τρόπος σύνδεσης

Όταν οι ανυδροσύνδεσμοι ενός σχηματισμού μπορούν να προσδιοριστούν από τις εξισώσεις ισοστατικής, τότε η σύνδεση αυτή λέγεται ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΗ

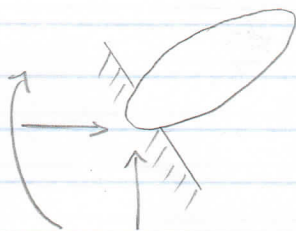
α) Αμφιέρυση σύνδεση



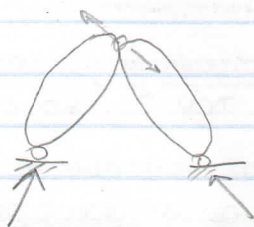
$A \notin E-E$

3 εξισώσεις
3 ανυδροσύνδεσμοι

β) Πάκωση



γ) Τριάρθρωτη σύνδεση = 2 σχηματισμοί με 3 αρθρώσεις (5 με το έδαφος)



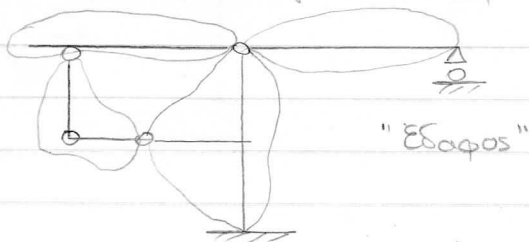
3x2 εξισ. ισοσ.
6 άγνωστες δυνάμεις

Μηχανισμός = φέρει το κάτω από την επίδραση των
φορτίων κάνει το σχηματισμό του.

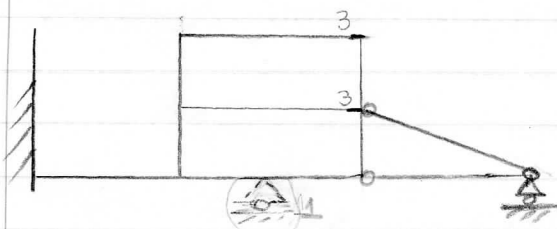
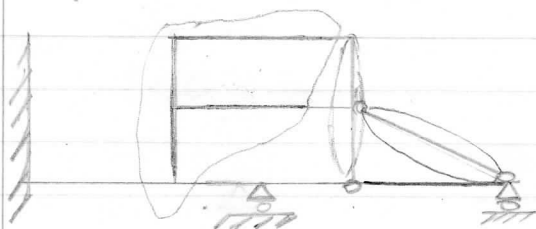
σχηματισμός
μηχανισμός

Εξέταση Υπερστατικής (ολικής)

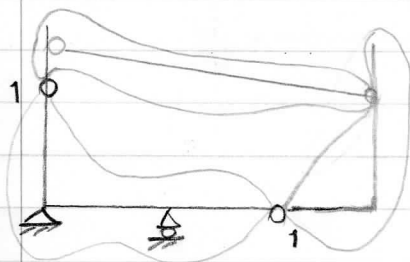
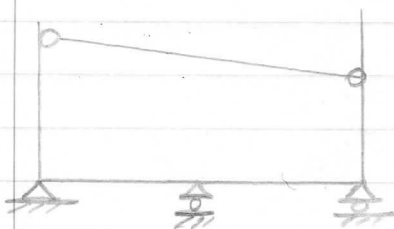
Δημιουργήστε ισοστατικές σχηματισμούς & ισοστατικές σημείξεις.
 Αν ο προκύπτων φορέας είναι ίδιος με τον αρχικό $\rightarrow$ ισοστατικός.
 Διαφορετικά ο αριθμός των απελευθερώσεων είναι ίσος με
 το βαθμό υπερστατικότητας.

