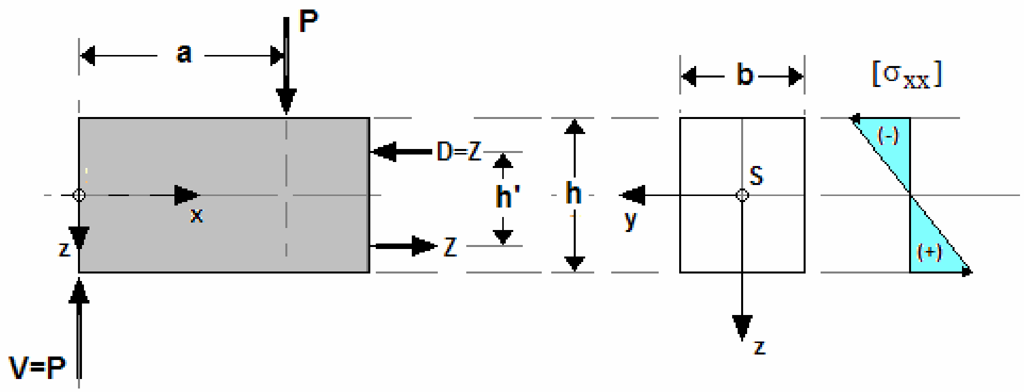
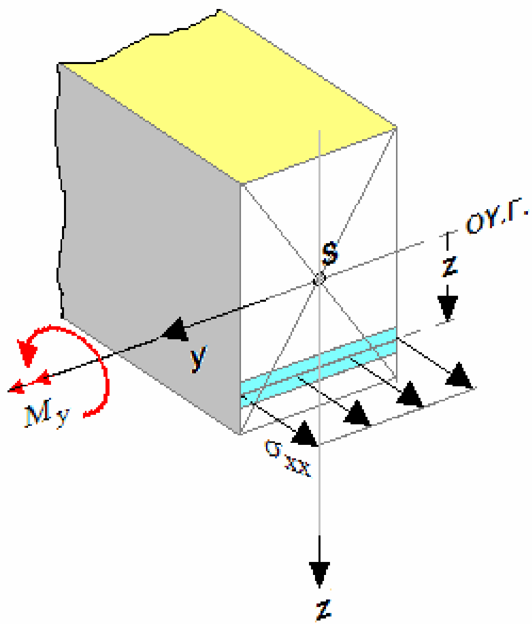
Μηχανική ΙΙ, Πολ. Μηχ.

Κάμψη πρισματικής δοκού

Ι. Βαρδουλάκης

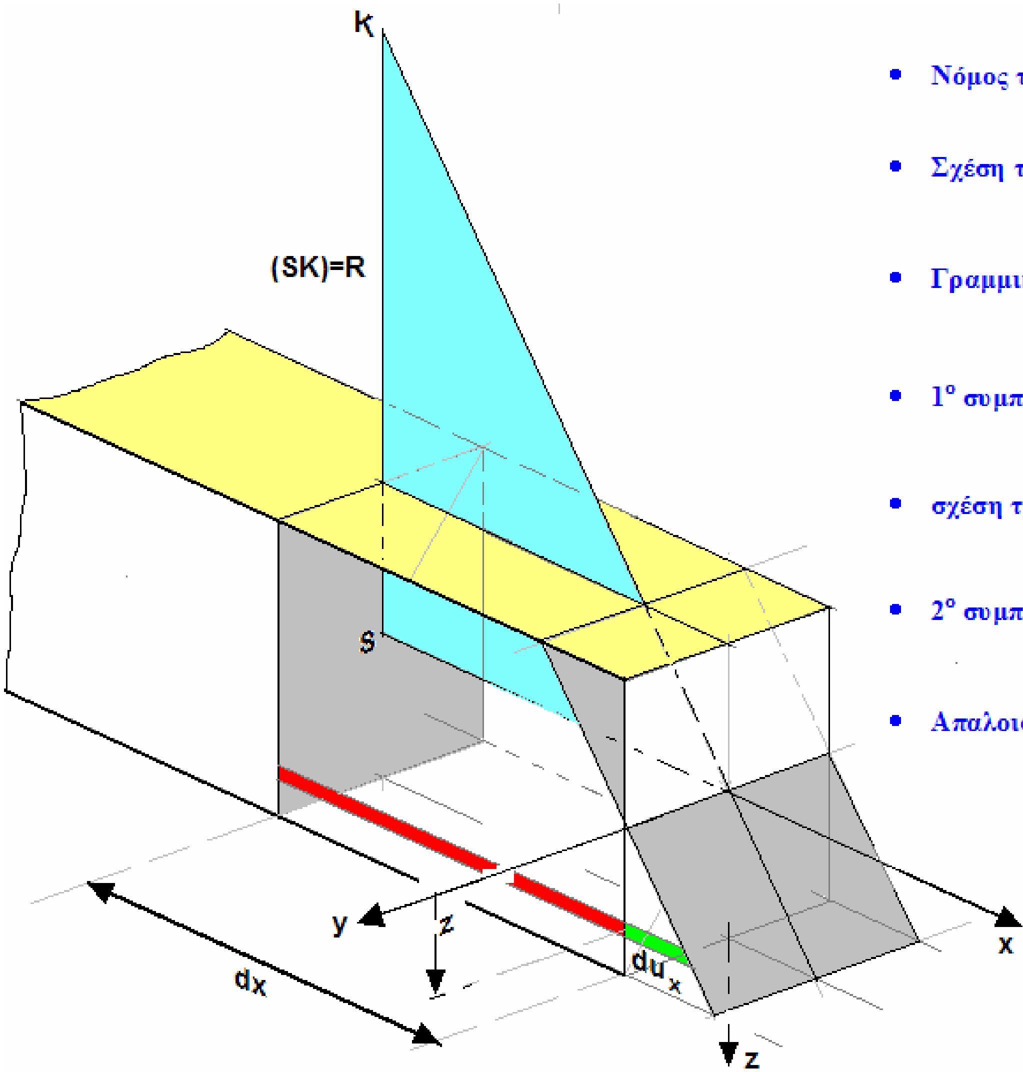
Αξονικές τάσεις σε πρισματική δοκό λόγω κάμψης





