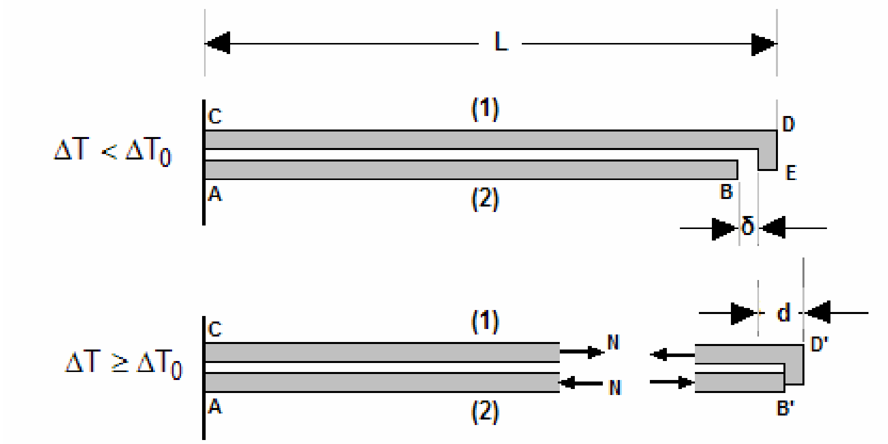
Εξέταση Μηχανικής ΙΙ, 14-7-03
Σχολή Πολ. Μηχ., Εξ. Διδ. 2
Ι. Βαρδουλάκης, Ε.Ν. Θεοτόκογλου και Ε. Αναστασέλου Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Λύσεις

Θέμα 1:

- Ι. Βαρδουλάκη, *Τεχνική Μηχανική ΙΙ*:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta T} \qquad \text{σελ. (15)}$$



1. Πριν την επαφή $\Delta T \leq \Delta T_0$ οι αξονικές τάσεις είναι μηδέν, οπότε για τη ραύδο (2): $(AB) = L$, έχουμε ότι η επαφή θα συμβεί όταν:

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{L} = \alpha\Delta T_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_0 = \frac{\delta}{L}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1000}\frac{1}{10^{-5}\,{}^\circ C^{-1}} = 100.{}^\circ C$$

2. Μετά την επαφή η διαστολή της ραύδου (2) εμποδίζεται και ως εκ τούτου αναπτύσσεται θλιπτική αξονική δύναμη $N_2 < 0$, ενώ η ραύδος (1) εφελκύεται και ως εκ τούτου αναπτύσσεται εφελκυστική αξονική δύναμη $N_1 > 0$. Η ισσορροπία επιτάσσει όπως,

$$N_1 = -N_2 = N$$

Οπότε:

(1): $$\varepsilon_1 = \frac{d}{L} = \frac{N}{EA}$$

(2): $\varepsilon_2 = \dfrac{\delta + d}{L} = \varepsilon_0 - \dfrac{N}{EA} + \alpha\Delta T_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{L} = -\dfrac{N}{EA} + \alpha\Delta T_1$

Αρα,

$$d = \frac{NL}{EA} = -\frac{NL}{EA} + \alpha\Delta T_1 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{2}EA\alpha\Delta T$$

Η τάση εφελκυσμού της ραύδου (1) είναι

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} = \frac{1}{2}E\alpha\Delta T_1$$

$$\sigma_2 = -\frac{N}{A} = -\frac{1}{2}E\alpha\Delta T_1$$

3. Θραύση της ραύδου αυτής θα συμβεί όταν

$$\sigma_1 = \sigma_{\varepsilon\phi}$$

Αρα,

$$\sigma_{\varepsilon\phi} = \frac{\sigma_{\theta\lambda}}{10} = \frac{1}{2}E\alpha\Delta T_{1,\theta\rho} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_{1,\theta\rho} = 2\frac{1}{10}\frac{\sigma_{\theta\lambda}}{E}\frac{1}{\alpha} = 2\frac{1}{10}10^{-3}\frac{1}{10^{-5}{}^\circ C} = 20.{}^\circ C$$

Το σύστημα αστοχεί όταν η θερμοκρασία της ραύδου (2) ανέλθει στους 120°.

Θέμα 2.

