

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ
ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

Η εξεταστέα Ύλη για τις εξετάσεις Ιουνίου 2025 είναι αυτή που περιέχεται στα **Κεφάλαια 1-10 μέχρι και την παράγραφο 10.2 των Σημειώσεων**. Το **Κεφάλαιο 6 των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων είναι ΕΚΤΟΣ**.

Παρακάτω αναφέρονται οι Παράγραφοι και οι Ασκήσεις των Φυλλαδίων όπου πρέπει να δώσετε περισσότερη προσοχή (εννοείται ότι εκτός των Ασκήσεων των Φυλλαδίων θα κοιτάξετε πολύ καλά και τα Παραδείγματα των προτεινόμενων παραγράφων) :

1. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: 1.4 (Όριο βαθμωτής συνάρτησης). Από Φυλ.1: Ασκήσεις 1-5α, 7.
2. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Όλες οι παράγραφοι εκτός της 2.4. Από Φυλ. 2 : Ασκήσεις 1,2,4,6.
3. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: 3.3 (Κανόνας Αλυσίδας). Από Φυλ. 3: Ασκήσεις 1, 3
4. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: 4.1.1, 4.1.2, 4.3.4, 4.3.5 (στην 4.3.5 μόνο οι περιπτώσεις $n = 1$ και $n = 2$) Από Φυλ. 3: Ασκήσεις 5, 7, 9, 11 και από Φυλ. 4: Ασκήσεις 1,2,3
5. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Όλες οι παράγραφοι. Από Φυλ. 4 Ασκήσεις 5-10, από Φυλ. 5 Ασκησι 1.
6. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΚΤΟΣ.
7. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Όλες οι παράγραφοι. Από Φυλ. 6 Ασκήσεις όλες 1-10.
8. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: Όλες οι παράγραφοι. Από Φυλ. 7 Ασκήσεις 1,2, 5,6, 9,10,12.
9. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: Όλες οι παράγραφοι
10. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: 10.1, 10.2 (Η 10.3 είναι ΕΚΤΟΣ).

Οι τύποι (9.1.3), (9.2.3) των επικαμπυλίων α' και β' ειδους και ο (10.1.1.) στο Θεώρημα Green θα δίνονται. Η εξέταση δεν θα περιέχει αποδείξεις προτάσεων αλλά μπορεί να περιέχει Ερωτήσεις τύπου Σωστό-Λάθος με διακιολόγηση.

Δεν θα αναρτηθεί άλλο Φυλλάδιο Ασκήσεων (για τα Επικαμπύλια και το Θεώρημα Green κοιτάζτε καλά τα Παραδείγματα των Σημειώσεων).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Μαθηματική Ανάλυση II

Λογισμός Πολλών Μεταβλητών

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – 2025

Περιεχόμενα

1	Βασικές Έννοιες	1
1.1	Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$	1
1.1.1	Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$	1
1.1.2	Το σύνθητες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$	1
1.1.3	Η Ευκλείδεια νόρμα και απόσταση στον $\mathbb{R}^n$	2
1.2	Η Τοπολογία του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$	3
1.2.1	Βασικές περιοχές σημείων στον $\mathbb{R}^n$	3
1.2.2	Χαρακτηρισμοί σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$	4
1.3	Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	7
1.3.1	Ταξινόμηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών	7
1.3.2	Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις.	8
1.4	Όριο βαθμωτής συνάρτησης	9
1.5	Όριο γενικής συνάρτησης	11
1.6	Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών	12
2	Παραγωγήση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών	13
2.1	Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης	13
2.2	Κατευθυνόμενες παράγωγοι	15
2.3	Κλίση και Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών	16
2.4	Εφαπτόμενο επίπεδο	19
2.5	Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνσης παραγώγου	19
2.6	Σχέση παραγώγου και μερικών παραγώγων	22
3	Παραγωγήση γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών	25
3.1	Παραγωγήση πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών	25
3.1.1	Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης	25
3.1.2	Παράγωγος κατά κατεύθυνση	26
3.1.3	Κλίση, παράγωγος και διαφορικό πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών	26
3.1.4	Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγου	28
3.1.5	Συνεχώς παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	28
3.1.6	Εφαπτόμενο υπερεπίπεδο γραφήματος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών	30
3.2	Παραγωγήση διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών	30
3.3	Κανόνας αλυσίδας	32

4	Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης	37
4.1	Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης για συναρτήσεις δύο μεταβλητών	37
4.1.1	Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης	37
4.1.2	Συμμετρία των μεικτών παραγώγων δεύτερης τάξης	38
4.1.3	Μερικές παράγωγοι τρίτης και μεγαλύτερης τάξης	39
4.2	Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	40
4.2.1	Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης	40
4.2.2	Συμμετρία των μεικτών παραγώγων δεύτερης τάξης	41
4.2.3	Μερικές παράγωγοι τρίτης και μεγαλύτερης τάξης	41
4.3	Πολυώνυμα Taylor	42
4.3.1	Σύντομη επανάληψη για συναρτήσεις μιας μεταβλητής	42
4.3.2	Πολυώνυμα και Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών . . .	44
4.3.3	Τύπος Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών	46
4.3.4	Οι περιπτώσεις $n = 0$ και $n = 1$ του Τύπου Taylor	47
4.3.5	Δεύτερο Θεώρημα Taylor	48
5	Τοπικά ακρότατα	51
5.1	Τοπικά ακρότατα και Κρίσιμα σημεία	51
5.2	Το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για συναρτήσεις δυο μεταβλητών	54
5.3	Τοπικά Ακρότατα υπό συνθήκη, η μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange	58
5.3.1	Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με επίλυση της συνθήκης	62
5.3.2	Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με παραμετρικοποίηση της συνθήκης	64
5.3.3	Ακρότατα σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με εσωτερικό	64
6	Πεπλεγμένες συναρτήσεις	67
6.1	Πεπλεγμένες συναρτήσεις δύο μεταβλητών	67
6.2	Πεπλεγμένες συναρτήσεις τριών μεταβλητών	71
7	Διπλό ολοκλήρωμα	75
7.1	Ολοκλήρωση σε ορθογώνια	75
7.2	Ολοκλήρωση σε γενικότερα χωρία	78
7.3	Ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες	81
7.4	Εμβαδά και όγκοι μέσω διπλών ολοκληρωμάτων	83
7.4.1	Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων χωρίων	83
7.4.2	Υπολογισμός όγκων με διπλά ολοκληρώματα	84
8	Τριπλό Ολοκλήρωμα	87
8.1	Ολοκλήρωση σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	87
8.2	Ολοκλήρωση σε γενικότερα χωρία	89
8.3	Ολοκλήρωση σε Κυλινδρικές συντεταγμένες	91
8.4	Ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες	93
9	Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα	95
9.1	Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους	95
9.2	Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους	99
9.3	Συντηρητικά πεδία	104

10 Ολοκληρωτικά θεώρηματα της διανυσματικής ανάλυσης	107
10.1 Το Θεώρημα Green	107
10.2 Εμβαδό με χρήση επικαμπυλίου ολοκληρώματος	110
10.3 Στροβιλισμός και απόκλιση	111
10.3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες	111
10.3.2 Το Θεώρημα Green με χρήση του στροβιλισμού	112
10.3.3 Το Θεώρημα Green με χρήση της απόκλισης	113

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Έννοιες

1.1 Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Ορίζουμε

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n\}$$

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ αποτελούν τη λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

1.1.2 Το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ καλείται το *σύννηθες εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$* . Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ και άρα $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

$$(3) \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}.$$

$$(4) (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ τότε λέμε ότι τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι *ορθογώνια*. Παρατηρήστε ότι $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$, δηλαδή οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια.