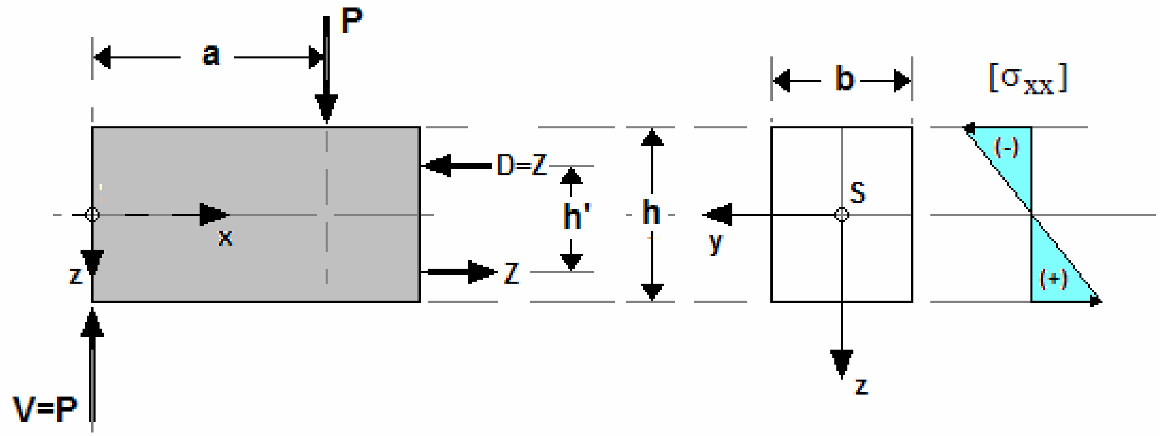
- **Γραμμική κατανομή των τάσεων:** $\sigma_{xx} = cz$
- **Για κεντροβαρικούς άξονες:** $N_x = \int_{(A)} \sigma_{xx}\, dA = c \int_{(A)} z\, dA = 0$ (!)
- **Ροπή κάμψης:** $M_y = \int_{(A)} z\sigma_{xx}\, dA = c \int_{(A)} z^2 dA = cI_{yy}$
- **Συμπέρασμα:** $\boxed{\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}} z}$

Σχέση ροπής κάμψης-καμπυλότητας



- **Νόμος του Hooke:** $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$
- **Σχέση τροπής-μετατόπισης:** $\varepsilon_{xx} = \dfrac{du_x}{dx}$
- **Γραμμική κατονομή τάσεων:** $\sigma_{xx} = cz \quad , \quad c = \dfrac{M_y}{I_{yy}}$
- **1° συμπέρασμα:** $\dfrac{du_x}{dx} = \varepsilon_{xx} = \dfrac{\sigma_{xx}}{E} = c\dfrac{1}{E}z$
- **σχέση τροπών καμπυλότητας:** $\dfrac{du_x}{z} = \dfrac{dx}{R} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \dfrac{du_x}{dx} = \dfrac{1}{R}z$
- **2° συμπέρασμα:** $c\dfrac{1}{E}z = \dfrac{1}{R}z \Rightarrow c = \dfrac{E}{R}$
- **Απαλοιφή του c :** $c = \dfrac{M_y}{I_{yy}} = \dfrac{E}{R} \Rightarrow \boxed{M_y = (EI_{yy})\left(\dfrac{1}{R}\right)}$

