

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ακαδημαϊκό Έτος 2025-26, 19 Ιανουαρίου 2026

Θέμα 1* α. (1 μον) Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 1$, να δείχθει ότι υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε να ισχύει

$$a_n > \frac{n^2}{3}, \quad \forall n \geq n_0.$$

β. (1 μον) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x}.$$

Να οριστεί η τιμή $f(2)$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στον $\mathbb{R}$.

Θέμα 2* (1 μον) Έστω η συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, που είναι τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

Αν $|f'''(x)| \leq 6$, για κάθε $x \in [-1, 1]$, τότε να δείχθει ότι

$$|f(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Θέμα 3* (2 μον) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx, \quad \int_0^\pi \frac{d\varphi}{3+2\cos\varphi}.$$

Θέμα 4* α. (1 μον) Δίνεται ο 3×3 πίνακας $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρείτε το χαρα-

κτηριστικό του πολυώνυμο $X_B(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του. Ο πίνακας B αντιστρέφεται; (δικαιολόγηση). Ο πίνακας B διαγωνοποιείται; (δικαιολόγηση). Αν ναι, να δώσετε μία διαγωνοποίησή του (χωρίς να υπολογίσετε τον αντίστροφο του P) και μία μορφή της δύναμης B^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

β. (1 μον) Να λυθεί το επόμενο γραμμικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a :

$$\begin{cases} x + ay + (a-1)z = 0 \\ 3x + 2y + az = 3 \\ (a-1)x + ay + (a+1)z = a \end{cases}$$

Θέμα 5* α. (1 μον) Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των οριζουσών, να υπολογίσετε την ορίζουσα του

πίνακα A σε παραγοντοποιημένη μορφή και στη συνέχεια να βρείτε για ποιες τιμές των παραμέτρων $a, b, c \in \mathbb{R}$ ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. (Σε κάθε βήμα να σημειώσετε ποια ιδιότητα χρησιμοποιήσατε).

β. (0.5) Να εξετάσετε για ποιες τιμές της μεταβλητής $k \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $u = \begin{bmatrix} k \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-k \\ 2 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -k \end{bmatrix}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 6° α. (0.75) Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A με συντεταγμένες $(-1, 2, 1)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(3, -3, 4)$. Στην συνέχεια να γραφεί η εξίσωση της ευθείας σε συμμετρική μορφή.

β. (0.75) Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 0, -2)$ και $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Να βρεθεί το εξωτερικό τους γινόμενο $\vec{u} \times \vec{v}$ και στην συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο B με συντεταγμένες $(4, -1, 1)$ και το διάνυσμα $\vec{u} \times \vec{v}$ να είναι κάθετο στο επίπεδο.

Διάρκεια Εξέταση 2.5 ώρες. Καλή Επιτυχία