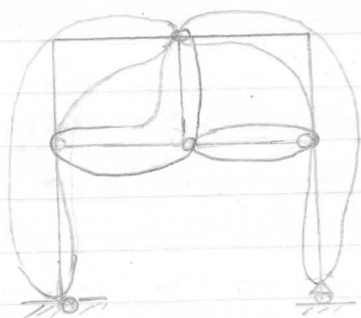


16/3/2009

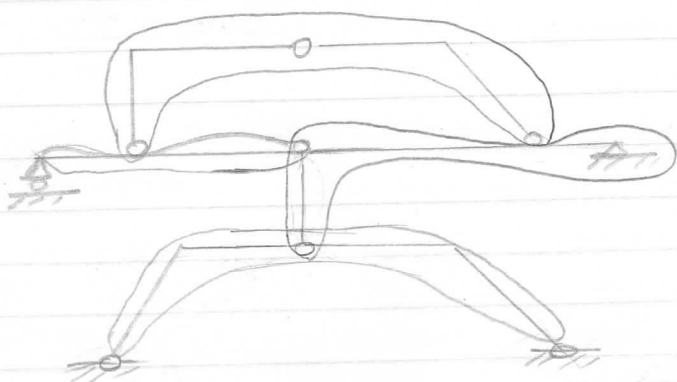


⊕ φορές υπερστατικός





15052021405



15052021405

Στατική Λειτουργία

Γενικές περιπτώσεις φρέων

Πλάγια

$$d = r + 3b - 3n - R_{\text{εξ}}$$

r : αριθμός αντιδράσεων

b : αριθμός μελών

n : αριθμός κόμβων

d : βαθμός υπερστατικότητας

$R_{\text{εξ}}$: εσωτ. απελευθερώσεις

Δικτυώματα

$$d = r + b - 2n$$

$$d \geq 0$$

$$d < 0$$

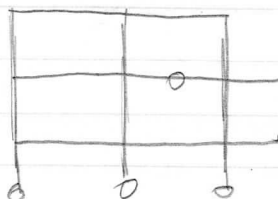
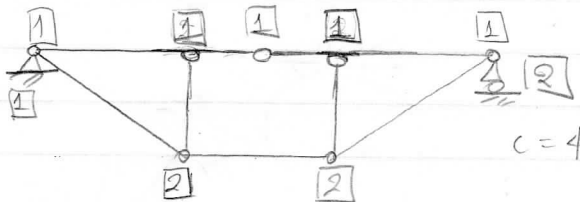
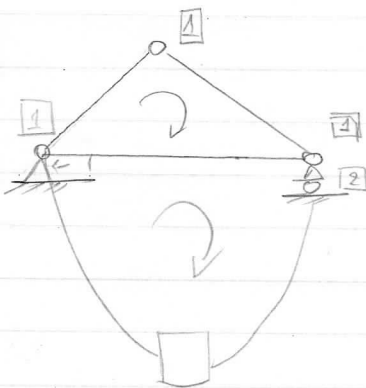
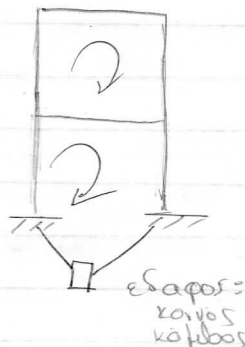
Βαθμός υπερστατικότητας

$$d = 3 \cdot c - R_{\text{ολ}}$$

c : ανεξ. τοπ. κύκλοι

$R_{\text{ολ}}$: αριθμός απελευθερώσεων φρέα

$R \rightarrow k - 1$ απελ



$$R_{\text{ολ}} = 4$$

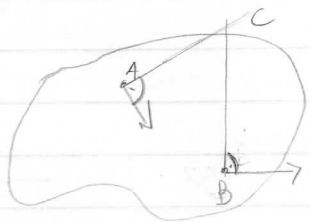
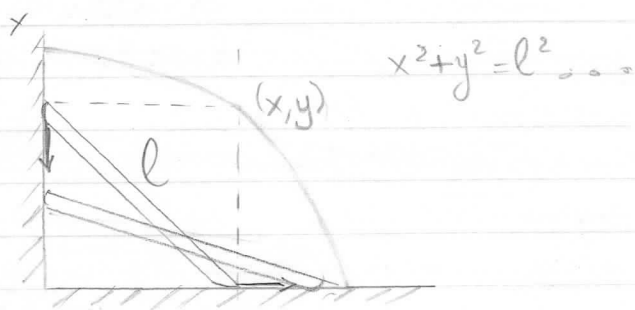
$$c = 7$$

$$d = 3 \cdot 7 - 4 = 21 - 4 = 17$$

Γεωμετρική ερώτηση

Η γενική κίνηση επιπέδου σχηματού είναι παράλληλη μεταφορά και στροφή.

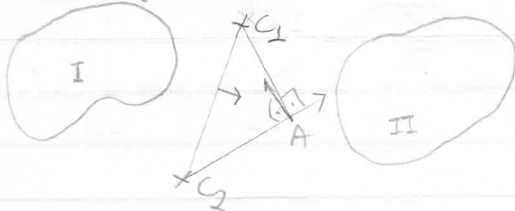
Και τα δύο αυτά αποδίδονται από περιστροφή περί ένα σημείο που καλείται πόλος περιστροφής. Όλα τα σημεία του σχηματού κινούνται καθέτα στην ενθαύκη ακτίνα που συνδέει τον πόλο περιστροφής με το θεωρούμενο σημείο.



