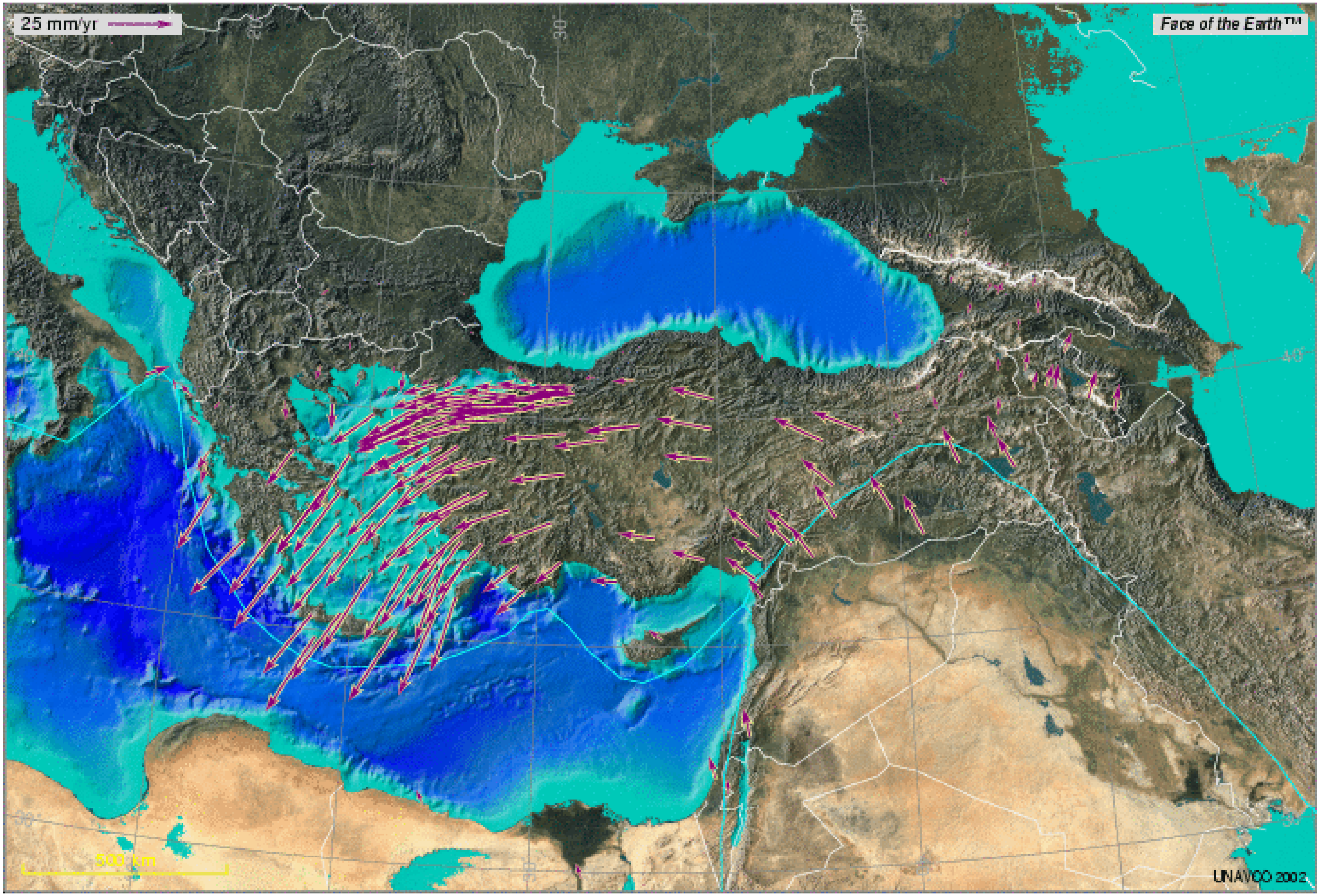
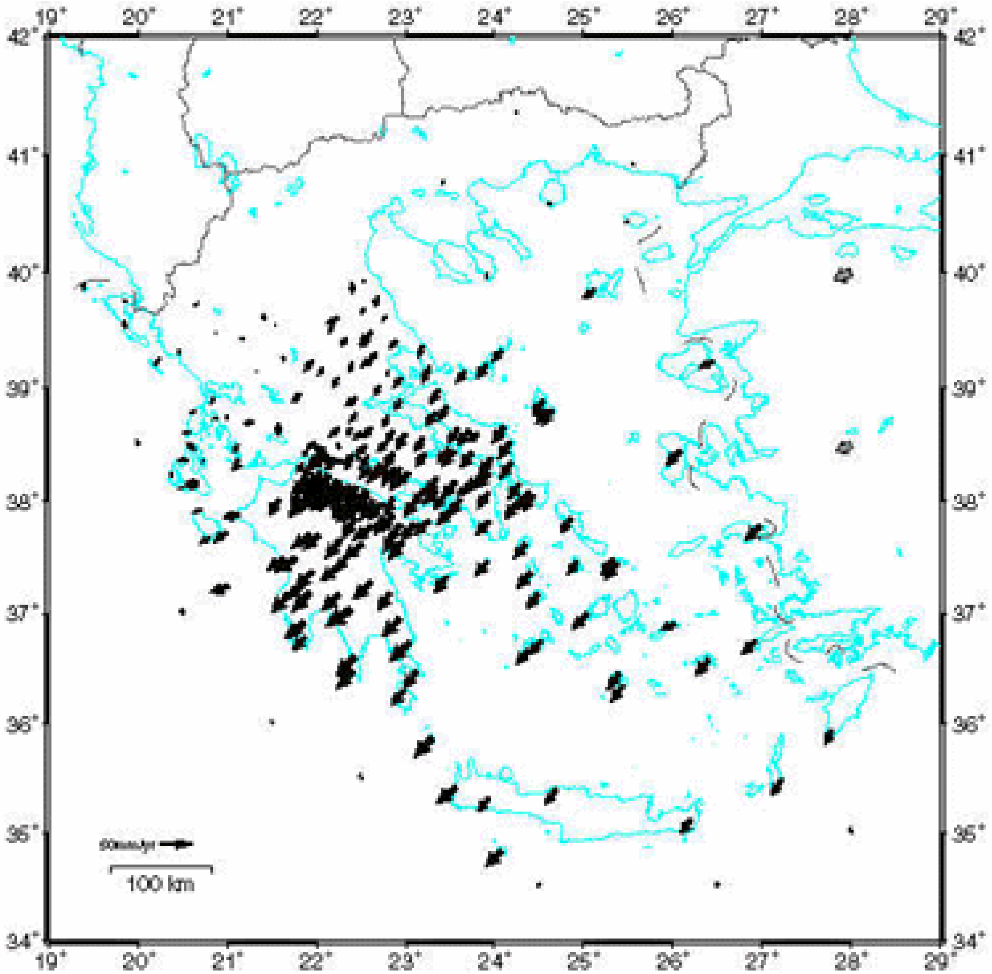
Μηχανική ΙΙ