1.1.3 Η Ευκλείδεια νόρμα και απόσταση στον $\mathbb{R}^n$

Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το *μέτρο* (ή *νόρμα*) του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Κατ' αναλογία προς την ιδιότητα $|x| = \sqrt{x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Πρόταση 1.1.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|,$$

ή ισοδύναμα

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

για κάθε $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_d \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Η ανισότητα ισχύει (με ισότητα) αν $\mathbf{x} = 0$ ή $\mathbf{y} = 0$. Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $\mathbf{x} \neq 0$ και $\mathbf{y} \neq 0$. Θέτουμε $\mathbf{w} = \|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} &= (\|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}) \cdot (\|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \end{aligned}$$

και άρα

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\mathbf{w}' = \|\mathbf{y}\|\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$ καταλήγουμε στο ότι

$$-\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Άρα,

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

□

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες που είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{R}$:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Απόδειξη της Ιδιότητας 3 :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| &\Leftrightarrow (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|)^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \\
 &\Leftrightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
 &\Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|
 \end{aligned}$$

που ισχύει από την ανισότητα Cauchy–Schwarz. □

Τέλος, όπως στο $\mathbb{R}$ η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, η ποσότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

ορίζεται να είναι η απόσταση των $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$. Παρατηρήστε ότι

1. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ και
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$.

1.2 Η Τοπολογία του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Βασικές περιοχές σημείων στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$$

καλείται **ανοικτή μπάλα** του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ε . Με άλλα λόγια, η ανοικτή μπάλα $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν από το $\mathbf{x}_0$ απόσταση γνήσια μικρότερη από ε . Οι ανοικτές μπάλες $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ λέγονται και **βασικές ανοικτές περιοχές** του $\mathbf{x}_0$. Το σύνολο

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon\}$$

καλείται **κλειστή μπάλα** του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ε . Τέλος, το σύνολο

$$S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$$

καλείται **σφαίρα** του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ε . Είναι φανερό ότι

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cup S_\varepsilon(\mathbf{x}_0).$$

1.2.2 Χαρακτηρισμοί σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$

Δίνουμε παρακάτω κάποιους χαρακτηρισμούς σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.2.1. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Το σημείο $\mathbf{x}$ καλείται

(1) **απομονωμένο σημείο του X** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$. Ισοδύναμα, $\mathbf{x} \in X$ και η απόσταση κάθε άλλου σημείου του X από το $\mathbf{x}$ είναι τουλάχιστον δ .

(2) **σημείο συσσώρευσης του X** αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και $\mathbf{y} \in X \cap B_\delta(\mathbf{x})$. Ισοδύναμα, οσοδήποτε κοντά στο $\mathbf{x}$ υπάρχει σημείο του X διαφορετικό από το $\mathbf{x}$.

Πρόταση 1.2.2. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ ένα ακριβώς από τα επόμενα ισχύει:

(α) Το $\mathbf{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης του X .

(β) Το $\mathbf{x}$ είναι απομονωμένο σημείο του X .

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in X$. Το $\mathbf{x}$ είτε είναι σημείο συσσώρευσης του X είτε όχι. Αν δεν είναι τότε εξ ορισμού θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε δεν υπάρχει κανένα $\mathbf{y} \in X$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$. Άρα $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$ και το $\mathbf{x}$ είναι απομονωμένο σημείο του X . $\square$

Ορισμός 1.2.3. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Το σημείο $\mathbf{x}$ καλείται

(1) **εσωτερικό σημείο του X** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$. Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του X καλείται **εσωτερικό** του X και συμβολίζεται με $\text{Int}(X)$.

(2) **εξωτερικό σημείο του X** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$, ισοδύναμα το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του συμπληρώματος του X . Το σύνολο όλων των εξωτερικών σημείων του X καλείται **εξωτερικό** του X και συμβολίζεται με $\text{Ext}(X)$.

(3) **συνοριακό σημείο του X** αν για κάθε $\delta > 0$ έχουμε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$ και $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$, δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X αν και μόνο αν κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}$ έχει μη κενή τομή με το X καθώς και με το συμπλήρωμα του X . Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του X καλείται **σύνορο** του X και συμβολίζεται με $\text{Bd}(X)$.

Παρατήρηση 1.2.4. Παρατηρούμε ότι $\text{Ext}(X) \subseteq X^c$ (με $X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του X) και ότι $\text{Int}(X) \subseteq X$.

Πρόταση 1.2.5. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. τα σύνολα $\text{Int}(X)$, $\text{Bd}(X)$ και $\text{Ext}(X)$ είναι ξένα ανα δύο και

$$\mathbb{R}^n = \text{Int}(X) \cup \text{Bd}(X) \cup \text{Ext}(X)$$

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Έστω και ένα $\delta > 0$. Έχουμε ότι $\mathbb{R}^n = X \cup (\mathbb{R}^n \setminus X)$ και άρα

$$\begin{aligned} B_\delta(\mathbf{x}) &= B_\delta(\mathbf{x}) \cap \mathbb{R}^n = B_\delta(\mathbf{x}) \cap (X \cup (\mathbb{R}^n \setminus X)) \\ &= (B_\delta(\mathbf{x}) \cap X) \cup (B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X)) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ένα από τα επόμενα θα ισχύει:

(α) Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) = \emptyset$. Στην περίπτωση αυτή $B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \subseteq X$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του X .

(β) Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \emptyset$. Τότε $B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι εξωτερικό σημείο του X .

(γ) Για κάθε $\delta > 0$, έχουμε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ και $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X .

Είναι φανερό ότι δεν μπορεί ένα $\mathbf{x}$ να είναι ταυτόχρονα συνοριακό και εσωτερικό (ή εξωτερικό) σημείο του X . Επίσης δεν μπορεί να συμβεί το $\mathbf{x}$ να είναι ταυτόχρονα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του X . Πράγματι αν αυτό συνέβαινε για κάποιο $\mathbf{x}$ τότε θα υπήρχαν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ με

$$B_{\delta_1}(\mathbf{x}) \subseteq X \quad \text{και} \quad B_{\delta_2}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$$

Όμως τότε αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ θα ήταν

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_{\delta_1}(\mathbf{x}) \subseteq X \quad \text{και} \quad B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_{\delta_2}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$$

οπότε

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) = \emptyset,$$

άτοπο. Άρα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ακριβώς ένα από τα (1)-(3) ισχύει. □

Πόρισμα 1.2.6. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $\text{Int}(X) \subseteq X \subseteq \text{Int}(X) \cup \text{Bd}(X)$.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 1.2.4 έχουμε ότι $\text{Int}(X) \subseteq X$ και $\text{Ext}(X) \subseteq X^c$. Από την Πρόταση 1.2.5 έχουμε

$$\begin{aligned} X &= X \cap \mathbb{R}^n = X \cap [\text{Int}(X) \cup \text{Bd}(X) \cup \text{Ext}(X)] \\ &= [X \cap (\text{Int}(X) \cup \text{Bd}(X))] \cup [X \cap \text{Ext}(X)] \\ &= X \cap [\text{Int}(X) \cup \text{Bd}(X)] \subseteq \text{Int}(X) \cup \text{Bd}(X) \end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.2.7. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) Το X καλείται **ανοικτό** αν για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του X υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$. Ισοδύναμα, αν κάθε σημείο του X είναι εσωτερικό του σημείου.

(2) Το X καλείται **κλειστό** αν το $X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ (δηλαδή το συμπλήρωμά του X) είναι ανοικτό.

(3) Το X καλείται **φραγμένο** αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|\mathbf{x}\| \leq M$ (ισοδύναμα, το X είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας $\overline{B}_M(\mathbf{0})$ με κέντρο το $\mathbf{0}$ και ακτίνα M).