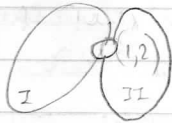
Σχετικός πόλος περιστροφής

Είναι ένα σημείο το οποίο συνδέεται ομοιά με δύο σχηματούς και έχει κοινό διάνυσμα μετατόπισης. Για να υπάρχει τέτοιο σημείο θα πρέπει να ανήκει στην ευθεία που συνδέει τους (απόλυτους) πόλους περιστροφής των 2 σχηματούς.

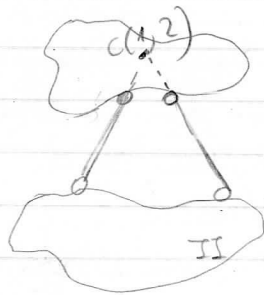
Απόδειξη



- 1) Αν δύο στερεοί σχηματισμοί συνδεθούν με άρθρωση
 $\rightarrow$ η άρθρωση αυτή είναι σχετικός πόλος περιστροφής τους.



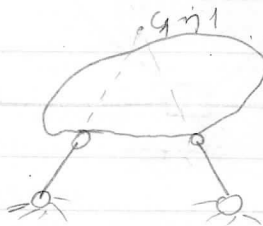
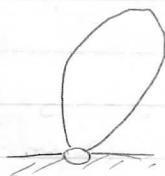
- 2) Δύο στερεοί σχηματισμοί που συνδέονται με δύο δομικές
 $\rightarrow$ συγγραμμικός πόλος περιστροφής το οποίο εκτελείται των δύο
 αυτών ράβδων.



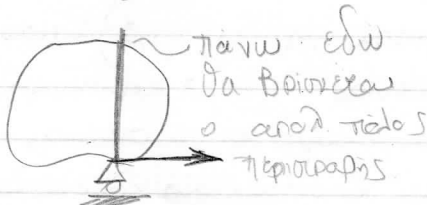
Στερεός σχηματισμός - Έδαφος

Ο σχετικός
 πόλος περιστροφής
 με το έδαφος
 είναι ο απόλυτος
 πόλος
 περιστροφής

Ο σχετικός πόλος περιστροφής συμπίπτει με τον απόλυτο και
 είναι πάνω στο έδαφος.



3)



πάνω εδώ
 θα βρούμε
 ο απόλ. πόλος
 περιστροφής

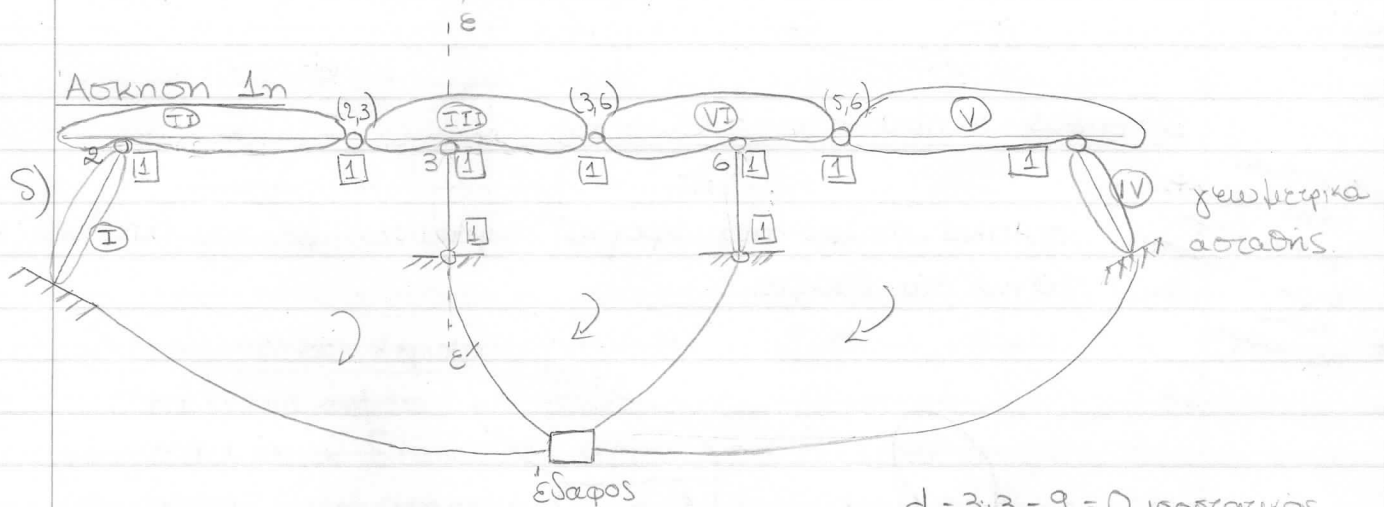
Θεώρημα

Γεωμετρικά αστάθης ή μηχανισμός ή γεωμετρικά ασταθής σχηματισμός είναι όταν τρεις σχετικοί πόλοι περιστροφής τριών επιμέρους σχηματισμών βρίσκονται επί ευθείας.

