

ΠΡΟΤΥΠΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Αυστηροί κανόνες για την εύρεση ορίων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών δεν υπάρχουν. Η ενασχόληση με πολλές ασκήσεις και η εμπειρία είναι το κλειδί για την επιτυχία. Παρακάτω δίνονται μερικές γενικές αρχές που πρέπει να εφαρμόζονται.

i) Η προσέγγιση στο όριο με ευθείες, παραβολές κ.λ.π. δεν αποτελεί απόδειξη της ύπαρξης του ορίου.

ii) Δεν εφαρμόζουμε ποτέ κανόνα του D'Hospital σε συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Ο κανόνας εφαρμόζεται μόνο, εάν μπορεί η συνάρτηση, με κατάλληλους μετασχηματισμούς, να μετατραπεί σε συνάρτηση μιας μεταβλητής.

iii) Η ύπαρξη και η ισότητα των διαδοχικών ορίων δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη του ορίου της συνάρτησης.

iv) Οι πολικές συντεταγμένες αποτελούν μια καλή οδό για να αποδείξουμε την ύπαρξη του ορίου. Χρειάζεται όμως προσοχή διότι υπάρχουν και περιπτώσεις που δεν μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε.

v) Υπάρχουν περιπτώσεις που ο ορισμός του ορίου είναι δύσκολο να εφαρμοστεί.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^5 + y^3}$$

Λύση: Προσεγγίζουμε την αρχή με την ευθεία $y=kx$ και το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^5 + k^3 x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2 + k^3} = 0$$

Αν όμως προσεγγίσουμε το σημείο $(0,0)$ με την παραβολή $y=px^2$ το ζητούμενο θα γίνει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{px^5}{x^5 + p^3 x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p}{1 + p^3 x} = p,$$

πράγμα που σημαίνει ότι το όριο δεν υπάρχει, διότι εξαρτάται από την τιμή του p .

Στην περίπτωση που ζητούμε να βρούμε το όριο ρητών συναρτήσεων μπορούμε να καταφεύγουμε στον ορισμό ή στις πολικές συντεταγμένες. Προσέξτε την επόμενη άσκηση

Άσκηση 2. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} \quad . \quad (2.1)$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ το ζητούμενο όριο γράφεται

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin^3 \theta = 0,$$

διότι $-1 \leq \sin \theta \leq 1$. Επομένως το ζητούμενο όριο είναι ίσο με μηδέν.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου έχουμε: Θα πρέπει δοθέντος $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιος ώστε για

$$|x| < \delta, \quad |y| < \delta, \quad \text{να είναι} \quad \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon.$$

Είναι όμως

$$\left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = |y| \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| < \delta = \varepsilon,$$

γεγονός που δείχνει ότι το όριο (2.1) είναι ίσο με μηδέν.

Προσοχή : Όταν χρησιμοποιούμε τον ορισμό πρέπει κατά κάποιο τρόπο να έχουμε «μαντέψει» ποιο είναι το όριο όταν αυτό δεν δίνεται. Αυτό γίνεται εμπειρικά ή με κάποιο άλλο τρόπο που θα μας υποδείξει «ενδεικτικά» το όριο αλλά δεν θα αποτελεί απόδειξη.

Μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση που πρέπει να θυμόμαστε πάντα είναι ότι κοντά στην αρχή των συντεταγμένων ισχύει

$$\sin x \approx x, \quad \tan x \approx x$$

Η αντικατάσταση του ημιτόνου και της εφαπτομένης με το τόξο τους είναι πολύ χρήσιμη γιατί απλοποιεί σημαντικά τις ασκήσεις. Αυτό φαίνεται καθαρά στην παρακάτω άσκηση.

Άσκηση 3. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - \sin^2 y}{\tan x + y} . \quad (3.1)$$

Λύση: Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - \sin^2 y}{\tan x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x - y) = 0 .$$

Επομένως το όριο (3.1) είναι ίσο με μηδέν.