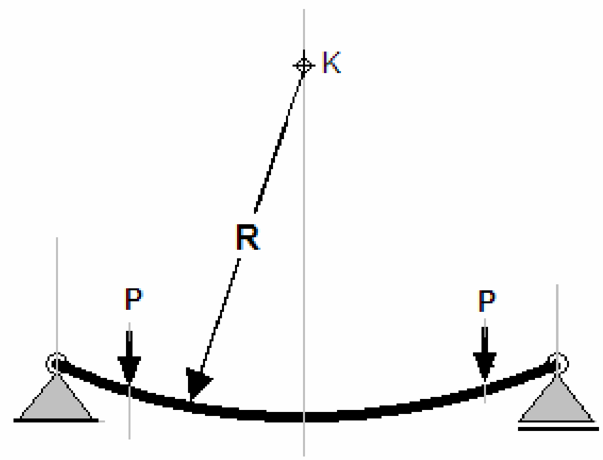
Ακρότατες τάσεις και καμπυλότητα



$$\sigma_b = \frac{M_y}{W_\pm} \quad (M_y > 0)$$

$$W_+ = \frac{I_{yy}}{z_{max}} \quad , \quad W_- = \frac{I_{yy}}{|z_{min}|}$$

W : ροπή αντίστασης

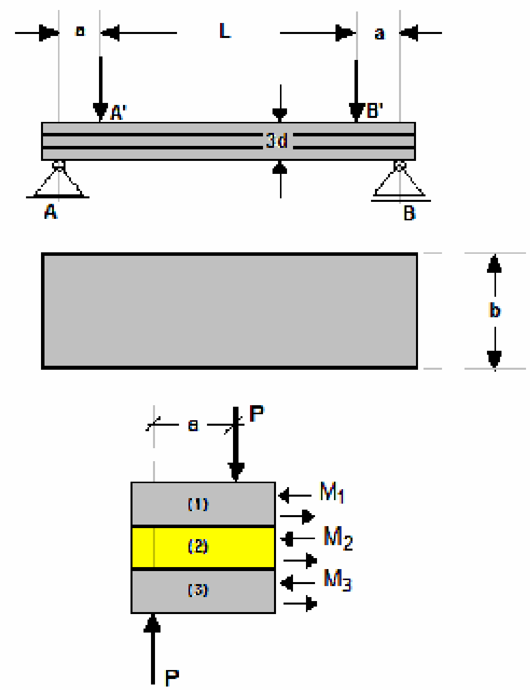


$$M_y = (EI_{yy})\kappa \quad , \quad \kappa = 1/R$$

Άσκηση

Αμφιέρειστη δοκός αποτελείται από τρία ξύλινα μαδέρια ορθογωνικής διατομής, διαστάσεων $b x d = 15.cm \, x \, 5.cm$, έκαστο. Δίδεται το μέτρο ελαστικότητας του ξύλου $E = 10.\,GPa$ και η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi} = 10.\,MPa$. Η δοκός κάμπτεται κάτω από την επίδραση δύο φορτίων έντασης P, συμμετρικά τοποθετημένων ώς προς το μέσον της δοκού. Το καθαρό άνοιγμα ματαξύ των φορτίων είναι $L = 3.0\,m$ ενώ η απόστασή τους από τις στηρίξεις είναι $a = 0.5\,m$. Να υπολογισθεί η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή $P_{\varepsilon\pi}$ για τα φορτία αυτά καθώς και το αντίστοιχο μέγιστο βέλος κάμψης της δοκού μεταξύ των σημείων εφαρμογής των φορτίων.

Λύση



Δεχόμαστε ότι οι ακτίνες καμπυλότητας των τριών τεμαχίων είναι κατά προσέγγιση ίσες,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R-d} \quad , \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \quad , \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R+d}$$

$$\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_3} \approx \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \qquad (d << R)$$

Επειδή τα τεμάχια έχουν τις ίδιες διαστάσεις, συμπεραίνουμε ότι κάθε ένα τεμάχιο παραλαμβάνει την αυτή ροπή κάμψης

$$M_1 = M_2 = M_3 = (EI)\left(\frac{1}{R}\right)$$

Το άθροισμα των επιμέρους ροπών κάμψης πρέπει να εξισορροπεί τη ροπή του επιβαλόμενυ ζεύγους,

$$\sum_{i=1}^{3} M_i = Pa$$

Για την τιμή $P = P_{\varepsilon\pi}$, οι τάσεις που προκαλούνται σε κάθε ένα τεμάχιο λόγω κάμψης πρέπει να ισούνται με τις επιτρεπόμενες τάσεις, άρα

$$\sigma_b = \frac{M_i}{W_i} \quad , \quad \sigma_b = \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \Rightarrow \quad M_i = \sigma_{\varepsilon\pi}\frac{bd^2}{6}$$