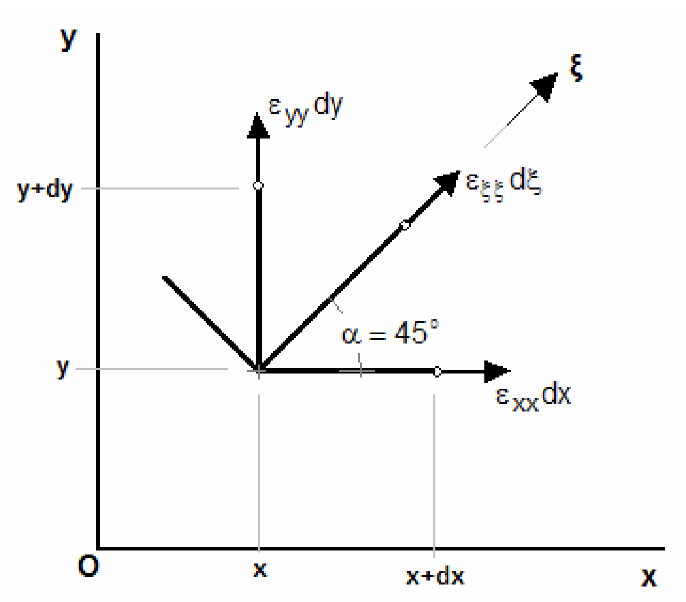
- Ι. Βαρδουλάκη, *Τεχνική Μηχανική ΙΙ*:

$$\boxed{\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)\cos 2\alpha + \varepsilon_{xy}\sin 2\alpha}$$ σελ. (63)

$$\varepsilon_{1/2} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_{1/2} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}$$

σελ.(65)



$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\alpha} = 0$$

Δεδομένα: $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\gamma} = 3 \cdot 10^{-4}$

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{\beta} = 10^{-4} \quad , \quad \alpha = 45°$$

1. Υπολογισμός των συνιστουσών του τανυστή των τάσεων των τροπών στο σύστημα $O(x, y)$:

$$10^{-4} = \frac{1}{2}\left(0 + 3 \cdot 10^{-4}\right) + \frac{1}{2}\left(0 - 3 \cdot 10^{-4}\right)\cos 90° + \varepsilon_{xy}\sin 90° \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{xy} = (1 - 1.5) \cdot 10^{-4} = -0.5 \cdot 10^{-4}$$

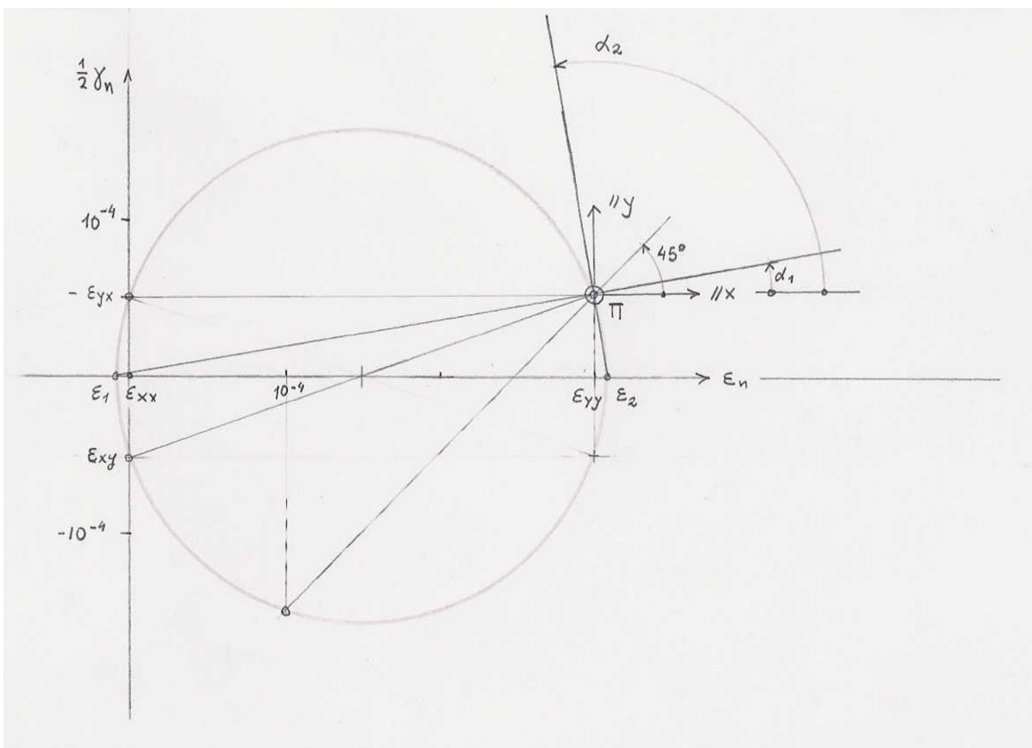
$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0. & -0.5\\ -0.5 & 3.\end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