Τροπές


25 mm/yr
Face of the Earth™
500 km
UNAVCO 2002

http://geomatics.ncl.ac.uk/research/projects/sing/Sing.htm

(P.J. Clarke, D. Paradissis, P. Briole, P.C. England, B.E. Parsons, H. Billiris, G. Veis and J.-C. Ruegg (1998). Geophysical Research Letters, 25(1), 131-133.)



$$dx = n_x\, d\ell, \qquad dy = n_y\, d\ell$$

$$n_x = \cos\alpha, \qquad n_y = \sin\alpha$$

Γνωρίζοντας την μετατόπιση του σημείου Α και δεχόμενοι ότι το πεδίο των μετατοπίσεων είναι συνεχές και λείο, μπορούμε να υπολογίσουμε την μετατόπιση του γειτονικού στο Α σημείου Β:

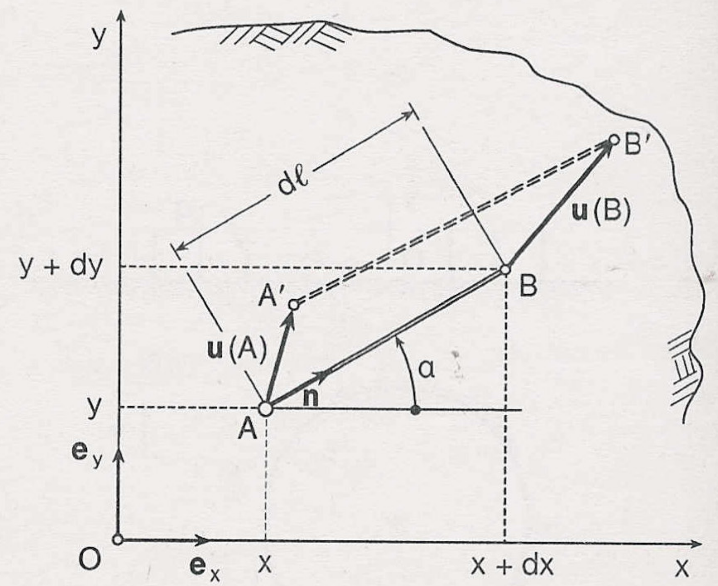
$$u_x(B) = u_x(A) + \left.\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|_A dx + \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_A dy$$

$$u_y(B) = u_y(A) + \left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|_A dx + \left.\frac{\partial u_y}{\partial y}\right|_A dy$$

Εισάγουμε το λεγόμενο **διάνυσμα μεταβολής της μετατόπισης:**

$$a_x = \frac{u_x(B) - u_x(A)}{d\ell} = \frac{\partial u_x}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} n_y$$

$$a_y = \frac{u_y(B) - u_y(A)}{d\ell} = \frac{\partial u_y}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} n_y$$

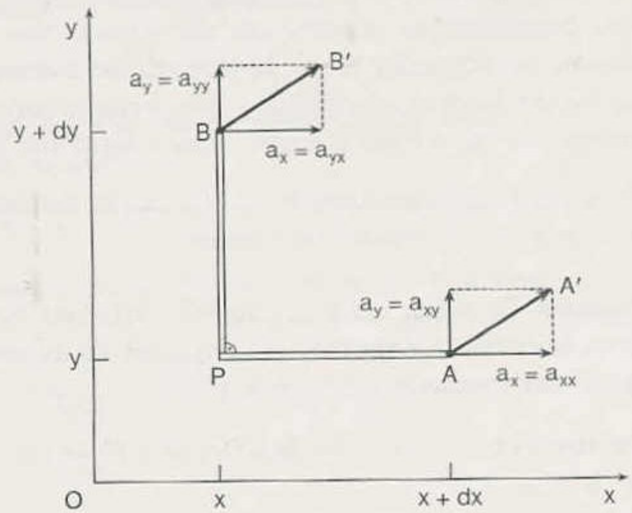


η **βαθμίδα** της μετατόπισης:

$$[\mathrm{grad}\,(\mathbf{u})] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}]^T$$

$$\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του μητρώου **[a]** δίνουν τις **σχετικές ανηγμένες μετατοπίσεις** των άκρων Α και Β στοιχειωδών υλικών ευθυγράμμων στοιχείων ΡΑ και ΡΒ καθέτων μεταξύ τους και παραλλήλων προς τους άξονες Οx και Oy αντίστοιχα.