(4) Το X καλείται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Πρόταση 1.2.8. Κάθε μονοσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Για να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}\}$ είναι κλειστό πρέπει να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Τότε $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και άρα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > 0$. Θέτοντας $\delta = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ έχουμε $\mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{y})$ και άρα $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Δηλαδή, για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$, άρα το $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. □

Πρόταση 1.2.9. (α) Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

(β) Αντίστοιχα, κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (α) Έστω $B = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ μια ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$. Έστω $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Θέτουμε

$$(1.2.1) \quad \delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Αφού $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ έχουμε ότι $\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \stackrel{(1.2.1)}{=} \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\mathbf{y} \in B$. Επειδή το $\mathbf{y}$ ήταν τυχόν σημείο της $B_\delta(\mathbf{x})$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Επίσης, το B είναι φραγμένο αφού για κάθε $\mathbf{x} \in B$ έχουμε

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon + \|\mathbf{x}_0\| = M.$$

(β) Έστω $C = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{x} \in C$. Τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ και άρα

$$(1.2.2) \quad \delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \varepsilon > 0.$$

Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq C$, ισοδύναμα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ για κάθε $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$$

και συνεπώς

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \delta \stackrel{(1.2.2)}{=} \varepsilon.$$

Επίσης, όπως στο (α) δείχνουμε ότι η $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη. □

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων.

Πρόταση 1.2.10. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το X είναι κλειστό.
- (2) Το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

Απόδειξη. (1) $\implies$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω $\mathbf{x}$ σημείο συσσώρευσης του X . Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\mathbf{x} \notin X$. Τότε, $\mathbf{x} \in X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ και επειδή το X^c είναι ανοικτό θα υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$. Αλλά τότε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \emptyset$, άτοπο από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

(2) $\implies$ (1): Έστω ότι το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του. Θα δείξουμε ότι το X είναι κλειστό, ισοδύναμα ότι το X^c είναι ανοικτό. Πράγματι, έστω $\mathbf{x} \in X^c$. Επειδή το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του, το $\mathbf{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X . Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε οποιοδήποτε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ δεν ανήκει στο X . Επειδή, από την υπόθεση, και το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο X , έχουμε ότι ολόκληρη η ανοικτή μπάλα $B_\delta(\mathbf{x})$ περιέχεται στο X^c , δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι όντως εσωτερικό σημείο του X^c . □

Ένας άλλος χαρακτηρισμός των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι και ο εξής.

Πρόταση 1.2.11. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το X είναι κλειστό.

$$(2) \text{ } Bd(X) \subseteq X.$$

$$(3) \text{ } X = Int(X) \cup Bd(X).$$

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $\mathbf{x} \in Bd(X)$ με $\mathbf{x} \notin X \Leftrightarrow \mathbf{x} \in X^c$. Επειδή X^c ανοικτό υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$, άτοπο αφού $\mathbf{x} \in Bd(X)$ (και άρα κάθε ανοικτή μπάλα τέμνει και το X).

(2) $\Rightarrow$ (3): Προκύπτει από το Πρόρισμα 1.2.6.

(3) $\Rightarrow$ (1): Επειδή το $Ext(X)$ είναι ανοικτό το συμπλήρωμά του $(Ext(X))^c = Int(X) \cup Bd(X) = X$ είναι κλειστό. $\square$

1.3 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Με τον όρο *συνάρτηση πολλών μεταβλητών* εννοούμε γενικά μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό (αν $m = n = 1$ τότε έχουμε την κλασική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής).

1.3.1 Ταξινόμηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) **Πραγματικές** (ή **βαθμωτές**) Είναι οι συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

$$1) \text{ } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$2) \text{ } f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \text{ όπου}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

$$3) \text{ } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$4) \text{ } f : B \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}, \text{ όπου}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική, συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη στα σημεία του χώρου, όπως π.χ. η θερμοκρασία ή η ατμοσφαιρική πίεση.

(II) **Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

$$1) \text{ } f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με τύπο } f(t) = (\cos t, \sin t).$$

$$2) \text{ } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με τύπο } f(t) = (t, t^2).$$

$$3) \text{ } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ με τύπο } f(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

$$4) \text{ } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ με τύπο } f(t) = (t, t^2, \dots, t^m).$$

Οι συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στη μορφή

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $f_1(t), \dots, f_m(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$ (δείτε την Πρόταση 1.3.2 παρακάτω).

Παρατήρηση 1.3.1. Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια m -διάστατη καμπύλη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(t) = (\cos t, \sin t)$ μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, ενώ η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t ως χρόνο, σκεφτόμαστε ότι οι συναρτήσεις $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ περιγράφουν την θέση ενός κινητού, την χρονική στιγμή t , στον χώρο $\mathbb{R}^n$.

(III) **Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$. Αν $n = m$ τότε οι συναρτήσεις αυτές καλούνται **διανυσματικά πεδία**. Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική, π.χ. έχουμε το πεδίο βαρύτητας, το πεδίο ταχύτητας ρευστού κ.λπ. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

1.3.2 Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις.

Η επόμενη πρόταση ουσιαστικά ανάγει τη μελέτη όλων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στη μελέτη των βαθμωτών συναρτήσεων.

Πρόταση 1.3.2. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m$ από το X στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Συμβολικά γράφουμε

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

και οι $f_1, \dots, f_m$ καλούνται οι **συνιστώσες συναρτήσεις** της f .

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ έστω $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ η i -προβολή του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή η συνάρτηση

$$\pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως

$$(1.3.1) \quad \mathbf{y} = (\pi_1(\mathbf{y}), \dots, \pi_m(\mathbf{y})).$$

Έστω τώρα τυχόν $\mathbf{x} \in X$. Θέτοντας $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, από την (1.3.1) έχουμε

$$(1.3.2) \quad f(\mathbf{x}) = (\pi_1(f(\mathbf{x})), \dots, \pi_m(f(\mathbf{x}))).$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $f_i = \pi_i \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεση των π_i και f , τότε $f_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x}))$ και άρα από την (1.3.2) έχουμε

$$(1.3.3) \quad f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})).$$

Μένει να δείξουμε ότι οι $f_1, \dots, f_m$ είναι η μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1.3.3). Πράγματι, αν $g_1, \dots, g_m$ είναι συναρτήσεις από το X στο $\mathbb{R}$ με

$$f(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))$$

τότε αναγκαστικά $g_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x})) = \pi_i \circ f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ και κάθε $\mathbf{x} \in X$. □

1.4 Όριο βαθμωτής συνάρτησης

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την έννοια του ορίου βαθμωτής συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Όπως θα δούμε, είναι μια απλή γενίκευση της γνωστής αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Ορισμός 1.4.1. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει όριο το L στο $\mathbf{x}_0$ και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε την επόμενη πρόταση για να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης.

Πρόταση 1.4.2 (Κανόνας παρεμβολής). Έστω $g, f, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X .

Αν $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

Ειδικότερα αν $|f(\mathbf{x})| \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = 0$, τότε $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$.

Παράδειγμα 1.4.3. Υπολογίστε το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin \left(\frac{1}{y} \right) \right)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\left| x \sin \left(\frac{1}{y} \right) \right| \leq |x|$$

Επειδή $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$ από τον Κανόνα παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin \left(\frac{1}{y} \right) \right) = 0$ □

Παράδειγμα 1.4.4. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \cdot |x| + \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \cdot |y| \leq |x| + |y|.$$

Επομένως, αν θέσουμε $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ και $h(x, y) = |x| + |y|$, τότε

$$|f(x, y)| \leq h(x, y).$$

Επιπλέον, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$. □

Το όριο της συνάρτησης οφείλει να είναι το ίδιο ανεξάρτητα με τον τρόπο που προσεγγίζουμε το x_0 . Διαφορετικά το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 1.4.5. Εξετάστε αν υπάρχει ή όχι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Απόδειξη. Αν κινούμαστε πάνω στον x -άξονα και προσεγγίζουμε το $(0, 0)$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$$

γιατί $f(x, 0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως αν προσεγγίσουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Άρα το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 1.4.6. Έστω $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$.

