

1. (3.5 μον.) Έστω η εξίσωση $(0.95 + 0.1a)xe^{-x} + x - 1 = 0$, όπου a το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

(i) Επιλέξτε κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο της μορφής $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (όχι τη μέθοδο Newton-Raphson) για την προσέγγιση της μοναδικής ρίζας της εξίσωσης στο διάστημα $[0, 1]$. Για την ακολουθία που παράγεται με τη μέθοδο που επιλέξατε, να δείξετε ότι συγκλίνει, για κάθε $x_0 \in [0, 1]$, στη μοναδική ρίζα της εξίσωσης στο $[0, 1]$. (1.5 μον.)

(ii) Να γίνουν 3 επαναλήψεις (δηλ. να βρεθούν τα x_1, x_2, x_3) $x_{n+1} = g(x_n)$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.5$ και να γίνει εκ των υστέρων εκτίμηση σφάλματος για την επανάληψη x_3 . Όλες οι στρογγυλοποιήσεις να γίνονται στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο. (1.5 μον.)

Δίνεται ο τύπος της εκ των υστέρων εκτίμησης σφάλματος στην επανάληψη $n \geq 1$,

$$|x_n - x_*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

(iii) Να γραφεί ο αναδρομικός τύπος της μεθόδου Newton-Raphson για την εύρεση ριζών της εξίσωσης $(0.95 + 0.1a)xe^{-x} + x - 1 = 0$. (0.5 μον.)

2. (2 μον.) Να εφαρμόσετε την άμεση μέθοδο Euler και να υπολογίσετε προσεγγίσεις της λύσης $u(t)$ στα σημεία $t_k = \frac{k}{4}$, $k = 0, 1, 2$ για το πιο κάτω πρόβλημα αρχικών τιμών, όπου a το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Όλες οι στρογγυλοποιήσεις να γίνονται στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο.

$$\begin{cases} u'' + (0.95 + 0.1a)u = 5t \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}$$

3. (2.5 μον.) Έστω γραμμικό σύστημα $Ax = b$ με $A = \begin{bmatrix} 2+a & -1 & 0 \\ -1 & 4+a & -1 \\ 0 & -1 & 2+a \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, και a το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

(i) Μπορεί να λυθεί το σύστημα με χρήση παραγοντοποίησης Cholesky? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να βρεθεί ο πίνακας L της παραγοντοποίησης Cholesky. (2 μον.)

(ii) Θα συγκλίνει η μέθοδος Gauss-Seidel για την επίλυση του πιο πάνω συστήματος? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (0.5 μον.)

4. (2 μον.) Έστω η συνάρτηση $f(x) = xe^{-(0.95+0.1a)x}$ στο διάστημα $[0, 4]$, όπου a το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Έστω $p_3(x) = \sum_{n=0}^3 \ell_n(x)f(x_n)$ το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα σημεία $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$ για την προσέγγιση της $f(x)$ στο διάστημα $[0, 4]$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^4 (f(x) - p_3(x))dx$ με χρήση του απλού κανόνα Simpson. Όλες οι στρογγυλοποιήσεις να γίνονται στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο.

Διάρκεια εξέτασης 2h – ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!