20/3/2003

Εξέταση κινηματικής αστάθειας - γεωμετρικής αστάθειας (ή κινηματική αλυσίδα)

Υποθέτουμε ότι ο "φορέας" μας είναι κινηματικά αστάθης και εφαρμόζουμε ανά τρεις σχηματισμούς το Θεώρημα. Εάν φθάσουμε στους τελευταίους τρεις και συνεχίσει να ισχύει και γ' αυτούς το Θεώρημα $\Rightarrow$ ΑΣΤΑΘΕΙΑ, Διαφορετικά ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

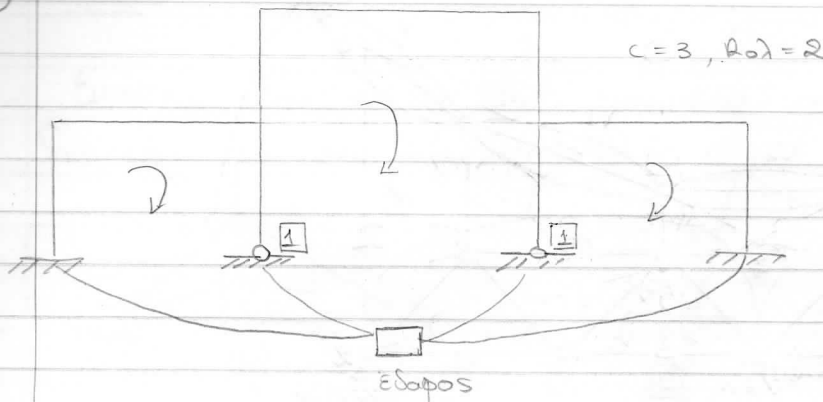


σχηματισμοί: μόνο ράβδοι

Οι II, III έχουν σχετικό πόλο περιστροφής το (2,3). Πάνω στη διεύθυνση 2, (2,3) θα βρούμε ο σχετικός πόλος περιστροφής του III ως προς το έδαφος. Παράλληλα ξέρουμε ότι ο σχετικός πόλος περιστροφής του III ως προς το έδαφος βρίσκεται στη διεύθυνση εε'. Άρα ο απόλυτος πόλος περιστροφής του III είναι το B.

3, (3,6), 6 βρίσκονται επί ευθείας $\Rightarrow$ σωστή αρχική υπόθεση $\Rightarrow$ αστάθης γεωμετρικά

α)



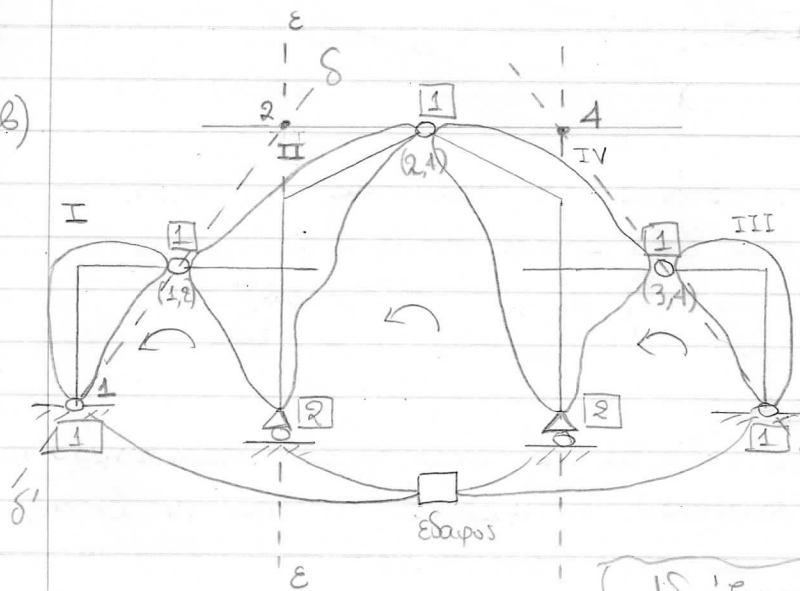
υπεροστικότητα:

$$d = 3 \cdot 3 - 2 = 7 \text{ φορές υπερ}$$

γωνιακή ευστάθεια:

γωνιακά ευσταθής

β)



$$c = 3, R_0\lambda = 9$$

υπεροστικότητα:

$$d = 3 \cdot 3 - 9 = 0 \Rightarrow \text{ισοστατικός}$$

γωνιακή

γωνιακή ευστάθεια:

Αρχική υπόθεση: να ληφθούν

2, (2,4), 1 επ' ευθείας $\Rightarrow$ ασταθής

Ιδιαίτερα περίπτωση:

Αν αλλάξουν οι διαστάσεις, αλλάξουν οι

θέσεις 2, (2,4), 4 σχηματίζοντας τριγων

ευσταθής.