- (α) Να βρείτε το όριο της f στο $(0, 0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0)$.
- (β) Να βρείτε το όριο της f στο $(0, 0)$ κατά μήκος κάθε παραβολής της μορφής $y = \lambda x^2$.
- (γ) Υπάρχει το όριο της f στο $(0, 0)$;

Απόδειξη. (α) Κατά μήκος του x -άξονα έχουμε $f(x, 0) = 0$ και ομοίως κατά μήκος του y -άξονα $f(0, y) = 0$. Έστω $y = \lambda x$ με $\lambda \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \lambda x}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^3}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x}{x^2 + \lambda^2} = 0$$

Άρα το όριο είναι το μηδέν όταν προσεγγίζουμε το $(0, 0)$ κινούμενοι πάνω σε μια ευθεία.

(β) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \lambda x^2}{x^4 + \lambda^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^4}{x^4 + \lambda^2 x^4} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

και άρα το όριο εξαρτάται από τον συντελεστή λ της παραβολής.

(γ) Από το (β) το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 1.4.7. (α) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

(β) Ομοίως για το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

Απόδειξη. (α) Κατά μήκος της ευθείας $y = x$ το όριο είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Όμως, κατά μήκος της καμπύλης $y = -x + x^2$, το όριο είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x + x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1 + x) = -1.$$

Συνεπώς, το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$ δεν υπάρχει.

(β) Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να δείξουμε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ δεν υπάρχει. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι $\frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x+y} = x+y - \frac{x^2+y^2}{x+y}$ και συνεπώς αν υπήρχε το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \ell$ θα υπήρχε και το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y} = -\ell$, άτοπο από το (α). □

1.5 Όριο γενικής συνάρτησης

Η έννοια του ορίου μιας γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση της αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ορισμός 1.5.1. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f έχει όριο το $\mathbf{L}$ στο $\mathbf{x}_0$ και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στο όριο των πραγματικών συναρτήσεων που αποτελούν την ανάλυση της f . Συγκεκριμένα, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 1.5.2. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το όριο $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ υπάρχει.
- (2) Αν $f = (f_1, \dots, f_m)$ είναι η ανάλυση της f τότε το όριο $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})$ υπάρχει για όλα τα $i = 1, \dots, m$ και ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) \right).$$

1.6 Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμός 1.6.1. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$. Λέμε ότι η f είναι *συνεχής στο $\mathbf{x}_0$* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. Η f καλείται *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X .

Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, κάθε συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αυτομάτως συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του X . Συνεπώς, για να δούμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής, αρκεί να ελέγξουμε τα σημεία του X που είναι σημεία συσσώρευσής του. Ισχύει και εδώ το ανάλογο του θεωρήματος για τα όρια.

Πρόταση 1.6.2. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.
- (β) Ισχύει ότι $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στη συνέχεια των συνιστωσών συναρτήσεών της. Συγκεκριμένα, από τις Προτάσεις 1.5.2 και 1.6.2 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 1.6.3. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X . Έστω επίσης $f = (f_1, \dots, f_m)$ η ανάλυση της f . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.
- (β) Για κάθε $i = 1, \dots, m$ η $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παραγωγή πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την παραγωγή μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$ που παίρνει πραγματικές τιμές. Θα ξεκινήσουμε με τις πιο ασθενείς έννοιες παραγωγής που είναι οι λεγόμενες *μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης* ως προς x και y και οι *κατεύθυνόμενες παράγωγοι*. Κατόπιν θα ορίσουμε την πιο ισχυρή έννοια της (ολικής) *παραγωγού* μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών και θα δούμε πως σχετίζεται με τις ασθενέστερες έννοιες των μερικών και των κατά κατεύθυνση παραγώγων.

2.1 Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

Ορισμός 2.1.1. (Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται *μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0)* και συμβολίζεται με

$$f_x(x_0, y_0) \quad \acute{\eta} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Θα λέμε ότι η f είναι *μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x στο σημείο (x_0, y_0)* αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός.

Ομοίως, το όριο

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται *μερική παράγωγος ως προς y της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0)* και συμβολίζεται με

$$f_y(x_0, y_0) \quad \acute{\eta} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Θα λέμε ότι η f είναι *μερικώς παραγωγίσιμη ως προς y στο σημείο (x_0, y_0)* αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός.

Έστω $A_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων (x, y) του A στα οποία η $f_x(x, y)$ υπάρχει

και είναι πεπερασμένη. Η συνάρτηση $(x, y) \rightarrow f_x(x, y)$, $(x, y) \in A_1$ καλείται **μερική παράγωγος της f ως προς x** και συμβολίζεται με f_x ή $\frac{\partial f}{\partial x}$. Ομοίως αν $A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A στα οποία η $f_y(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη τότε η συνάρτηση $(x, y) \rightarrow f_y(x, y)$, $(x, y) \in A_2$ καλείται **μερική παράγωγος της f ως προς y** και συμβολίζεται με f_y ή $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Βρείτε τις $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$.

Έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Ομοίως

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Πρακτικά για να βρούμε την $f_x(x, y)$ μιας πραγματικής συνάρτησης $f(x, y)$ δύο μεταβλητών παραγωγίζουμε την f ως προς x θεωρώντας την μεταβλητή y ως σταθερά. Ανάλογα υπολογίζουμε και την $f_y(x, y)$.

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$. Τότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ και $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$.

Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου οι $f_x(x, y)$ και $f_y(x, y)$ δεν ορίζονται σε όλα τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 2.1.4. Έστω $f(x, y) = |x| + |y|$. Τότε οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2.1.5. Ομοίως για την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν, αφού όπως παραπάνω

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y}$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο (x_0, y_0) δεν συνεπάγεται την ύπαρξη του ορίου της f στο (x_0, y_0) .

Παράδειγμα 2.1.6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Τότε οι $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ υπάρχουν ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Πράγματι, όπως είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο (δες Παράδειγμα 1.4.5) το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Όμως

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

2.2 Κατευθυνόμενες παράγωγοι

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$$

θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 2.2.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Το όριο

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται *παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο (x_0, y_0)* και συμβολίζεται με

$$f_{\mathbf{u}}(x_0, y_0) \quad \acute{\eta} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) \quad \acute{\eta} \quad \partial_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A . Πιο συγκεκριμένα, αν

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των κατά κατεύθυνση παραγώγων μιας συνάρτησης f δεν εξασφαλίζει την συνέχεια της f .

Παράδειγμα 2.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Δείξτε ότι

- (1) Η f δεν έχει όριο στο $(0, 0)$.
- (2) Όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ υπάρχουν.

Λύση: (1) Δείτε Παράδειγμα 1.4.6.

(2) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^3 (t^2 u_1^4 + u_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(α) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$.

(β) $u_2 \neq 0$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}$.

2.3 Κλίση και Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ορισμός 2.3.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν n f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, το διάνυσμα $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ θα καλείται κλίση της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ και θα συμβολίζεται με $\nabla f(x_0, y_0)$.