Άσκηση 4. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^4) \ln|x^2 + y^4| . \quad (4.1)$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι, αν θέσουμε

$$x^2 + y^4 = t ,$$

μετατρέπουμε το όριο (4.1) σε όριο συνάρτησης μιας μεταβλητής. Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \quad (4.2)$$

που είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$. Συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας του d'Hospital στην (4.2), ο οποίος δίνει

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\ln t)'}{\left(\frac{1}{t}\right)'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = - \lim_{t \rightarrow 0} t = 0 .$$

Προσοχή : Υπάρχουν περιπτώσεις που ο κανόνας του d'Hospital δεν μπορεί να εφαρμοστεί έστω και αν η δοθείσα συνάρτηση ανάγεται σε συνάρτηση μιας μεταβλητής. Προσέξτε την επόμενη άσκηση

Άσκηση 5. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x + y + \sin(x + y)}{x + y - \sin(x + y)} . \quad (5.1)$$

Λύση: Αν θέσουμε $x + y = t$, το όριο (5.1) γράφεται

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \sin t}{t - \sin t} \quad (5.2)$$

Ο κανόνας του d'Hospital δεν μπορεί να δώσει αποτέλεσμα διότι το όριο του λόγου των παραγώγων που είναι το

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t},$$

δεν υπάρχει.

Για να βρούμε το όριο γράφουμε την (5.2) ως εξής

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin t}{t}}{t - \frac{\sin t}{t}} = 1,$$

διότι $-1 \leq \sin t \leq 1$. Κατά συνέπεια το όριο (5.1) είναι η μονάδα.

Η συνέχεια συναρτήσεων σχετίζεται με την ύπαρξη ή μη κάποιου ορίου σε ένα ή περισσότερα σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Ας δούμε την επόμενη άσκηση.

Άσκηση 6. Είναι δυνατόν να οριστεί η παράμετρος λ έτσι, ώστε η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(\sin^4 x - \sin^4 y)}{x^2 - y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lambda & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

να είναι συνεχής σε όλο το R^2 ;

Λύση: Είναι φανερό ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το επίπεδο, εκτός, ίσως, από την αρχή των συντεταγμένων. Για να είναι συνεχής στην αρχή των συντεταγμένων θα πρέπει να υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο σημείο $P_0(0,0)$ και να θέσουμε, ως τιμή της παραμέτρου λ , την τιμή αυτού του ορίου.

Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^4 x - \sin^4 y}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0.$$

Επομένως για $\lambda=0$ η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το R^2 .

Αν κατανοήσουμε την έννοια του ορίου και ξέρουμε να λύνουμε ασκήσεις ορίων τότε μπορούμε να λύσουμε το ίδιο εύκολα και ασκήσεις συνέχειας συναρτήσεων.

Στη συνέχεια προσπαθήστε να λύσετε μόνοι σας τις παρακάτω ασκήσεις .

2. Ασκήσεις προς λύση

Άσκηση Α1. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$(α) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - \sin^3 y}{x + y}, \quad (β) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \left(\frac{y - \cos x}{y + \cos y} \right) e^{-\frac{1}{x+y}}$$

$$(γ) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3 - axy^2}{x^4 + y^4}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (δ) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 3y^2}{x + 3y}.$$

Απάντηση: (α) μηδέν, (β) μονάδα, (γ) δεν υπάρχει, (δ) μηδέν.

Άσκηση Α2. Εξετάστε τη συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(\sin^3 x + \sin^3 y)}{x + y} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Απάντηση: Η συνάρτησης είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση Α3. Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\tan 2x}{x + y} \right) \sin(x^2 - y^2) .$$

Απάντηση: Το όριο υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν.

Άσκηση Α4. Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4} .$$

Απάντηση: Το όριο δεν υπάρχει.

Άσκηση Α5. Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2 + y^3}{x^4 + 2y^3} .$$

Απάντηση: Το όριο υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν.
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η μερική παράγωγος συναρτήσεων πολλών μεταβλητών βρίσκεται με το συνηθισμένο τρόπο παραγωγίσης μόνο οι υπόλοιπες μεταβλητές θεωρούνται σταθερές. Περισσότερο βέβαια να τονίσουμε ότι όλο το μάθημα της Ανάλυσης II θεμελιώνεται πάνω στις μερικές παραγώγους. Το ζήτημα είναι απλό. Πρέπει να γνωρίζουμε και να «θυμόμαστε απ'έξω» τις παραγώγους όλων των στοιχειωδών συναρτήσεων.

1. Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να βρεθούν οι πρώτες μερικές παράγωγοι ως προς x των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x, y) = \ln \left[\frac{1}{x^2 + 2y^2} \right], \quad x^2 + 2y^2 \neq 0, \quad g(x, y) = \tan^{-1} \left[\frac{1}{x^2 + y^2} \right], \quad x^2 + y^2 \neq 0,$$
$$\phi(x, y) = \sin \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right], \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad \sigma(x, y) = a^{\frac{1}{x^2 + y^2}}, \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad a > 0.$$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{x^2 + 2y^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2x}{1 + (x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{(x^2 - y^2) \cos \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right]}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = - \frac{2xa^{\frac{1}{x^2 + y^2}} \ln a}{(x^2 + y^2)^2}$$

Επαληθεύσατε τα παραπάνω αποτελέσματα μόνοι σας.

Προσοχή: Στην περίπτωση που κάποια μερική παράγωγος δεν είναι συνεχής σ'ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου για να την βρούμε στο σημείο αυτό. Προσέξτε την επόμενη άσκηση

Άσκηση 2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}. \quad (2.1)$$

Να δειχθεί ότι

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x^3 + y^3)^{2/3}} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

Λύση: Η συνάρτηση (2.1) είναι ορισμένη και συνεχής σε όλο το R^2 . Η μερική παράγωγος πρώτης τάξης της συνάρτησης ως προς x είναι

$$f_x(x, y) = \frac{x^2}{(x^3 + y^3)^{2/3}}, \text{ όταν } (x, y) \neq (0, 0) \quad (2.3)$$

Για να βρούμε την τιμή της παραπάνω παραγώγου στο σημείο $P(0, 0)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου. Έχουμε λοιπόν

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(\Delta x)^3]^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \quad (2.4)$$

Το αποτέλεσμα (2.4), δεν μπορεί να προκύψει αν πάρουμε το όριο της (2.3) όταν $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος (2.3) δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο σημείο $(0, 0)$.

Προσοχή: Αν με Δf συμβολίσουμε τη μεταβολή μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών και με df το διαφορικό της, αυτές οι δύο ποσότητες δεν είναι ίσες. Στις ασκήσεις όμως συνήθως λαμβάνεται $\Delta f \approx df$.
Ας δούμε την επόμενη άσκηση.

Άσκηση 3. Να βρεθεί η μεταβολή και το διαφορικό της συνάρτησης

$$f(x, y) = xy + y^2. \quad (3.1)$$

στο σημείο $P(1, 1)$ όταν $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.05$

Λύση: Η μεταβολή της συνάρτησης (3.1) είναι σύμφωνα με τον ορισμό

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - xy - y^2.$$

Η

$$\Delta f = y\Delta x + x\Delta y + 2y\Delta y + \Delta x\Delta y + (\Delta x)^2 \quad (3.2)$$

Ενώ το διαφορικό είναι

$$df = y\Delta x + x\Delta y + 2y\Delta y, \quad (3.3)$$

διότι ισχύει $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

Για την αριθμητική εφαρμογή βρίσκουμε $\Delta f=0.2575$, $df=0.25$.

Προσοχή: Ορισμένες φορές στις ασκήσεις ζητείται να ευρεθεί η ποσοστιαία ή σχετική μεταβολή μιας ποσότητας που είναι η

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{df}{f}$$

Μελετήστε την επόμενη άσκηση

Άσκηση 4. Ο δείκτης παραγωγικότητας μιας επιχείρησης δίνεται από τη συνάρτηση

$$V = \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}, \quad x \neq y, \quad (4.1)$$

όπου το x εξαρτάται από το εργατικό δυναμικό και το y από τις πωλήσεις. Ζητείται να βρεθεί η ποσοστιαία μεταβολή του δείκτη παραγωγικότητας, όταν έχουμε μεταβολές κατά Δx , Δy , στα x και y . (Εφαρμογή $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0.1$, $\Delta y=0.2$).