- *Ευθύγραμμο στοιχείο ΡΑ*

$n_x = 1, \quad n_y = 0$

$$a_x = a_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$a_y = a_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

- *Ευθύγραμμο στοιχείο ΡΒ* $\quad n_x = 0, \quad n_y = 1$

$$a_x = a_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$a_y = a_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Επομένως το *μητρώο των μεταβολών της μετατόπισης* **[a]** περιγράφει την παραμόρφωση ενός στοιχειώδους ισοσκελούς ορθογωνίου δισκέλου. Παρατηρούμε από

Ορισμός: Το συμμετρικό μέρος του μητρώου των μεταβολών της μετατόπισης λέγεται μητρώο των **τροπών** (strain), ενώ το αντισυμμετρικό μέρος αυτού λέγεται μητρώο των **στροφών** (rotation ή spin).

Με την αντιστοιχεία των δεικτών: $1 \leftrightarrow x \equiv x_1, \quad 2 \leftrightarrow y \equiv x_2$ οι παραπάνω ορισμοί γράφονται:

- **Τροπές:** $[\varepsilon] = \frac{1}{2}\left([\mathbf{a}]^T + [\mathbf{a}]\right)$ ή $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ji} + a_{ij}\right)$
- **Στροφές:** $[\omega] = \frac{1}{2}\left([\mathbf{a}]^T - [\mathbf{a}]\right)$ ή $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ji} - a_{ij}\right)$

ή πιο αναλυτικά:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} \\ \omega_{yx} & \omega_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι:

α) το μητρώο των τροπών είναι **συμμετρικό**:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \quad ή \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad ή \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = [\boldsymbol{\varepsilon}]^T$$

και β) ότι το μητρώο των στροφών είναι **αντισυμμετρικό**:

$$\omega_{xy} = -\,\omega_{yx} \quad ή \quad \omega_{ij} = -\,\omega_{ji} \quad ή \quad [\boldsymbol{\omega}] = -[\boldsymbol{\omega}]^T$$

Είναι φανερό ότι στις δύο διαστάσεις ένα συμμετρικό μητρώο, όπως εκείνο των τροπών, έχει μόνο 3 ανεξάρτητες συνιστώσες:

$$\varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

και ότι ένα αντισυμμετρικό μητρώο, όπως εκείνο των στροφών, έχει μόνο μια ανεξάρτητη συνιστώσα:

$$\omega_{xx} = \omega_{yy} = 0, \qquad \omega_{xy} = -\,\omega_{yx} = -\,\omega$$

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

A) Θεωρούμε την ειδική περίπτωση, όπου το μητρώο των μεταβολών της μετατόπισης είναι συμμετρικό:

$$a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = a_{ij}, \qquad \omega_{ij} = 0$$

PA: $n_x = 1,\ n_y = 0$

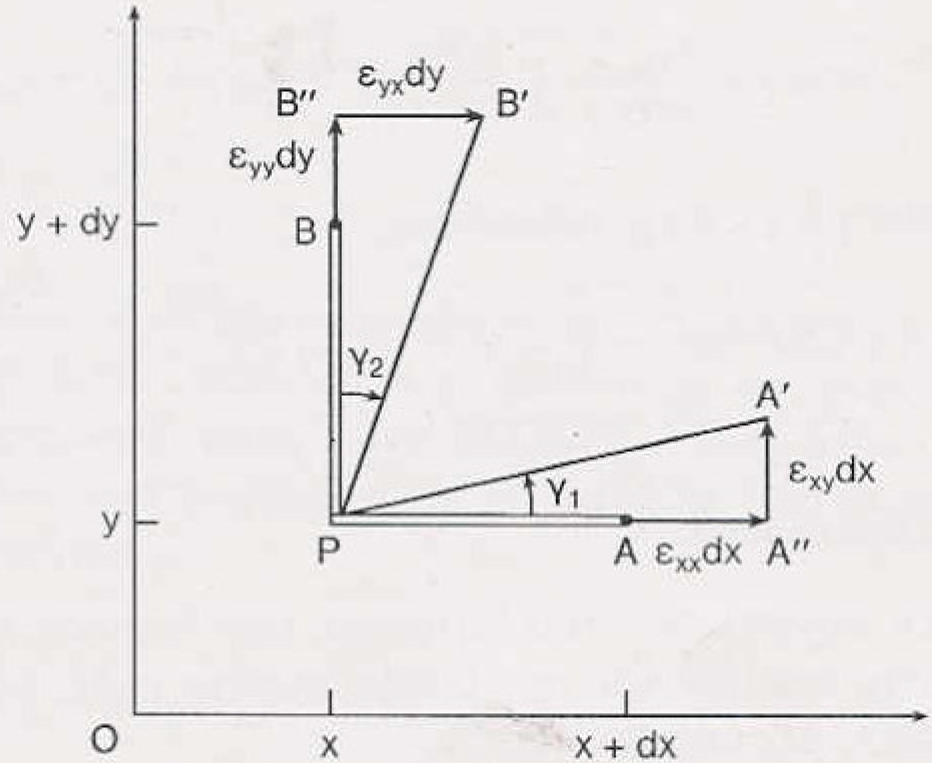
$a_x = a_{xx} = \varepsilon_{xx}$

$a_y = a_{xy} = \varepsilon_{xy}$

PB: $n_x = 0,\ n_y = 1$

$a_x = a_{yx} = \varepsilon_{yx}$

$a_y = a_{yy} = \varepsilon_{yy}$



Υπολογισμός του μήκους του σκέλους (PA′):

$$(PA') = \sqrt{(dx + \varepsilon_{xx}\, dx)^2 + (\varepsilon_{xy}\, dx)^2} = dx \sqrt{(1 + \varepsilon_{xx})^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