Ορισμός 2.3.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A . Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Λέμε ότι n f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν n f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) και ισχύει ότι

$$(2.3.1) \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Παρατηρήσεις 2.3.3. (i) Ο Ορισμός 2.3.2 αποτελεί μια επέκταση στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών του γνωστού ορισμού της παραγωγισιμότητας συνάρτησης μιας μεταβλητής. Πράγματι αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

(ii) Η (2.3.1) γράφεται ισοδύναμα

$$(2.3.2) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

(iii) Θέτοντας $x = x_0 + h$ και $y = y_0 + k$, έχουμε και μια ακόμη ισοδύναμη μορφή της (2.3.1)

$$(2.3.3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

(iv) Αν θέσουμε $R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$ τότε έχουμε και μια τρίτη ισοδύναμη μορφή,

$$(2.3.4) \quad f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + R(\mathbf{h}) \quad \text{όπου} \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Η (2.3.4) γράφεται και ως εξής

$$(2.3.5) \quad f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|)$$

Η ύπαρξη μόνο των μερικών παραγώγων χωρίς την συνθήκη (2.3.1) δεν συνεπάγεται την παραγωγισιμότητα της f . Σχετικά έχουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και $f(0, 0) = 0$. Τότε,

- (1) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- (2) Ισχύει ότι $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.
- (3) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Απόδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y|$$

και άρα απο τον κανόνα παρεμβολής $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(2) Έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

(3) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ τότε θα έπρεπε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\|(x,y)\|} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0. \end{aligned}$$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, κατά μήκος του x -άξονα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$ ενώ κατά μήκος της $y = x$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1/2$. $\square$

Ορισμός 2.3.5. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

(1) Ο πίνακας γραμμής

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

θα καλείται **παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** και θα συμβολίζεται με $f'(\mathbf{x}_0, y_0)$.

(2) Η γραμμική απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

με τύπο

$$T(x, y) = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y$$

θα καλείται **διαφορικό της f στο σημείο (x_0, y_0)** και θα συμβολίζεται με $Df(x_0, y_0)$.

Πρόταση 2.3.6. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$(2.3.6) \quad R(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k$$

για κάθε $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ με $(x_0 + h, y_0 + k) \in A$. Τότε

$$(2.3.7) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + R(h, k).$$

Από την (2.3.1), έχουμε $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ οπότε

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R(h, k) = 0.$$

Άρα από την (2.3.7) παίρνουμε ότι

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + R(h, k)) = f(x_0, y_0)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. $\square$

2.4 Εφαπτόμενο επίπεδο

Θυμίζουμε πρώτα ότι αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ το γράφημα (συμβολίζουμε με $Gr(f)$) της f δίνεται από την σχέση

$$(2.4.1) \quad Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ και } z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . Το επίπεδο π του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$(2.4.2) \quad (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

θα καλείται **εφαπτόμενο επίπεδο** της f στο σημείο (x_0, y_0) .

Ορίζουμε επίσης

$$(2.4.3) \quad \mathbf{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της f στο (x_0, y_0) αν και μόνο αν $\mathbf{n} \perp (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0))$. Για τον λόγο αυτόν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ καλείται **κάθετο διάνυσμα** της f στο σημείο (x_0, y_0) .

2.5 Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνσης παραγώγου

Πρόταση 2.5.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$(2.5.1) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ και $\|\mathbf{u}\| = 1$). Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ για $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$(2.5.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} = 0$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t| \cdot \|\mathbf{u}\|} \\ &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t|} \\ &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - t(\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u})}{t} \right| \\ &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right| \end{aligned}$$

και άρα η (2.5.2) γράφεται

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right| = 0$$

Οπότε

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right) = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}.$$

Επειδή εξ ορισμού $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Η Πρόταση 2.5.1 θέλει προσοχή στην εφαρμογή της **γιατί δεν ισχύει απαραίτητα αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0)** . Παραθέτουμε σχετικά τα επόμενο παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.5.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. Δείξτε τα εξής.

- (i) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- (ii) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ η παράγωγος της f στο $(0, 0)$ κατά την $\mathbf{u}$ υπάρχει.
- (iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|$$

Άρα $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(ii) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3 + t^3 u_2^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3 + u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(iii) Από το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$,

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Από τον Ορισμό 2.3.2 γνωρίζουμε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + x y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

Αλλά τότε αν $x = y = t$ θα πρέπει

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \text{ ή } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Απο την Πρόταση 2.5.1 αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ τότε θα έπρεπε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1 + u_2$.

Όμως απο το (ii) έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = u_1^3 + u_2^3$. Άρα θα είχαμε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$, για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο. $\square$

Παρατήρηση 2.5.3. Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 2.5.1. Δηλαδή μπορεί να ισχύει ο τύπος $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ αλλά η f να μην είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 2.5.4. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$(2.5.3) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0, 0)$ τότε οι κατευθύνσεις

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

είναι αυτές για τις οποίες η f έχει την μέγιστη και αντίστοιχα ελάχιστη κατευθυνόμενη παράγωγο, δηλαδή

$$(2.5.4) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|\mathbf{u}\| = 1 \right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$

και

$$(2.5.5) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|\mathbf{u}\| = 1 \right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ απο την Πρόταση 2.5.1 έχουμε

$$(2.5.6) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| = |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_1 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (2.5.6) παίρνουμε

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0)$$

που δίνει την (2.5.4). Ομοίως για το $\mathbf{u}_2$. □

2.6 Σχέση παραγώγου και μερικών παραγώγων

Είδαμε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι και μερικώς παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Επίσης είδαμε με παράδειγμα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι αν υποθέσουμε επιπλέον ότι οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου και ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι συνεχείς στο σημείο αυτό, τότε η f είναι παραγωγίσιμη. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θεώρημα 2.6.1. (Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) . Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

Ορισμός 2.6.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία οι f_x, f_y ορίζονται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς καλείται **συνεχώς παραγωγίσιμη** στο A . Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 2.6.1 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 2.6.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Αν $f \in C^1(A)$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο A .

Παράδειγμα 2.6.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = e^x y + x^2 e^y$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης βρείτε την παράγωγο στο σημείο $(1, 0)$.

Απόδειξη. Έχουμε $f_x(x, y) = ye^x + 2xe^y$ και $f_y(x, y) = e^x + x^2 e^y$. Οι f_x, f_y είναι συνεχείς. Πράγματι, έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Τότε $f_x(x_n, y_n) = y_n e^{x_n} + 2x_n e^{y_n} \rightarrow ye^x + 2xe^y$, από τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών. Αφού λοιπόν οι f_x, f_y είναι συνεχείς η f είναι παραγωγίσιμη. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμή $f'(x, y) = [f_x(x, y) \ f_y(x, y)]$. Άρα $f'(1, 0) = [2 \ e + 1]$. □

Παράδειγμα 2.6.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = e^{x+2y}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|}$$

Απόδειξη. Είναι $f_x(x, y) = e^{x+2y}$ και $f_y(x, y) = 2e^{x+2y}$. Άρα η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

λόγω παραγωγισιμότητας της f στο $(0, 0)$. Επειδή

$$\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = 0.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παραγωγή γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

3.1 Παραγωγή πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η θεωρία παραγωγής μιας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι άμεση επέκταση της αντίστοιχης θεωρίας παραγωγής πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3.1.1 Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

Ορισμός 3.1.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω $1 \leq i \leq n$. Το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h}.$$

καλείται **μερική παράγωγος ως προς x_i της συνάρτησης f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$** και συμβολίζεται με

$$f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Θα λέμε ότι η f είναι **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x_i στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$** αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός.

Αν $A_i \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ του A στα οποία η $f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη τότε η συνάρτηση $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \in A_i$ καλείται **μερική παράγωγος της f ως προς x_i** και συμβολίζεται με f_{x_i} ή $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Παράδειγμα 3.1.2. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2yz + xy^2z^3$$

Για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 + 2xyz + y^2z^3,$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 + x^2z + 2xyz^3$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + x^2y + 3xy^2z^2.$$

3.1.2 Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = 1$ θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 3.1.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^n$. Το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + tu_1, \dots, x_n^0 + tu_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{t}$$

καλείται *παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$* . Το όριο αυτό συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$$

Όπως και στην περίπτωση συνάρτησης δύο μεταβλητών παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A . Πιο συγκεκριμένα έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη¹ και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$.