Ο τύπος περιστροφής του II

είναι το σημείο τομής της ε'

και της δδ' ευθείας που ενώνει

τον απόλυτο π.π. του I με

τον σχετικό π.π. του I με το II)

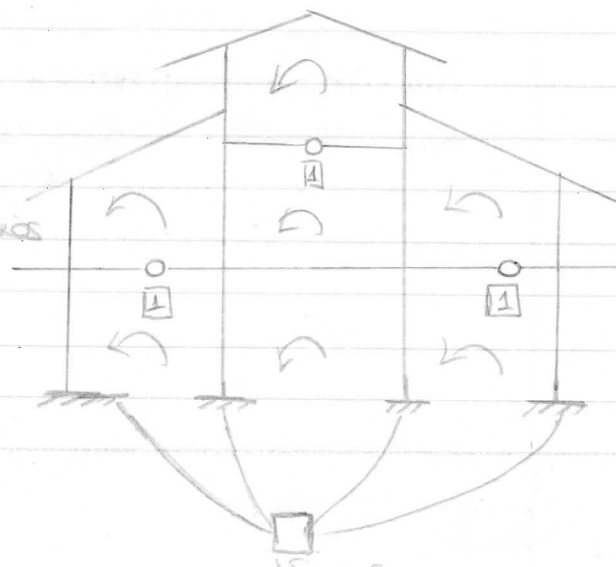
γ)

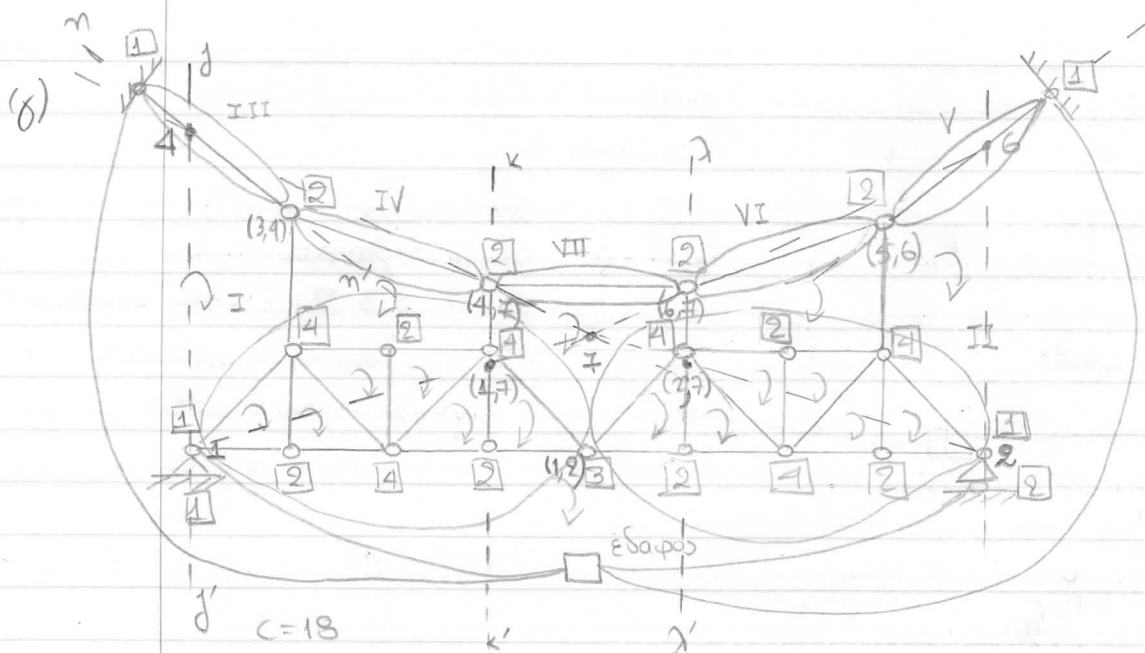
υπεροστικότητα

$$d = 3 \cdot 7 - 3 = 21 - 3 = 18$$

φορές υπερστατικός

γωνιακά ευσταθής





υπεροστατικότητα : $d = 3 \cdot 18 - 54 = 0$ ισοστατικός

(άλλος τρόπος : παντού έξω από το σύστημα ανώτερους από
για αρθρώσεις πλαισίου)

γεωμετρική ευστάθεια :

Ο σχετικός π.π. των I με το IV είναι το εστ' άτερο σημείο.
Πάνω στην γγ' θα βρίσκεται ο απόλυτος π.π. των IV. Επίσης
πρέπει να βρίσκεται και πάνω στην ηή

Ο απόλυτος π.π. των VII είναι το σημείο κομής των
4,(4,7) με την 6,(6,7)