Λύση: Διαφορίζοντας την (4.1) βρίσκουμε

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4xy(x\Delta y - y\Delta x)}{x^4 - y^4}, \quad x \neq y$$

Για την αριθμητική εφαρμογή βρίσκουμε, $\frac{\Delta V}{V} = 0.16$ δηλαδή 16%.

Στις ασκήσεις, όπου ζητείται να αναγνωρίσουμε αν μια ποσότητα είναι διαφορικό κάποιας συνάρτησης μπορούμε να εργαζόμαστε με πιο αποτελεσματικό και γρήγορο τρόπο και να αποφεύγουμε τις ολοκληρώσεις ως προς κάθε μεταβλητή. Ας δούμε μια τέτοια άσκηση.

Άσκηση 5. Να ευρεθεί αν η παράσταση

$$\left[y - \frac{2x \sin y}{(1+x^2)^2} \right] dx + \left[x + \frac{\cos y}{1+x^2} \right] dy, \quad (5.1)$$

αποτελεί διαφορικό κάποιας συνάρτησης. Στην περίπτωση που είναι ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση.

Λύση: Έχουμε

$$f_1 = \left[y - \frac{2x \sin y}{(1+x^2)^2} \right], \quad f_2 = \left[x + \frac{\cos y}{1+x^2} \right]. \quad (5.2)$$

Από τις (5.2) βρίσκουμε

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1 - \frac{2x \cos y}{(1+x^2)^2},$$

πράγμα που σημαίνει ότι η παράσταση (5.1) είναι διαφορικό κάποιας συνάρτησης f . Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε την παράσταση (5.1) ως εξής

$$df = ydx + xdy - \frac{2x \sin y}{(1+x^2)^2} dx + \frac{\cos y}{1+x^2} dy = d(xy) + d\left[\frac{\sin y}{1+x^2}\right], \quad (5.3)$$

Από την (5.3) βρίσκουμε με ολοκλήρωση

$$\int df = \int d(xy) + \int d\left[\frac{\sin y}{1+x^2}\right] \quad \text{ή} \quad f = xy + \frac{\sin y}{1+x^2} + c.$$

Εδώ χρειάζεται προσοχή και εμπειρία για να χειριστούμε με αυτό τον τρόπο την άσκηση. Αν δεν έχουμε εμπειρία στα διαφορικά είναι προτιμότερο να ακολουθήσουμε τον κλασικό τρόπο, όπου ολοκληρώνουμε ως προς κάθε μια από τις μεταβλητές της συνάρτησης.

2. Ασκήσεις προς λύση

Άσκηση Α1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sin\left[\frac{x}{x+y}\right] + \cos\left[\frac{y}{x+y}\right]$$

Ναδειχθεί ότι

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Άσκηση Α2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sin\left[\frac{x-y}{x+y}\right]$$

Να βρεθεί μικτή μερική παράγωγος f_{xy} .

Απάντηση:

$$f_{xy} = \frac{2(x^2 - y^2) \cos\left[\frac{x-y}{x+y}\right] + 4xy \sin\left[\frac{x-y}{x+y}\right]}{(x+y)^4}$$

Άσκηση Α3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \tan^{-1}\left[\frac{1}{x+y}\right]$$

Να βρεθεί τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$$

Απάντηση:

$$A=0.$$

Άσκηση Α4. Να βρεθεί το διαφορικό της συνάρτησης

$$f(x, y) = \sin(y-x) \ln(1+xy).$$

Απάντηση:

$$df = \cos(x-y) \ln(1+xy)(\Delta y - \Delta x) - \frac{\sin(x-y)}{1+xy}(\Delta x + \Delta y)$$

Άσκηση Α5. Να ευρεθεί αν η παράσταση

$$\left[y^2 - x^2 + \frac{1}{2} \ln(1+y^2)\right] dx + \left[2xy + \frac{y}{1+y^2}\right] dy,$$

αποτελεί διαφορικό κάποιας συνάρτησης. Στην περίπτωση που είναι ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση.