Άρα

$$P_{\varepsilon\pi}a = 3\cdot\sigma_{\varepsilon\pi}\frac{bd^2}{6} \quad \Rightarrow \quad P_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}\sigma_{\varepsilon\pi}\frac{bd^2}{a}$$

Παρατηρούμε ότι άν ο φορέας αποτελούνταν από ένα τεμάχιο διαστάσεων bx3d**, τότε θα είχαμε αντιστοίχως**

$$\sigma_b = \frac{M}{W} \quad , \quad \sigma_b = \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \Rightarrow \quad M = \sigma_{\varepsilon\pi}\frac{b(3d)^2}{6}$$

που σημαίνει τριπλάσιο επιτρεπόμενο φορτίο

$$P_{\varepsilon\pi,o\lambda}a = \sigma_{\varepsilon\pi}\frac{b9d^2}{6} \quad \Rightarrow \quad P_{\varepsilon\pi,o\lambda} = \frac{3}{2}\sigma_{\varepsilon\pi}\frac{bd^2}{a}$$

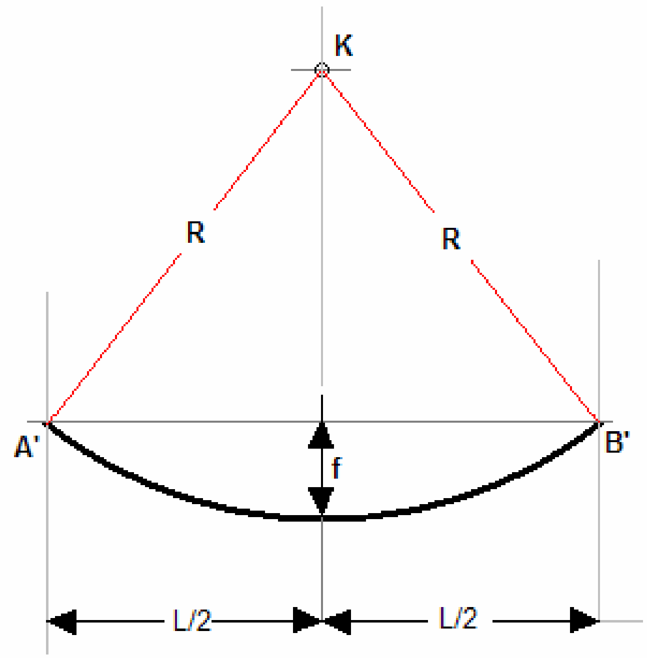
Το μέγιστο βέλος κάμψης είναι

$$f = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$= R\left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L/2}{R}\right)^2}\right\}$$

$$\approx R\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L/2}{R}\right)^2\right)\right\} \approx \frac{L^2}{8}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$M_i = (EI_i)\left(\frac{1}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{Pa/3}{E\dfrac{bd^3}{12}}$$



Άρα: $\boxed{f = \frac{1}{2}\frac{P_{\varepsilon\pi}aL^2}{Ebd^3}}$

Αντιστοίχως για τον ολόσωμο φορέα το μέγιστο βέλος κάμψης θα ήταν 3 φορές μικρότερο,

$$M = (EI)\left(\frac{1}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{P_{\varepsilon\pi,o\lambda}\,a}{E\dfrac{b(3d)^3}{12}} \quad \Rightarrow \quad f_{o\lambda} \approx \frac{L^2}{8}\,\frac{12}{27}\,\frac{3P_{\varepsilon\pi}a}{Ebd^3} = \frac{1}{6}\frac{P_{\varepsilon\pi}aL^2}{Ebd^3}$$

Αντιστοίχως για τον ολόσωμο φορέα το μέγιστο βέλος κάμψης θα ήταν 3 φορές μικρότερο,

$$M = (EI)\left(\frac{1}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{P_{\varepsilon\pi,o\lambda}\, a}{E\dfrac{b(3d)^3}{12}}$$

$$\Rightarrow \quad f_{o\lambda} \approx \frac{L^2}{8}\frac{12}{27}\frac{3P_{\varepsilon\pi}a}{Ebd^3} = \frac{1}{6}\frac{P_{\varepsilon\pi}aL^2}{Ebd^3}$$

Αριθμητικό παράδειγμα

a	0.5	m
L	3	m
b	0.15	m
d	0.05	m
σεπ	10000	kPa
E	10000000	kPa
Pεπ	**3.75**	**kN**
Pεπ,ολ	11.25	kN
f	**0.045**	m
foλ	0.015	m