Ο (1,7) θα βρίσκεται στην 1,7 και στην κκ'

Ο (2,7) θα βρίσκεται στην 2,7 και στην λλ'

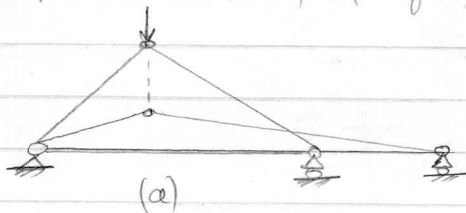
Οι 3 σχετικοί π.π. (1,7), (2,7) και 7 δεν κείται επί' εφ' αλλήλων
 $\Rightarrow$ αρχική υπόθεση λάθος $\Rightarrow$ ευστάθης

Δεν αλλάζει η γεωμετρική ευστάθεια αν αντί για αρθρώσεις
έχω πλαισίου (άλλος τρόπος).

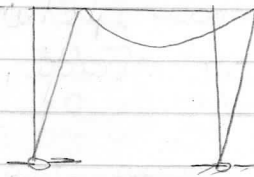
23/3/2009

Φορτία πάνω σε ευσταθείς κατασκευές

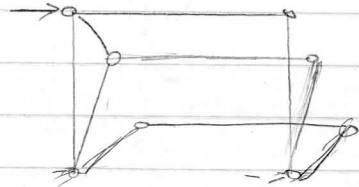
Ευσταθής είναι η κατασκευή που κάτω από την επιβολή φόρτισης διατηρεί την αρχική της γεωμετρία.



(α)



(β)



Δύο βασικές ιδιότητες έχουν οι ευσταθείς κατασκευές ως προς την παραμορφωσιμότητα τους :

Στις ευσταθείς κατασκευές μετά την επιβολή της φόρτισης θα έχουμε αλλαγή είτε στο μέγεθος (περίπτωση (α)) είτε αλλαγή στο μέγεθος και το σχήμα (περίπτωση (β))

Όταν το μέγεθος (ή το σχήμα) αλλάξει ελάχιστα έχουμε τη στατική των μικρών μεταμορφώσεων - μικρών παραμορφώσεων (στατική 1ης τάξης)

Μεγάλες μεταμορφώσεις - μεγάλες παραμορφώσεις
(Σχήμα αλλάζει - μέγεθος ελάχιστα) Στατική 2ης τάξης

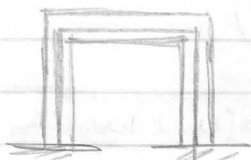
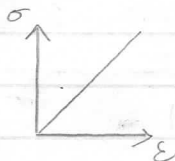


Αφού η αξονική δύναμη

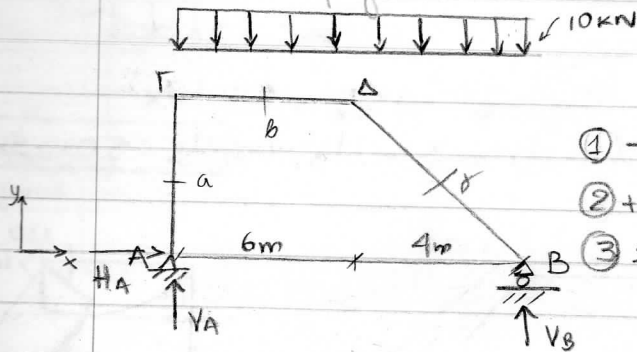
← Περνάει κάποιο όριο
- Λυγισμός

Παραδοχές θεωρίας μικρών μεταμορφώσεων παραμόρφωσης για ραβδωτούς φορείς (Στατική I, II, III, IV)

- 1) Διάσταση μίκας μέλων $\Rightarrow$ από διαστάσεις διατομής.
- 2) Μπορούμε να εξετάσουμε την ισορροπία στην αταραβήρωση κατάσταση
- 3) Γραφικά ^{των επιβλ. και διατ.} ελαστικό υλικό ^{και την παραμόρφωσ. κατάσταση} ^{το υλικό θα ανατ. στη συν. κατάσταση}
- 4) Συνδυάζοντας (2) & (3) καθόλου σε αρχή της επαλληλίας, δηλαδή η ελαστική και παραμορφωτική κατάσταση μιας κατασκευής λόγω πολλών φορτίσεων είναι το άθροισμα των ελαστικών και παραμορφωτικών καταστάσεων λόγω της κάθε μιας φόρτισης χωριστά
- 5) Μπορούμε να παραταθεί με γραφικές οι οποίες περνούν τα κ.β. όλων των διατομών



Εντατική μηχανή



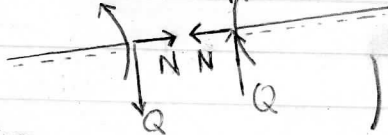
$$① \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$② \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 100 = 0$$