Απάντηση: $f(x, y) = xy^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x \ln(1+y^2) + c.$

Άσκηση Α6. Η τιμή φυσικού μεγέθους K προσδιορίζεται από τη μέτρηση των τριών παραμέτρων του μ, ν, ξ σύμφωνα με τη σχέση

$$K = \frac{\sqrt{1 + \mu^3}}{1 + \sin \xi} (1 + \nu^2) .$$

Ζητείται να βρεθεί το ποσοστιαίο σφάλμα στον προσδιορισμό της τιμής του μεγέθους K , αν υπάρχουν λάθη $\Delta\mu, \Delta\nu, \Delta\xi$ στη μέτρηση των παραμέτρων μ, ν, ξ αντίστοιχα. (Εφαρμογή $\mu=1, \nu=2, \xi=0, \Delta\mu=0.05, \Delta\nu=0.02, \Delta\xi=0.04$).

Απάντηση:
$$\frac{\Delta K}{K} \approx \frac{dK}{K} = \frac{3\mu^2}{2(1 + \mu^3)} \Delta\mu + \frac{2\nu}{1 + \nu^2} \Delta\nu - \frac{\cos \xi}{1 + \sin \xi} \Delta\xi = 0.0135.$$

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΙ ΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στην παραγωγή των συνθέτων συναρτήσεων. Εφαρμόζουμε, με προσοχή, τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγής. Τέτοιες ασκήσεις είναι οι ασκήσεις των μετασχηματισμών, όπου καλούμεθα να μετασχηματίσουμε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε αντίστοιχη που να έχει απλούστερη μορφή. Ας δούμε μερικές τέτοιες ασκήσεις.

Άσκηση 1. Να μετασχηματιστεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

στις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές u, v οι οποίες συνδέονται με τις παλιές με τις σχέσεις $x=u+v, y=u-v$. Στη συνέχεια ζητείται να βρεθεί η γενική μορφή συνάρτησης z .

Λύση: Από τις δοθείσες σχέσεις προκύπτει

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}, \quad (1.2)$$

Θεωρούμε ότι η z είναι συνάρτηση των u, v δηλαδή $z = z(u, v)$. Λόγω όμως των σχέσεων (1.2) η z είναι σύνθετη συνάρτηση των x και y μέσω των u και v . Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στην (1.1) βρίσκουμε ότι αυτή παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

Επομένως είναι

$$z = z(v) + c = z\left(\frac{x-y}{2}\right) + c, \text{ όπου } c \text{ είναι σταθερή.}$$

Λίγο δυσκολότερη είναι η επόμενη άσκηση στην οποία έχουμε να μετασχηματίσουμε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Άσκηση 2. Να μετασχηματιστεί η διαφορική εξίσωση

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad a \neq 0, \quad (2.1)$$

όταν εισαχθούν στις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές u, v οι οποίες συνδέονται με τις παλιές με τις σχέσεις $u=x+\alpha y, v=x-\alpha y$.

Λύση: Είναι φανερό ότι η z είναι σύνθετη συνάρτηση των x και y μέσω των u και v . Έχουμε λοιπόν

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = a \left[\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right].$$

Παραγωγίζοντας ακόμη μια φορά τις σχέσεις (2.2) βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \quad (2.3)$$

$$= a \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} a - a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right] = a^2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right]$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των

των $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ από την (2.3) στην εξίσωση (2.1) βρίσκουμε, τελικά, ότι αυτή παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Πολλές φορές μας ζητείται να αναπτύξουμε μια συνάρτησης $f(x,y)$ σε σειρά Taylor στην περιοχή ενός σημείου $P_0(x_0, y_0)$. Το γενικό ανάπτυγμα είναι

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right]^k f(x_0, y_0) + R_n, \quad (1)$$

όπου R_n είναι το υπόλοιπο του τύπου του Taylor. Συνήθως προσεγγίζουμε τη συνάρτηση με ένα πολυώνυμο δευτέρου ή τρίτου βαθμού. Οι υπόλοιποι όροι παραλείπονται.

Προσοχή: Οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι αριθμοί και όχι συναρτήσεις. Για την ακρίβεια οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι οι τιμές των παραγώγων της συνάρτησης στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$.

Στην περίπτωση προσέγγισης της συνάρτησης με πολυώνυμο δευτέρου βαθμού έχουμε

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{P_0} dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{P_0} dy + \frac{1}{2!} \left\{ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{P_0} (dx)^2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{P_0} (dy)^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{P_0} dx dy \right\} + \dots, \quad (2)$$

όπου $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$.