3.1.3 Κλίση, παράγωγος και διαφορικό πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμός 3.1.4. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A . Έστω ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ (δηλαδή υπάρχουν οι $f_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και είναι πεπερασμένες). Το διάνυσμα

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = (f_{x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}_0))$$

καλείται *κλίση ή ανάδελα της f στο $\mathbf{x}_0$* .

Ορισμός 3.1.5. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A . Λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο σημείο $\mathbf{x}_0$* αν η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και ισχύει

¹διότι $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$, αφού $\|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} - \mathbf{x}_0\| = \|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$

ότι

$$(3.1.1) \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Παρατήρηση 3.1.6. Θέτοντας $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \Leftrightarrow \mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, ο τύπος (3.1.1) γράφεται και ως εξής

$$(3.1.2) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Ορισμός 3.1.7. Τον πίνακα γραμμής

$$[f_{x_1}(\mathbf{x}_0) \dots f_{x_n}(\mathbf{x}_0)]$$

θα τον καλούμε παράγωγο της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ και θα το συμβολίζουμε με $f'(\mathbf{x}_0)$. Την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$T(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x} = f_{x_1}(\mathbf{x}_0) x_1 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0) x_n$$

θα την καλούμε διαφορικό της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ και θα την συμβολίζουμε με $D_{\mathbf{x}_0}f$.

Παράδειγμα 3.1.8. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ μια γραμμική συνάρτηση από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$. παρατηρούμε ότι $f_{x_i}(\mathbf{x}) = a_i$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leq i \leq n$. Άρα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (a_1, \dots, a_n), \quad f'(\mathbf{x}) = [a_1 \dots a_n], \quad D_{\mathbf{x}}f = f$$

Παράδειγμα 3.1.9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη² στο $(0, 0, 0)$.

Έχουμε

$$f_x(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_z(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0, h) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(x, y, z) - f(0, 0, 0) - f_x(0, 0, 0)x - f_y(0, 0, 0)y - f_z(0, 0, 0)z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \sqrt{\frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

²Σημειώνουμε εδώ ότι σε ένα προηγούμενο παράδειγμα είχαμε δει ότι η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$

Πράγματι, για κάθε $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ έχουμε

$$0 \leq \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = |x| \cdot \frac{|yz|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq |x|$$

(διότι $y^2 + z^2 \geq 2|yz| \geq |yz|$) και άρα απο τον κανόνα παρεμβολής $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$.

3.1.4 Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγου

Πρόταση 3.1.10. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$(3.1.3) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = f_{x_1}(\mathbf{x}_0)u_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0)u_n = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.11. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$(3.1.4) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0, 0)$ και

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

(οπότε $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$) τότε

$$(3.1.5) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|\mathbf{u}\| = 1 \right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$

και

$$(3.1.6) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|\mathbf{u}\| = 1 \right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$

3.1.5 Συνεχώς παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Το Θεώρημα 2.6.1 γενικεύεται ως εξής.

Θεώρημα 3.1.12. (Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε για όλα τα $i = 1, \dots, n$ οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f ως προς x_i ορίζονται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 3.1.12 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 3.1.13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, \dots, n$ η f_{x_i} ορίζεται στο A και είναι συνεχής. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A .

Ορισμός 3.1.14. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $i = 1, \dots, n$ η f_{x_i} ορίζεται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχής καλείται **συνεχώς παραγωγίσιμη** στο A . Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.

Με την ορολογία του παραπάνω ορισμού το Πρόρισμα 3.1.13 αναδιατυπώνεται ως εξής:

Πόρισμα 3.1.15. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f \in C^1(A)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A .

Παρατήρηση 3.1.16. Παρατηρείστε ότι $f \in C^1(A)$ αν και μόνο αν η συνάρτηση $\nabla f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Παράδειγμα 3.1.17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = xyz$. Βρείτε την παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)$.

Λύση: Εύκολα βλέπουμε ότι $f_x(x, y, z) = yz$, $f_y(x, y, z) = xz$ και $f_z(x, y, z) = xy$. Αφού η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους είναι παραγωγίσιμη. Άρα από την Πρόταση 3.1.10,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 2, 3) &= \nabla f(1, 2, 3) \cdot \mathbf{u} \\ &= f_x(1, 2, 3)u_1 + f_y(1, 2, 3)u_2 + f_z(1, 2, 3)u_3 \\ &= 6 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 0 = \frac{30}{5} = 6. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1.18. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}.$$

Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και βρείτε την παράγωγο της στο σημείο $(1, 0, 0)$. Υπολογίστε επίσης το όριο

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - ex}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}}$$

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}, \quad f_y(x, y, z) = 2ye^{x+y^2+z^3}, \quad f_z(x, y, z) = 3z^2e^{x+y^2+z^3}$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Οι f_x, f_y, f_z είναι συνεχείς. Αφού λοιπόν όλες οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς, έχουμε ότι $f \in C^1(A)$ και άρα από το Πρόρισμα 3.1.15, η f είναι παραγωγίσιμη παντού στο A . Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμής $f'(x, y, z) = [f_x(x, y, z) \ f_y(x, y, z) \ f_z(x, y, z)]$. Άρα

$$f'(1, 0, 0) = [f_x(1, 0, 0) \ f_y(1, 0, 0) \ f_z(1, 0, 0)] = [e \ 0 \ 0]$$

Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο $(1, 0, 0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,0)} \frac{f(x, y, z) - f(1, 0, 0) - \nabla f(1, 0, 0) \cdot (x-1, y, z)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

οπότε αντικαθιστώντας

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - e - e(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

και άρα

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - ex}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

3.1.6 Εφαπτόμενο υπερεπίπεδο γραφήματος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Το υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{n+1}$ με εξίσωση

$$(3.1.7) \quad x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + f_{x_1}(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0)(x_n - x_n^0)$$

καλείται **εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** . Το διάνυσμα

$$(3.1.8) \quad \mathbf{n} = (f_{x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}_0), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

καλείται **κάθετο διάνυσμα της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** . Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ περιέχεται στο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0, x_{n+1} - f(\mathbf{x}_0))$.

Παράδειγμα 3.1.19. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο του εφαπτόμενου υπερεπιπέδου της f στο $(1, 2, 3)$.

Λύση: Έχουμε $f_x(x, y, z) = 2x$, $f_y(x, y, z) = 2y$ και $f_z(x, y, z) = 2z$. Παρατηρούμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f ορίζονται σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ και είναι συνεχείς. Άρα η f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επίσης $f(1, 2, 3) = 14$, $f_x(1, 2, 3) = 2$, $f_y(1, 2, 3) = 4$ και $f_z(1, 2, 3) = 6$. Άρα (αναπαριστώντας τα σημεία του $\mathbb{R}^4$ με $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$) η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο σημείο $(1, 2, 3)$ είναι

$$w = 14 + 2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) \Leftrightarrow 2x + 4y - 6z - w - 4 = 0$$

3.2 Παραγωγή διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η έννοια της παραγώγου διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών αποτελεί μια άμεση επέκταση των αντίστοιχων ορισμών που δώσαμε για πραγματική συνάρτηση.

Σταθεροποιούμε για τα επόμενα μια συνάρτηση $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και έστω

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$$

η ανάλυση της f σε m συνιστώσες πραγματικές συναρτήσεις $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$. Έστω επίσης $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A .

Πρώτα γενικεύουμε τον ορισμό της κλίσης.