Κάνουμε τώρα την παραδοχή ότι οι τροπές είναι μικροί σχετικά προς την μονάδα αριθμοί

$$\| \varepsilon_{ij} \| << 1$$

Η περίπτωση αυτή, που είναι και η συνήθης στις δομοστατικές εφαρμογές, οδηγεί όπως θα δούμε σε αλλαγές μηκών και γωνιών σχετικά μικρών. Οι αντίστοιχες παραμορφώσεις και τροπές καλούνται απειροστές (infinitesimal). Με την προϋπόθεση λοιπόν μικρών τροπών έχουμε:

$$(PA') = dx \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \approx \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}\; dx \approx (1 + \varepsilon_{xx})\, dx$$

Υπολογισμός της γωνίας (A′PB′):

$$\measuredangle\,(A'PB') = \measuredangle\,(APB) - \gamma_1 - \gamma_2$$

όπου:

$$\tan\gamma_1 = \frac{\varepsilon_{xy}\,dx}{(PA'')} = \frac{\varepsilon_{xy}\,dx}{(1+\varepsilon_{xx})\,dx} = \frac{\varepsilon_{xy}}{1+\varepsilon_{xx}} \approx \varepsilon_{xy} \Rightarrow \gamma_1 \approx \varepsilon_{xy}$$

$$\tan\gamma_2 = \frac{\varepsilon_{yx}\,dy}{(PB'')} = \frac{\varepsilon_{yx}}{1+\varepsilon_{yy}} \approx \varepsilon_{yx} \Rightarrow \gamma_2 \approx \varepsilon_{yx}$$

Με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ παίρνουμε,

$$\boxed{\measuredangle\,(A'PB') \approx \frac{\pi}{2} - \gamma} \quad , \quad \gamma = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Συμπέρασμα:

Οι συνιστώσες του μητρώου των τροπών περιγράφουν την μεταβολή των μηκών των σκελών και της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου δίσκελου παράλληλου προς τους άξονες Οx και Οy.

B) Θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου το μητρώο των μεταβολών της μετατόπισης είναι αντισυμμετρικό:

$$a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = 0,\ \omega_{ij} = -a_{ij}$$