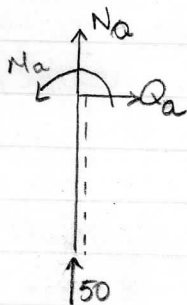
$$③ \curvearrowright \sum M_B = 0 \Rightarrow 10 \cdot V_A - 10 \cdot 10 \cdot 5 = 0 \Rightarrow V_A = 50 \text{ kN}$$

$$② \rightarrow V_B = 50 \text{ kN}$$

(Συμβαση προσανατολισμού:

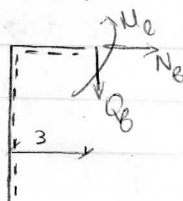


Λύση



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow Q_a = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 50 + N_a = 0 \Rightarrow N_a = -50$$



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow N_b = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 50 - 10 \cdot 3 - Q_b = 0 \Rightarrow Q_b = 20 \text{ kN}$$

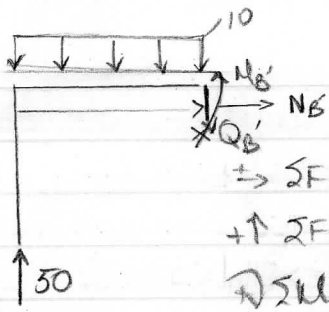
$$\curvearrowright \sum M_b = 0 \Rightarrow 50 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1.5 - N_b = 0 \Rightarrow N_b = 10.5 \text{ kN}$$



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow Q_g \frac{\sqrt{2}}{2} - N_f \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow Q_g = N_f$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow Q_g \frac{\sqrt{2}}{2} + N_f \frac{\sqrt{2}}{2} + 50 - 10 \cdot 2 = 0$$

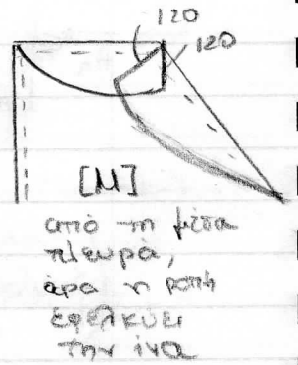
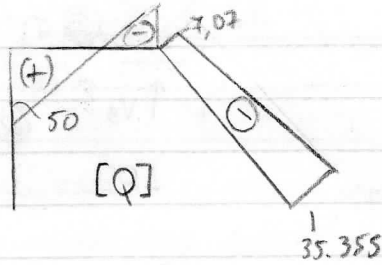
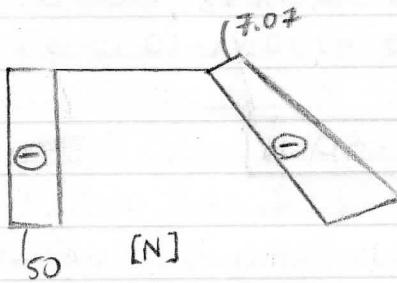
$$Q_g = -17.7 = N_f$$



$$\Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow N_B' = 0$$

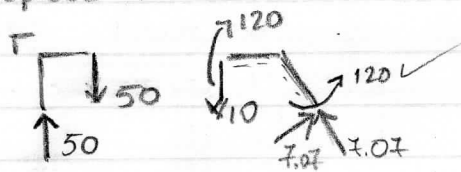
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 50 - 10x - Q_B' = 0 \Rightarrow Q_B' = 50 - 10x$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0 \Rightarrow 50 \cdot x - 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - M_B' = 0 \Rightarrow M_B' = 50x - 5x^2$$



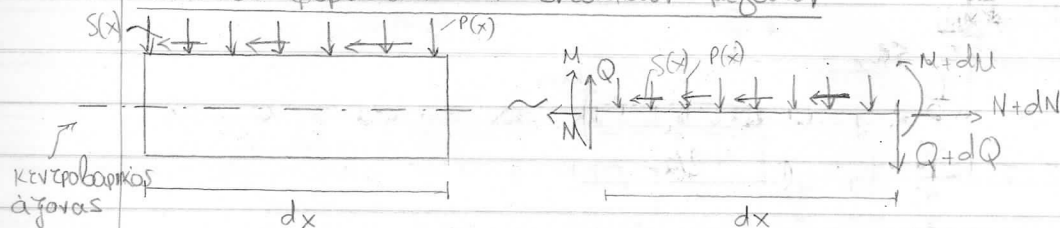
από τη μέση
πλευρά,
όρα η ποσότητα
εξωτερική
της ισο

Κόμβος Γ



27/3/2009

Σχέσεις φορτίσεων & εντατικών μεγεθών



$$\sum F_x = 0 = N + dN - N - s(x)dx \rightarrow \frac{dN}{dx} = s(x) \quad (1)$$