Ορισμός 3.2.1. Έστω ότι για κάθε $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ η μερική παράγωγος $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Ο $m \times n$ πίνακας

$$(3.2.1) \quad \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

καλείται κλίση ή Ιακωβιανός πίνακας της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$ και θα συμβολίζεται με

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad \acute{\eta} \quad \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0)$$

Ορισμός 3.2.2. Η $\mathbf{f}$ θα καλείται παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο σημείο $\mathbf{x}_0$ αν για κάθε $1 \leq i \leq m$, η i -συνιστώσα συνάρτηση $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και ισχύει ότι

$$(3.2.2) \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

όπου για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(3.2.3) \quad \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Αν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε (α) ο Ιακωβιανός πίνακας της $\mathbf{f}$ ορίζεται να είναι η παράγωγος της $\mathbf{f}$ και θα συμβολίζεται και με $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ και (β) η γραμμική απεικόνιση με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^n$ και τιμές στον $\mathbb{R}^m$ που ορίζεται στην (3.2.3) θα καλείται διαφορικό της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$ και θα συμβολίζεται με $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Η επόμενη πρόταση είναι απλή συνέπεια των Ορισμών 3.2.2 και 3.1.5.

Πρόταση 3.2.3. Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν για κάθε $1 \leq i \leq m$ η συνάρτηση $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

Από την Πρόταση 3.2.3 και το Πόρισμα 3.1.13 παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 3.2.4. (Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Αν $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ και οι $f_1, \dots, f_m$ είναι κλάσης $C^1(A)$ (δηλαδή οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ ορίζονται για κάθε $\mathbf{x} \in A$ και είναι συνεχείς για όλα τα $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, n$) τότε η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A .

Παράδειγμα 3.2.5. Έστω $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + y^3 + z^4, \sin(xyz))$. Δείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της στο σημείο $(0, 1, 2)$.

Λύση: Έχουμε $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ με $f_1(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$ και $f_2(x, y, z) = \sin(xyz)$. Είναι

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 4z^3$$

και

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = yz \cos(xyz), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = xz \cos(xyz) \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = xy \cos(xyz)$$

Άρα, αφού όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των f_1, f_2 υπάρχουν και είναι συνεχείς, έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη. Απο τον ορισμό της παραγωγού, η παράγωγος της $\mathbf{f}$ σε ένα σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ δίνεται απο τον τύπο

$$\mathbf{f}'(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 & 4z^3 \\ yz \cos(xyz) & xz \cos(xyz) & xy \cos(xyz) \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\mathbf{f}'(0, 1, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 32 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 Κανόνας αλυσίδας

Θεώρημα 3.3.1. (Γενικός Κανόνας Αλυσίδας) Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ και έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$. Αν η $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ τότε η $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και ισχύει ότι

$$(3.3.1) \quad (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)$$

Η (3.3.1) λέει ότι ο πίνακας των μερικών παραγώγων της σύνθεσης $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$.

Στην περίπτωση όπου η f είναι πραγματική συνάρτηση (δηλαδή $k = 1$) το Θεώρημα 3.3.1 δίνει και το εξής πόρισμα (το διατυπώνουμε με λίγο διαφορετικό συμβολισμό).

Πόρισμα 3.3.2. Έστω $z = z(x_1, \dots, x_n)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση η μεταβλητών και για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ έστω $x_i = x_i(t_1, \dots, t_m)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση m μεταβλητών. Τότε η συνάρτηση

$$z(t_1, \dots, t_m) = z(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m))$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$(3.3.2) \quad \frac{\partial z}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

για κάθε $j \in \{1, \dots, m\}$.

Ειδικότερα αν η f είναι πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών και η g είναι μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $k = m = 1$) παίρνουμε μια επίσης πολύ χρήσιμη μορφή του Κανόνα Αλυσίδας. Πριν την διατυπώσουμε θυμίζουμε πρώτα ότι με τον όρο (παραμετρική) καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ εννοούμε μια συνάρτηση $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ όπου το I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{\mathbf{r}(t) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$ μιας τέτοιας συνάρτησης θα το καλούμε *ίχνος της καμπύλης*. Αν η καμπύλη $\mathbf{r}$ είναι

παραγωγίσιμη στο t_0 τότε από τον Ορισμό 3.2.1 η παράγωγος της $\mathbf{r}$ στο t_0 είναι ο πίνακας στήλη

$$(3.3.3) \quad \mathbf{r}'(t_0) = \begin{bmatrix} x'_1(t_0) \\ \vdots \\ x'_n(t_0) \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα $(x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0))$ καλείται *εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο t_0* και θα το συμβολίζουμε και αυτό με $\mathbf{r}'(t_0)$. Αν θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή t εκφράζει τον χρόνο και η $\mathbf{r}(t)$ την θέση του κινητού στον $\mathbb{R}^n$ τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t_0)$ εκφράζει την ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή $t = t_0$.

Πόρισμα 3.3.3. Έστω $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση η μεταβλητών και $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους δηλαδή

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in \mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει ότι

$$(3.3.4) \quad \begin{aligned} F'(t_0) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}(t_0)) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{r}(t_0)) \right] \cdot \begin{bmatrix} x'_1(t_0) \\ \vdots \\ x'_n(t_0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}(t_0)) x'_1(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{r}(t_0)) x'_n(t_0) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$(3.3.5) \quad F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad (\text{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων})$$

Για παράδειγμα αν $n = 2$ έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.3.4. Έστω $z = z(x, y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών και έστω $x = x(t)$, $y = y(t)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Τότε η συνάρτηση

$$z(t) = z(x(t), y(t))$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$(3.3.6) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Παράδειγμα 3.3.5. Υπολογίστε την $\frac{dz}{dt}$ αν $z = z(x, y) = x^2 + 2y^2$ και $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = \cos t$.

Λύση: Έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

Άρα

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x \cos t - 4y \sin t = 2 \sin t \cos t - 4 \cos t \sin t = -2 \cos t \sin t$$

Παρατήρηση 3.3.6. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την $\frac{dz}{dt}$ και ως εξής : Πρώτα υπολογίζουμε την $z = z(t)$,

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = x^2(t) + 2y^2(t) = \sin^2 t + 2 \cos^2 t = 1 + \cos^2 t$$

οπότε $\frac{dz}{dt} = -2 \cos t \sin t$.

Αν n f είναι πραγματική συνάρτηση και $n = m = 2$ τότε έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.3.7. Έστω $z = z(x, y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών και έστω $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Τότε η συνάρτηση

$$z(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Παράδειγμα 3.3.8. Έστω $z(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $x = x(u, v) = u + v$, $y = y(u, v) = 2u - v$. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Λύση: Έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (2x + y) + 2(x + 2y) = 4x + 5y = 4(u + v) + 5(2u - v) = 14u + v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (2x + y) - (x + 2y) = x - y = u + v - 2u + v = -u + 2v$$

Πόρισμα 3.3.9. Έστω $s = s(x, y, z)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τριών μεταβλητών και έστω $x = x(u, v, w)$ και $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Τότε η συνάρτηση

$$s(u, v, w) = s(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial u} &= \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial s}{\partial v} &= \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial w} &= \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.3.10. Έστω $s = s(x, y, z)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x(u, v, w) = u - v$, $y(u, v, w) = v - w$, $z(u, v, w) = w - u$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial w} = 0$$

Λύση: Έχουμε

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial z}$$

Ομοίως,

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}$$

$$\frac{\partial s}{\partial w} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης, Θεώρημα Taylor

4.1 Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

4.1.1 Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y να υπάρχουν τουλάχιστον σε μια περιοχή του (x_0, y_0) . Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων f_x, f_y ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0)** .