PA: $n_x = 1,\ n_y = 0$

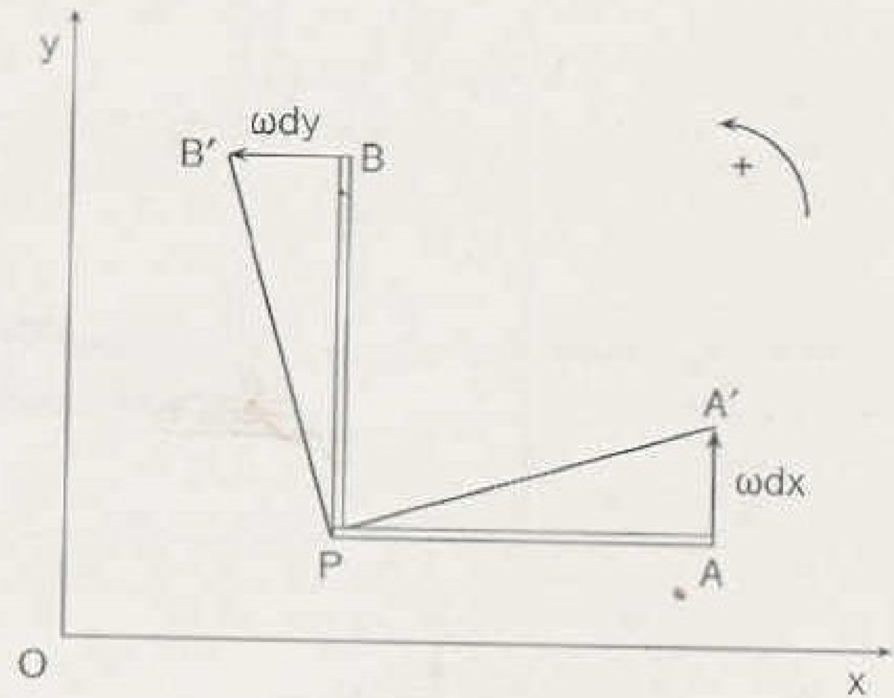
$$a_x = a_{xx} = 0$$

$$a_y = a_{xy} = -\omega_{xy} = +\omega$$

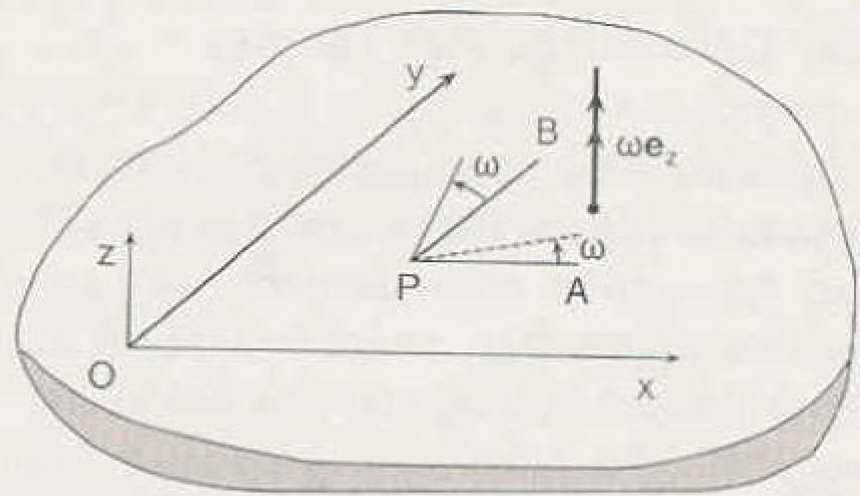
PB: $n_x = 0,\ n_y = 1$

$$a_x = a_{yx} = -\omega_{yx} = -\omega$$

$$a_y = a_{yy} = 0$$



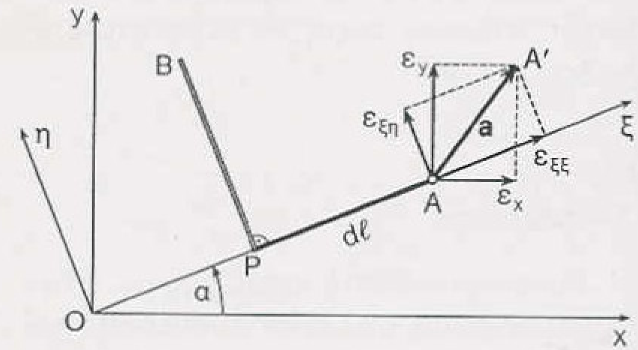
Άρα η συνιστώσα ω του αντισυμμετρικού πίνακα των στροφών περιγράφει την περιστροφή του δίσκελου ως απολύτως στερεού σώματος μέσα στο επίπεδο O(x, y).



Συμπέρασμα:

Η συνεισφορά της στροφής ω στην παραμόρφωση δεν είναι ουσιώδης, γιατί μπορεί να απαλοιφεί με κατάλληλη στροφή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων:

3.2 Ο Τανυστής των Τροπών

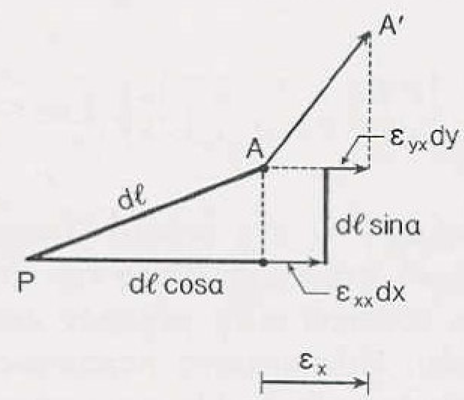


Θεωρούμε την παραμόρφωση ενός δίσκελου αναφέροντάς την σε δύο κινηματικά προτιμητέα συστήματα συντεταγμένων, το τυχαίο O(x, y) και το O(ξ, η) με άξονες παραλλήλους προς τα σκέλη του δισκέλου. Το διάνυσμα μεταβολής της μετατόπισης στο άκρο A έχει συνιστώσες ε_x και ε_y ως προς το σύστημα O(x, y) και $\varepsilon_{\xi\xi}$ και $\varepsilon_{\xi\eta}$ ως προς το O(ξ, η). Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις μετατοπίσεις:

$$\varepsilon_{\xi\xi}\, d\ell = \varepsilon_x \cos\alpha + \varepsilon_y \sin\alpha \quad \text{(ορθή)}$$

$$\varepsilon_{\xi\eta}\, d\ell = -\varepsilon_x \sin\alpha + \varepsilon_y \cos\alpha \quad \text{(διατμητική)}$$

όπου:



$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx}\, dx + \varepsilon_{yx}\, dy, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{xy}\, dx + \varepsilon_{yy}\, dy$$

$$dx = d\ell \cos\alpha, \qquad dy = d\ell \sin\alpha$$

Άρα, $\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx}\cos^2\alpha + \varepsilon_{yy}\sin^2\alpha + (\varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy})\cos\alpha\sin\alpha$

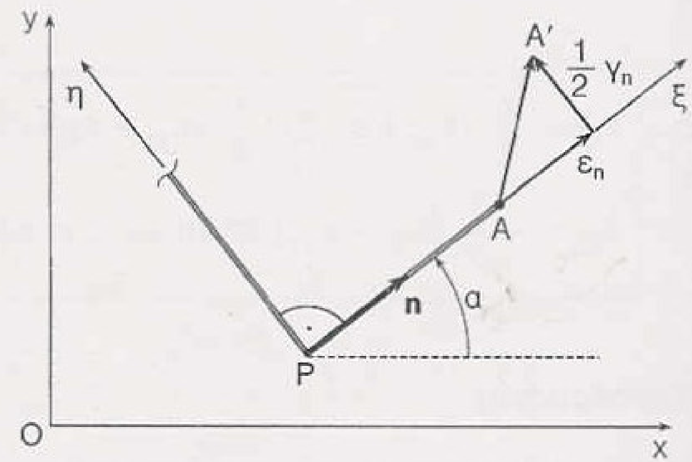
$$\varepsilon_{\xi\eta} = -(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\sin\alpha\cos\alpha - \varepsilon_{yx}\sin^2\alpha + \varepsilon_{xy}\cos^2\alpha$$

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)\cos 2\alpha + \varepsilon_{xy}\sin 2\alpha$$

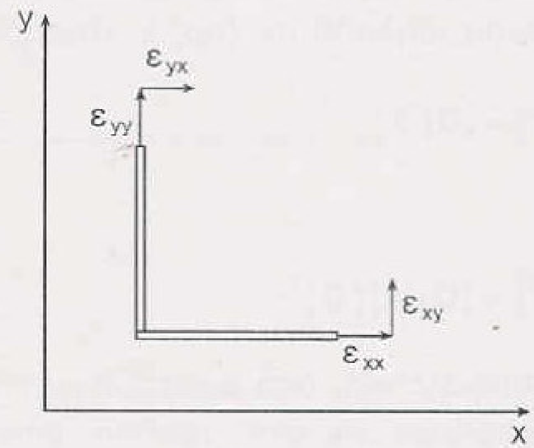
$$\varepsilon_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)\sin 2\alpha + \varepsilon_{xy}\cos 2\alpha$$