Οι κύριες τροπές δίδονται από τον τύπο,

$$\varepsilon_{1/2}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2+\varepsilon_{xy}^2}=\frac{1}{2}\left(0+3\cdot 10^{-4}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{0-3\cdot 10^{-4}}{2}\right)^2+\left(-0.5\cdot 10^{-4}\right)^2}$$

$$=1.5\cdot 10^{-4}\pm 10^{-4}\sqrt{1.5^2+0.5^2}=\begin{cases}\left(1.5+\sqrt{2.5}\right)\cdot 10^{-4}\\ \left(1.5-\sqrt{2.5}\right)\cdot 10^{-4}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1.5+1.581)\cdot 10^{-4}=3.081\cdot 10^{-4}\\ (1.5-1.581)\cdot 10^{-4}=-0.081\cdot 10^{-4}\end{cases}$$



Σημειωτέον ότι οι κύριες κατευθύνσεις υπολογίζονται από τη σχέση

$$\tan 2\alpha_{1/2}=\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}=\frac{2\cdot(-0.5\cdot 10^{-4})}{0-3\cdot 10^{-4}}=\frac{1}{3}=\tan(18.43^\circ)\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=9.2^\circ\\ \alpha_2=99.2^\circ\end{cases}$$

Σε σύστημα κ.α. ο τανυστής των τροπών περιγράφεται από τον εξής πίνακα:

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.081 & 0\\ 0 & -0.081\end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

Η εντατική κατάσταση στη λεπτή πλάκα θεωρείται επίπεδη, οπότε οι σχέσεις τροπών τάσεων είναι:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}(\sigma_1-\nu\sigma_2)\quad\Rightarrow\quad \sigma_1-\nu\sigma_2=E\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}(\sigma_2-\nu\sigma_1)\quad\Rightarrow\quad -\nu\sigma_1+\sigma_2=E\varepsilon_2$$

οπότε:
$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)\\ \sigma_2&=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1)\end{aligned}}$$

<u>Δεδομένα:</u>

$E=200.\,\mathrm{GPa}$, $\nu=0.3$

Αρα:

$$\sigma_1=\frac{200.\mathrm{GPa}}{1-0.3^2}\left(3.081+0.3\cdot(-0.081)\right)\cdot 10^{-4}$$

$$=\frac{20.\mathrm{MPa}}{0.91}(3.081-0.024)=21.97\cdot 3.057\ \mathrm{MPa}=67.18\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{200.\mathrm{GPa}}{1-0.3^2}\left(-0.081+0.3\cdot 3.081\right)\cdot 10^{-4}$$

$$=\frac{20.\mathrm{MPa}}{0.91}(-0.081+0.924)=21.97\cdot 0.843\ \mathrm{MPa}=18.53\ \mathrm{MPa}$$

Στο κοινό σύστημα κ.α. ο τανυστής των τάσεων περιγράφεται από τον εξής πίνακα:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}67.18 & 0\\ 0 & 18.53\end{bmatrix}\mathrm{MPa}$$

2. Καθέτως προς το επίπεδο της πλάκας η τροπή δίδεται από τον τύπο,

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)$$

$$= -\frac{0.3}{200.\cdot 10^3\,\mathrm{MPa}}\left(67.18 + 18.53\right)\mathrm{MPa} = -0.3 * \frac{85.71}{200}\cdot 10^{-3} = -1.286\cdot 10^{-4}$$

Οπότε η μεταβολή του πάχους της πλάκας είναι:

$$\Delta t = t\cdot\varepsilon_{zz}$$

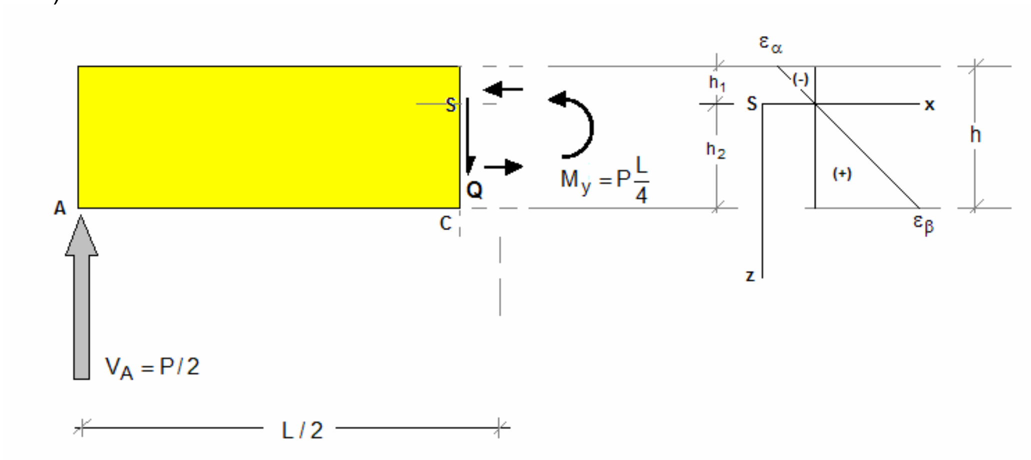
Με

$$t = 1.\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 10.\,\mathrm{mm}\cdot(-1.2\cdot 10^{-4}) = -.1.2\cdot 10^{-3}\mathrm{mm} = -1.2\mu\mathrm{m}$$