Ας δούμε την επόμενη άσκηση

Άσκηση 3. Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{e^x}{x + y^2}, \quad (3.1)$$

στην περιοχή του σημείου $P_0(0, -1)$, κρατώντας όρους μέχρι και δεύτερης τάξης ως προς τις μεταβλητές.

Λύση: Το ζητούμενο ανάπτυγμα δίνεται από τη σχέση (2) όπου $dx = x - 0$, $dy = y + 1$.

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-e^x}{(x + y^2)^2} + \frac{e^x}{x + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2e^x y}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2e^x}{(x + y^2)^3} - \frac{2e^x}{(x + y^2)^2} + \frac{e^x}{x + y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4e^x y}{(x + y^2)^3} - \frac{2e^x y}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{8e^x y^2}{(x + y^2)^3} - \frac{2e^x}{(x + y^2)^2},$$

Οι τιμές της συνάρτησης και των ανωτέρω παραγώγων στο σημείο $P_0(0, -1)$ είναι

$$\begin{aligned}
f(x_0, y_0) &= 1, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{P_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{P_0} = 2, \\
\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{P_0} &= 1, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{P_0} = -2, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{P_0} = 6.
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές (3.2) στο ανάπτυγμα (2) βρίσκουμε

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + 8y + 3y^2 - 2x(1+y) + 6.$$

Άσκηση 4. Βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τις μεταβλητές που να προσεγγίζει την συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{2x - y}{1 - y}, \tag{4.1}$$

στην περιοχή της αρχής των συνταγμένων.

Λύση: Είναι προφανές ότι η άσκηση ζητάει να υπολογιστεί το ανάπτυγμα Mc-Laurin της συνάρτησης (4.1) και να κρατηθούν όροι μέχρι δευτέρου βαθμού. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση (4.1) γράφεται είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων, δηλαδή

$$f(x, y) = f_1(x, y) f_2(y) = (2x - y) \left(\frac{1}{1 - y} \right). \tag{4.2}$$

Τα αναπτύγματα Mc-Laurin των συναρτήσεων $f_1(x, y)$ και $f_2(y)$ είναι

$$2x - y = 2x - y, \tag{4.3α}$$

$$\frac{1}{1 - y} = 1 + y + \dots \tag{4.3β}$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα των συναρτήσεων από τις σχέσεις (4.3) στην σχέση (4.2), έχουμε τελικά

$$\Pi(x, y) = (2x - y)(1 + y).$$

όπου $\Pi(x, y)$ είναι το ζητούμενο πολυώνυμο.

Προσοχή. Ο σύντομος αυτός τρόπος λύσης ισχύει μόνο όταν το σημείο ανάπτυξης της συνάρτησης είναι το $P_0(0,0)$. (Βλέπε Άσκηση Α12.)

Μια άλλη κατηγορία ασκήσεων είναι αυτή που ασχολείται με πλεγμένες συναρτήσεις. Η σχέση που ορίζει την πλεγμένη συνάρτηση είναι πρακτικά της μορφής

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{ή} \quad F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Οι πρώτη από τις σχέσεις (1) ορίζει την πλεγμένη συνάρτηση $z = z(x, y)$ ενώ η δεύτερη ορίζει την πλεγμένη συνάρτηση $y = y(x)$.

Εδώ υπάρχουν οι εξής δύο βασικοί κανόνες:

- (i) Κάθε σχέση της μορφής (1) δεν ορίζει πλεγμένη συνάρτηση.
- (ii) Δεν προσπαθούμε να λύσουμε τις σχέσεις (1) ως προς την συνάρτηση, διότι γενικώς δεν λύνονται.
- (iii) Κάθε φορά που παραγωγίζουμε ως προς τη μεταβλητή η οποία θεωρείται ως η πλεγμένη συνάρτηση πολλαπλασιάζουμε επί την παράγωγο της συνάρτησης.