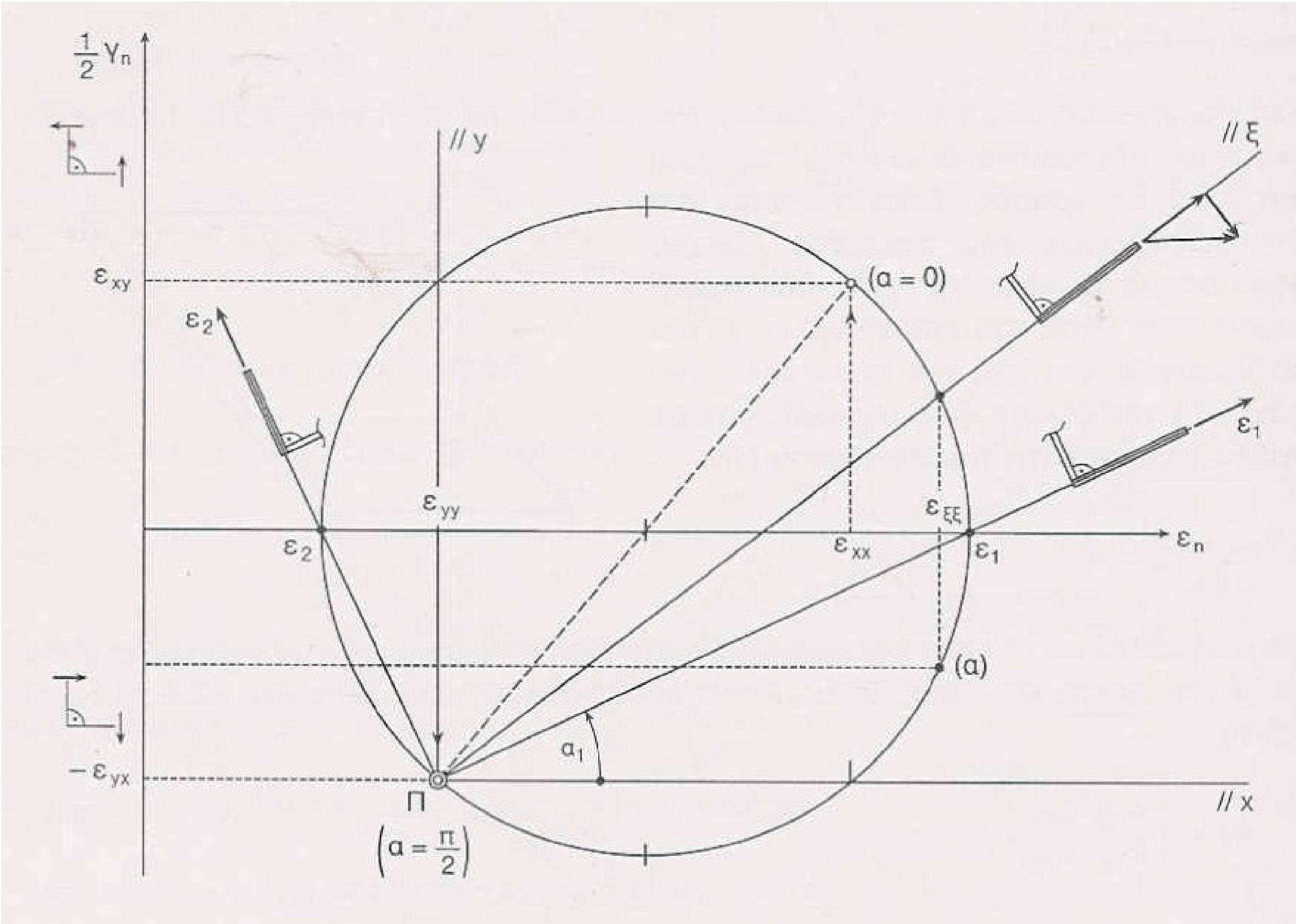
Κύκλος Mohr των Τροπών: Κατ' αναλογία με την ανάλυση τάσεων εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_n &= \varepsilon_{\xi\xi} \\ \frac{1}{2}\,\gamma_n &= \varepsilon_{\xi\eta} \end{aligned}}$$



και σχεδιάζουμε στο επίπεδο τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $\varepsilon_n(\alpha)$, $\frac{1}{2}\gamma_n(\alpha)$, για δεδομένη παραμορφωσιακή κατάσταση ε_{xx}, ε_{yy}, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$.





$\frac{1}{2}\gamma_n$
// y
// ξ
ε_{xy}
(α = 0)
ε_2
ε_1
ε_{yy}
$\varepsilon_{\xi\xi}$
ε_2
ε_{xx}
ε_1
ε_n
(α)
α_1
$-\varepsilon_{yx}$
Π
$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$
// x

- Κύριες τροπές:

$$\varepsilon_{1/2} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

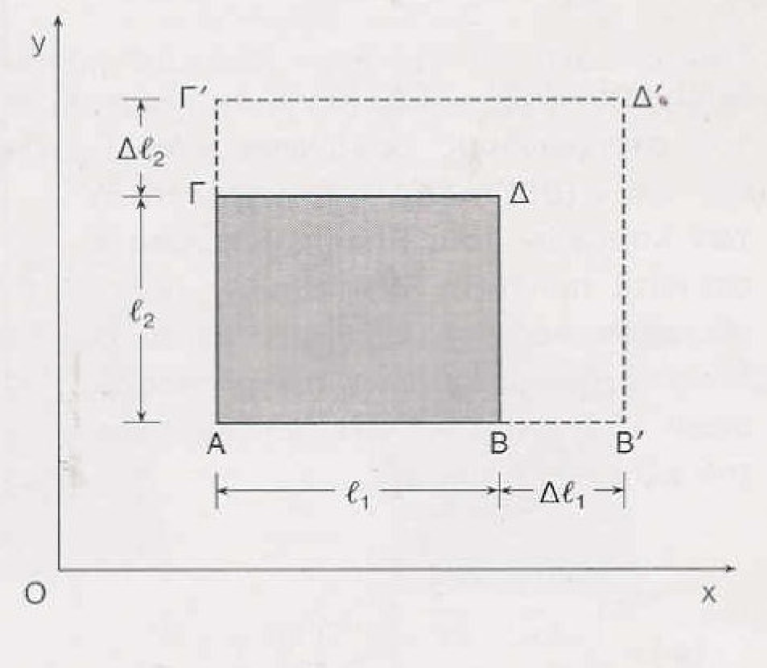
- Κατευθύνσεις κυρίων αξόνων:

$$\tan 2\alpha_{1/2} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}$$

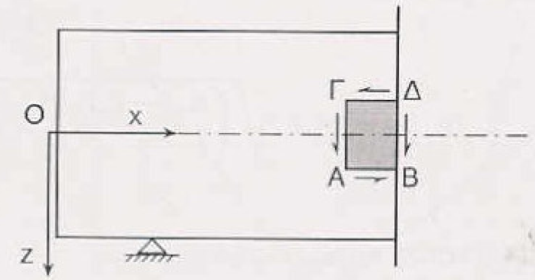
Ορθογώνια παραμόρφωση

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta \ell_1}{\ell_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta \ell_2}{\ell_2}$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{S' - S}{S} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$$



3.3 Καθαρή Διάτμηση

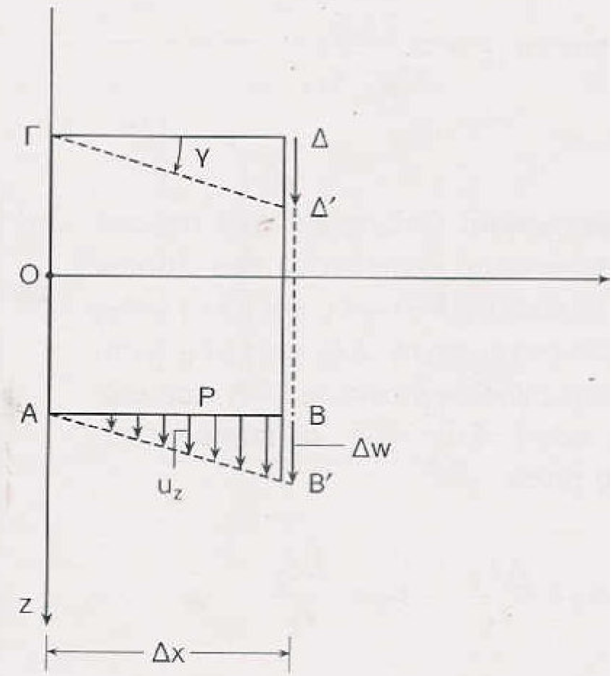


Θεωρούμε ένα στερεό ΑΒΔΓ, το οποίο υφίσταται **καθαρή διάτμηση** στην κατεύθυνση Oz. Το διάνυσμα μετατόπισης στο τυχόν σημείο P(x,z) του στερεού είναι:

$$u_x = 0, \qquad (u_y = 0)$$

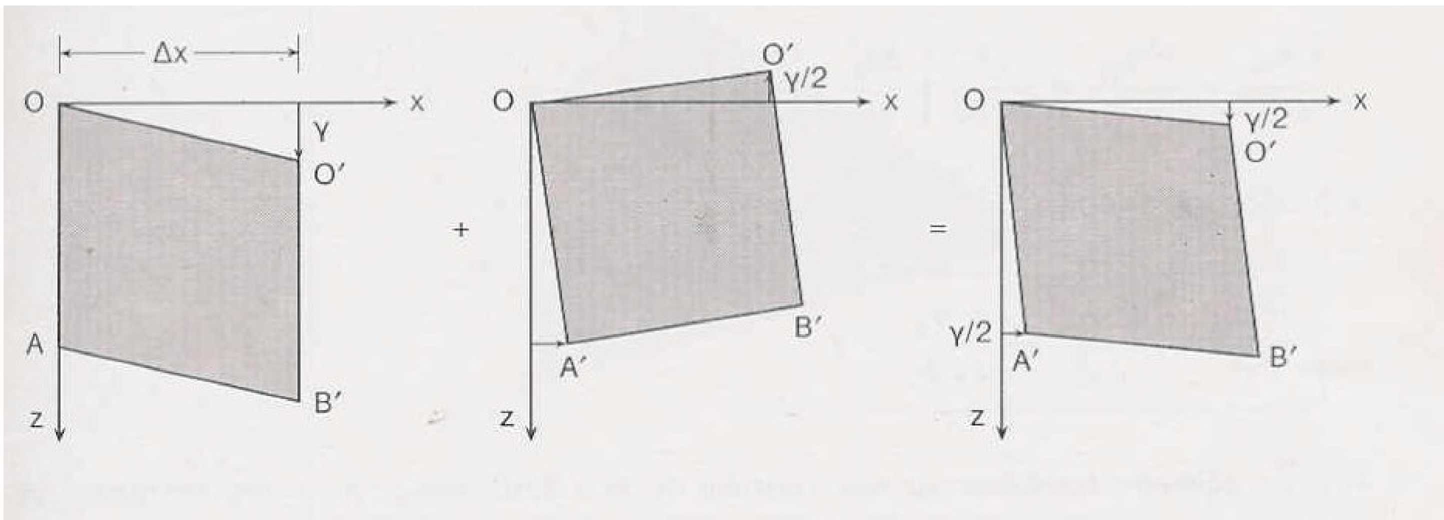
$$u_z = \frac{\Delta w}{\Delta x} \cdot x$$