δηλαδή έχουμε μείωση του πάχους της πλάκας κατά $1.2\mu\mathrm{m}$.

Θέμα 3.

Στη προκείμενη περίπτωση δεν αναπτύσσονται αξονικές δυνάμεις πάνω στη διατομή, οπότε η ουδέτερη γραμμή είναι ο κεντροβαρικός άξονας Sy, κάθετα στο επίπεδο του σχήματος (πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη, Τεχνική Μηχανική ΙΙ, σελ. 116).



1. Οι αποστάσεις της ουδέτερης γραμμής από το πάνω και το κάτω άκρο της διατομής έστω αντιστοίχως h_1 και h_2:

$$h_1 + h_2 = h$$

$$\frac{h_1}{|\varepsilon_\alpha|} = \frac{h_2}{|\varepsilon_\beta|}$$

Δεδομένα:

$h = 14.\ \text{cm}$, $\varepsilon_\alpha = -0.95 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_\beta = 2.55 \cdot 10^{-4}$

Αρα:

$$\lambda = \frac{h_2}{h_1} = \frac{2.55}{0.95} = 2.684$$

$$h_1 + \lambda h_1 = h \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{1}{1+\lambda} h \quad , \quad h_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda} h$$

- $h_1 = 0.2714 h = 3.8\ \text{cm}$
- $h_2 = 0.7286 h = 10.2\ \text{cm}$

Προσδιορισμός της ροπής αδρανείας της διατομής:

$$\boxed{\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}} z} \text{ (σελ. 133)} \quad \Rightarrow \quad I_{yy} = M_y \frac{z}{\sigma_{xx}}$$

όπου

$$M_y = P\frac{L}{4}$$

και

α) $\sigma_{xx} = \sigma_\alpha = E\varepsilon_\alpha \quad , \quad z_\alpha = -h_1$

ή

β) $\sigma_{xx} = \sigma_\beta = E\varepsilon_\beta \quad , \quad z_\alpha = +h_2$

Αρα

$$I_{yy} = P\frac{L}{4}\frac{h_1}{E\varepsilon_\alpha} = P\frac{L}{4}\frac{h_2}{E\varepsilon_\beta}$$

Δεδομένα:

$p = 2.2\,\text{kN} \quad , \quad E = 200.\,\text{GPa} \quad , \quad L/2 = 3.\,\text{m}$

Αρα,

$$I_{yy} = 2.2\text{kN}\frac{6.\,\text{m}}{4}\frac{3.8\cdot 10^{-2}\text{m}}{200.\cdot 10^{6}\text{kN/m}^2\cdot 0.95\cdot 10^{-4}} = 6.60\cdot 10^{-6}\text{m}^4 = 6.60\cdot 10^{-10}(100.\text{cm})^4$$

$$= 660.\,\text{cm}^4$$

2. Μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο:

$$\sigma_\alpha = \frac{P_{\varepsilon\pi}L/4}{I_{yy}/h_2} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \quad \Rightarrow \quad P_{\varepsilon\pi} \le 4\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}\frac{I_{yy}}{Lh_2}$$

$$\sigma_\beta = \frac{P_{\varepsilon\pi}L/4}{I_{yy}/h_1} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\phi} \quad \Rightarrow \quad P_{\varepsilon\pi} \le 4\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\phi}\frac{I_{yy}}{Lh_1}$$

Με δεδομένο ότι η αντοή σε θλίψη και σε εφελκυσμό ταυτίζονται και ότι

$$h_1 < h_2$$

έπεται ότι κρίσιμη είναι η πρώτη από τις απαραπανω ανισότητες,

$$P_{max} = 4\sigma_{\varepsilon\pi}\frac{I_{yy}}{Lh_2} \quad \Rightarrow$$

$$P_{max} = 4.\cdot 120.MPa\frac{660.cm^4}{600.cm\cdot 10.2cm} = 480.\frac{MN}{(100cm)^2}\cdot 0.1078\,(10^{-2}cm)^2$$

$$= 51.76\cdot 10^{-4}MN = 5.176\,kN$$