Άσκηση 5. Να βρεθούν οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της πλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$F(x, y) = 3x - y^3 - 3xy = 0. \quad (5.1)$$

Λύση: Παραγωγίζοντας την (5.1) παίρνουμε

$$3 - 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0.$$

Η

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1 - y}{x + y^2}. \quad (5.2)$$

Παραγωγίζοντας για μια ακόμα φορά την (5.2) βρίσκουμε

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{-y'(x + y^2) - (1 - y)(1 + 2yy')}{(x + y^2)^2}. \quad (5.3)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της πρώτης παραγώγου, από τη σχέση (5.2) στην (5.3), βρίσκουμε τελικά

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{2(y - 1)(x + y)}{(x + y^2)^3}.$$

Τέλος μια άλλη σημαντική κατηγορία ασκήσεων είναι αυτή που αναφέρεται στις συναρτησιακά εξαρτημένες συναρτήσεις. Πρακτικά αυτό που συνήθως ζητείται είναι να βρούμε αν τρεις δοθείσες συναρτήσεις είναι ή όχι συναρτησιακά εξαρτημένες και, στη συνέχεια, εφόσον είναι συναρτησιακά εξαρτημένες, να δώσουμε τη σχέση που τις συνδέει. Εδώ θα πρέπει να αναφερθεί ότι ενώ σχετικά εύκολα μπορούμε να βρούμε, αν οι συναρτήσεις είναι συναρτησιακά εξαρτημένες (Θα πρέπει η Ιακωβιανή τους να είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν), δεν υπάρχει κανόνας για να βρούμε την συναρτησιακή εξάρτηση, η οποία μόνο εμπειρικά πρέπει να αναζητηθεί. Προσέξτε την επόμενη Άσκηση.

Άσκηση 6. Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις

$$u = x + 2y - z^2, \quad v = x - y + 2z^2, \quad w = 2x + y + z^2 \quad (6.1)$$

είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. Εάν είναι, να βρεθεί η σχέση που τις συνδέει.

Λύση: Για να είναι οι συναρτήσεις του συστήματος (6.1) συναρτησιακά εξαρτημένες θα πρέπει η συναρτησιακή ορίζουσα

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$$

να είναι εκ ταυτότητας ίση με μηδέν. Έχουμε

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2z \\ 1 & -1 & 4z \\ 2 & 1 & 2z \end{vmatrix} = 0.$$

Επομένως, οι συναρτήσεις του συστήματος (6.1) είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η σχέση που τις συνδέει είναι η $w = u + v$.

2. Ασκήσεις προς λύση

Άσκηση Α1. Να μετασχηματιστεί η διαφορική εξίσωση

$$(x + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

στις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές u, v οι οποίες συνδέονται με τις παλιές με τις σχέσεις $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = y$.

Απάντηση: $\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$

Άσκηση Α2. Βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τις μεταβλητές που να προσεγγίζει την συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{2x - y}{1 - y},$$

στην περιοχή του σημείου $P_0(1, -1)$.

Απάντηση: $\Pi(x, y) = \frac{1}{8} [3 + y^2 + 4x(3 + y)]$.

Άσκηση Α3. Βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τις μεταβλητές που να προσεγγίζει την συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + \ln(1 + y)},$$

στην περιοχή του σημείου $P_0(0,0)$.

Απάντηση: $\Pi(x, y) = (x - y)(1 - y)$.

Άσκηση Α4. Να βρεθούν οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της πλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$F(x, y) = 3y - \ln y - 3x - x^2 = 0, \quad y > 0.$$

Απάντηση:

$$y' = \frac{(3 + 2x)y}{3y - 1}, \quad y'' = - \frac{(7 + 12x + 4x^2 + 12y - 18y^2)y}{(3y - 1)^3}.$$

Άσκηση Α5. Να βρεθούν οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της πλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$F(x, y) = x^2 - 2e^y - 2y = 0.$$

Απάντηση:

$$y' = \frac{x}{1 + e^y}, \quad y'' = - \frac{1 + e^{2y} - e^y(x^2 - 2)}{(1 + e^y)^3}.$$

Άσκηση Α6. Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις

$$u = (x - y)^3 - z^3, \quad v = x + y - z, \quad w = x^2 + y^2 + z^2 + x(y + z) + y(x + z)$$

είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. Εάν είναι, να βρεθεί η σχέση που τις συνδέει.

Απάντηση: $w = \frac{u}{v}$.