όπου $\Delta x = (AB) = (\Gamma\Delta)$ είναι το μήκος του στοιχειώδους ορθογωνίου ΑΒΔΓ και $\Delta w = (BB') = (\Delta\Delta')$ η μετατόπιση των κορυφών του. Επίσης δεχόμαστε ότι κατά την τρίτη διάσταση Oy, ουδεμία παραμόρφωση λαμβάνει χώρα. Ο πίνακας των μεταβολών των μετατοπίσεων στο επίπεδο O(x, z) λαμβάνει την εξής απλή μορφή:



$$[a] \doteq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2}\gamma$$



Εξίσωση συμβιβαστού των τροπών

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

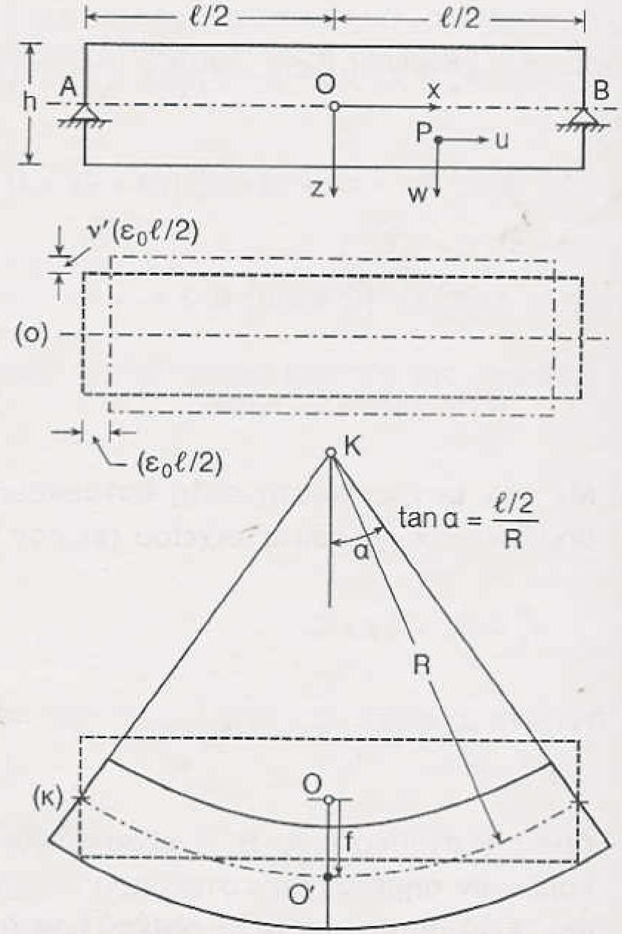
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \, \partial y} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right\} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y} = 0}$$

3.5 Καθαρή Επίπεδη Κάμψη

Έστω μια επίπεδη πλάκα ανοίγματος ℓ και πάχους h. Τα ακραία σημεία A και B του άξονα μπορούν να μετατοπιστούν οριζόντια αλλά όχι κατακόρυφα. Το πεδίο μετατοπίσεων του τυχαίου σημείου P (x, z) της πλάκας δίνεται από τις σχέσεις:



$$u_x = u = -\varepsilon_0 x + \frac{1}{R} xz$$

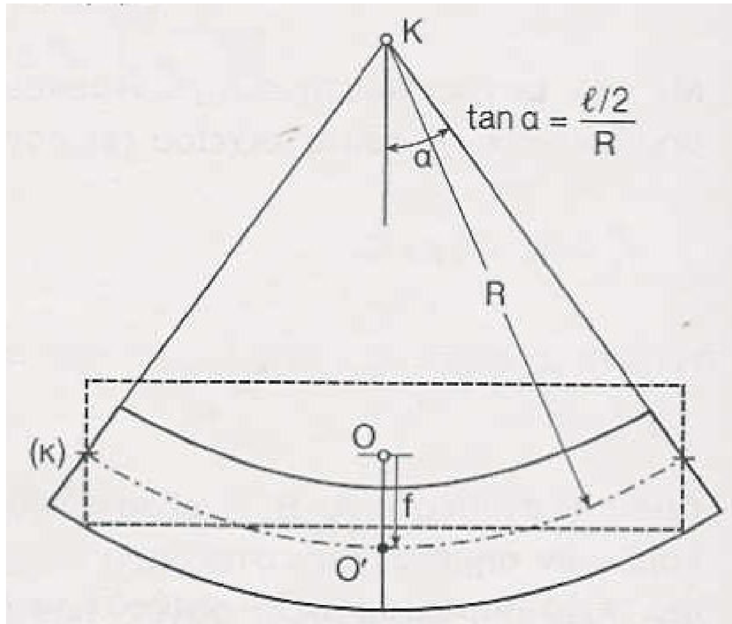
$$u_z = w = \nu' \left(\varepsilon_0 z - \frac{z^2}{2R}\right) - \frac{1}{2R}\left(x^2 - \frac{\ell^2}{4}\right)$$

Οπότε:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\varepsilon_0 + \frac{1}{R} xz$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nu' \left(\varepsilon_0 - \frac{1}{R} z\right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{x}{R} + \frac{x}{R} = 0$$



Η παραμόρφωση της πλάκας σε πρώτη προσέγγιση συνίσταται σε μια **ορθογωνική παραμόρφωση** (ο) και σε μια **καθαρή κάμψη** (κ) με τα εξής χαρακτηριστικά:

ε_0: αξονική βράχυνση

ν': λόγος εγκάρσιας προς αξονική τροπή $\left(\nu' = \frac{\nu}{1-\nu},\ \nu\text{: λόγος Poisson βλπ. §4.2. 3}\right)$

$\frac{1}{R}$: ακτίνα καμπυλότητας καμπτόμενης πλάκας.

Παρατηρούμε από το σχήμα ότι το "βέλος" κάμψης στο μέσο της πλάκας είναι

$$f = R(1-\cos a) \simeq \frac{(\ell/2)^2}{2R} = \frac{\ell^2}{8R}$$