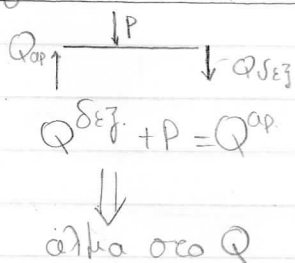
$$\sum F_y = 0 \uparrow = Q - (Q + dQ) - P(x)dx \rightarrow \frac{dQ}{dx} = -P(x) \quad (2)$$

$$\sum M_b = 0 = Q \cdot dx - P(x) \cdot \frac{dx}{2} + N - (N + dN) \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x) \quad (3)$$

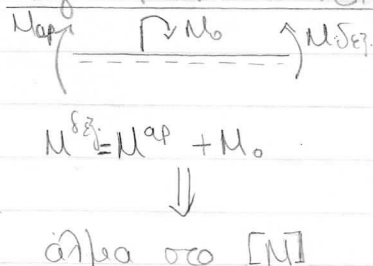
Συμπεράσματα

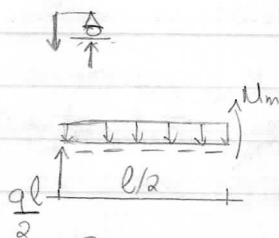
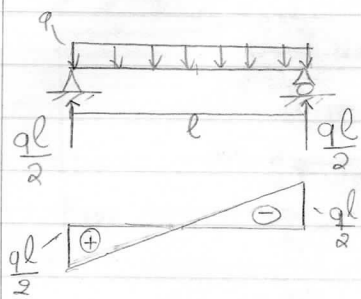
- 1) Κλίση διαγράμματος ρέμνουσών ίση με τιμή κατανομημένου εγκάρσιου φορτίου $\left(\frac{1}{N} \right)$ κατά οριζόντιο
- 2) Κλίση διαγράμματος ροπών είναι η ρέμνουσα: $Q = 0$ μ μέγιστο ή μ ελάχιστο
- 3) Κλίση διαγράμματος αξονικών είναι η τιμή του κατανομημένου διατμητικού φορτίου.
- 4) Για μηδενικό εγκάρσιο φορτίο $\Rightarrow Q$ σταθερό
μ γραφικά μεταβαλλόμενο
- 5) Αλλαγή στην τιμή του κατανομημένου εγκάρσιου φορτίου $\Rightarrow$ αλλαγή
- 6) Μηδενικό διατμητικό φορτίο $\Rightarrow N$ σταθερό κλίση 0
- 7) Σταθερό $\Rightarrow N$ γραφικά μεταβαλλόμενο.

Συγκεντρωμένο φορτίο



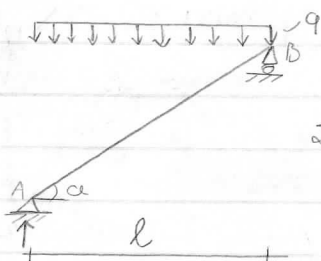
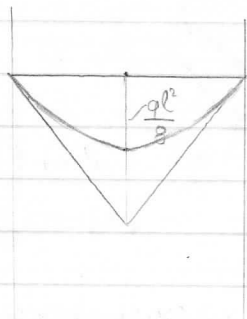
Συγκεντρωμένη Ροπή





$$\sum M = 0 = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - M_m$$

$$\Rightarrow M_m = \frac{ql^2}{8}$$

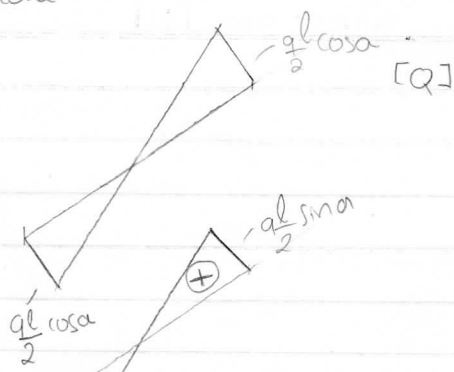
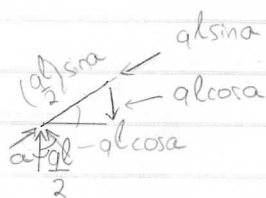


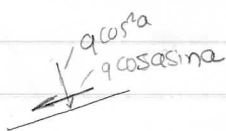
(στη περίπτωση τέτοιας φόρτισης έχουμε)

$$\sum M_B = 0 = V_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} \rightarrow V_A = \frac{ql}{2}$$



$$ql = \frac{q'l}{\cos \alpha} \rightarrow q' = q \cos \alpha$$





$$U_m = \frac{q l^2}{8}$$

m poin
on beam

$$U_m = (q \cos^2 \alpha) \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^2 / 8$$