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τέσσερις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, y_0) &= (f_x)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_x(x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ f_{xy}(x_0, y_0) &= (f_x)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ f_{yx}(x_0, y_0) &= (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ f_{yy}(x_0, y_0) &= (f_y)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_y(x_0, y) - f_y(x_0, y_0)}{y - y_0}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= f_{xx}(x_0, y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= f_{xy}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= f_{yx}(x_0, y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= f_{yy}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ είναι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0) . Ειδικότερα, οι $f_{xy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ καλούνται **μεικτές** μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0) .

Με τον παραπάνω τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ στα κατάλληλα σύνολα των σημείων (x, y) του A όπου οι τιμές $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες.

Παράδειγμα 4.1.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$ και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (f_x)_x(x, y) = 6x + 2y, & f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y(x, y) = 2x + 2y, \\ f_{yx}(x, y) &= (f_y)_x(x, y) = 2x + 2y, & f_{yy}(x, y) &= (f_y)_y(x, y) = 6y + 2x. \end{aligned}$$

4.1.2 Συμμετρία των μεικτών παραγώγων δεύτερης τάξης

Στο Παράδειγμα 4.1.1 οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για τη συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 4.1.2 (θεώρημα Schwarz). Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A . Αν οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) , τότε $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Το επόμενο παράδειγμα που δείχνει ότι η υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα 4.1.3 (παράδειγμα συνάρτησης για την οποία $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

αν $(x, y) \neq (0, 0)$. Θα δείξουμε ότι $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$(4.1.1) \quad f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y}$$

και

$$(4.1.2) \quad f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x}.$$

Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τις $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$, $f_x(0, y)$ και $f_y(x, 0)$. Για το σημείο $(0, 0)$ έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Για το σημείο $(0, y)$, με $y \neq 0$,

$$f_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = -y,$$

και τέλος για το $(x, 0)$ με $x \neq 0$,

$$f_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = x.$$

Αντικαθιστώντας στις (4.1.1) και (4.1.2) παίρνουμε

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - 0}{y} = -1$$

ενώ

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

□

4.1.3 Μερικές παράγωγοι τρίτης και μεγαλύτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης να υπάρχουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) . Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0)** . Υιοθετώντας αντίστοιχο συμβολισμό με αυτόν των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης, συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους τρίτης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0) ως εξής:

$$\begin{aligned} f_{xxx}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (x_0, y_0) \\ f_{xxy}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} (x_0, y_0) \\ f_{xyx}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} (x_0, y_0) \\ f_{yyx}(x_0, y_0) &= (f_{yy})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} (x_0, y_0) \\ f_{yxy}(x_0, y_0) &= (f_{yx})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} (x_0, y_0) \\ f_{yxx}(x_0, y_0) &= (f_{yx})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (x_0, y_0) \\ f_{xyy}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} (x_0, y_0) \\ f_{yyy}(x_0, y_0) &= (f_{yy})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (x_0, y_0) \end{aligned}$$

Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f έως και τρίτης τάξης υπάρχουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **μερικές παράγωγοι τέταρτης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0)** . Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε τις **μερικές παραγώγους n -τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0)** .

Το Θεώρημα 4.1.2 γενικεύεται με επαγωγή ως εξής.

Θεώρημα 4.1.4. Έστω $n \geq 2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A . Αν οι μερικές παράγωγοι της f έως και n -τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) τότε όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι στο (x_0, y_0) που περιέχουν τον ίδιο αριθμό παραγωγίσεων ως προς x και τον ίδιο αριθμό παραγωγίσεων ως προς y με διαφορετική σειρά είναι ίσες.

Για παράδειγμα, αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.1.4 για $n = 3$ τότε

$$f_{xyx}(x_0, y_0) = f_{xxy}(x_0, y_0) = f_{yxx}(x_0, y_0).$$

4.2 Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

4.2.1 Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Ορισμός 4.2.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω επίσης $i, j \in \{1, \dots, n\}$ και έστω ότι η f_{x_i} ορίζεται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Τότε αν υπάρχει η μερική παράγωγος της f_{x_i} ως προς x_j στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, δηλαδή αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_j^0 + h, \dots, x_n^0) - f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)}{h}.$$

τότε αυτό καλείται **μερική παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ως προς x_i και x_j και συμβολίζεται με**

$$f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Ειδικότερα αν $i = j$ τότε γράφουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) &= (f_{x_i})_{x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) \end{aligned}$$

Η μερική παράγωγος $f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ καλείται **δευτέρης τάξης** μερική παράγωγος στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Ειδικότερα αν $i \neq j$ η $f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ καλείται **μεικτή**.

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3.$$

Για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε

$$f_x(x, y, z) = 3x^2, \quad f_y(x, y, z) = 3y^2, \quad f_z(x, y, z) = 3z^2$$

$$f_{xx}(x, y, z) = (f_x)_x(x, y, z) = 6x$$

$$f_{xy}(x, y, z) = (f_x)_y(x, y, z) = 0,$$

$$f_{xz}(x, y, z) = (f_x)_z(x, y, z) = 0$$

$$f_{yx}(x, y, z) = (f_y)_x(x, y, z) = 0$$

$$f_{yy}(x, y, z) = (f_y)_y(x, y, z) = 6y$$

$$f_{yz}(x, y, z) = (f_y)_z(x, y, z) = 0$$

$$f_{zx}(x, y, z) = (f_z)_x(x, y, z) = 0$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y(x, y, z) = 0$$

$$f_{zz}(x, y, z) = (f_z)_z(x, y, z) = 6z.$$

4.2.2 Συμμετρία των μεικτών παραγώγων δεύτερης τάξης

Το Θεώρημα 4.1.2 αναδιατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 4.2.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A . Αν οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, τότε για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ οι μεικτές μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)$ και $f_{x_j x_i}(\mathbf{x}_0)$ είναι ίσες.

Πόρισμα 4.2.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς. Τότε οι μεικτές μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ και $f_{x_j x_i}$ είναι ίσες.

4.2.3 Μερικές παράγωγοι τρίτης και μεγαλύτερης τάξης

Ορισμός 4.2.5. (Μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω επίσης $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ και έστω ότι η $f_{x_i x_j}$ ορίζεται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Τότε αν υπάρχει η μερική παράγωγος της $f_{x_i x_j}$ ως προς x_k στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, δηλαδή αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n^0) - f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)}{h}.$$

τότε αυτό καλείται μερική παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ως προς x_i , x_j και x_k και συμβολίζεται με

$$f_{x_i x_j x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Ειδικότερα αν $i = j \neq k$ τότε γράφουμε

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i^2}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

και αν $i = j = k$,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k^3}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Παρατήρηση 4.2.6. Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} f_{x_i x_j x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) &= (f_{x_i x_j})_{x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= ((f_{x_i})_{x_j})_{x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= (f_{x_i})_{x_j x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) \end{aligned}$$

Η μερική παράγωγος $f_{x_i x_j x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ καλείται **τρίτης τάξης** μερική παράγωγος στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Ειδικότερα αν τουλάχιστον δύο από τα i, j, k είναι διαφορετικά τότε η $f_{x_i x_j x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ καλείται **μεικτή**. Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f έως και τρίτης τάξης υπάρχουν σε μιας περιοχή

του $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ως προς x_i (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **τέταρτης τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$** . Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις **n -τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$** για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το Πρόρισμα 4.2.4 γενικεύεται ως εξής.

Θεώρημα 4.2.7. Έστω $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και n -τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς (συμβολικά $f \in C^n(A)$). Τότε όλες οι μερικές παράγωγοι που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.

4.3 Πολυώνυμα Taylor

4.3.1 Σύντομη επανάληψη για συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Ορισμός 4.3.1. Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω επίσης $x_0 \in I$ και (αν $n \geq 1$) έστω ότι n f είναι n -φορές παραγωγίσιμη στο x_0 . Το πολυώνυμο

$$(4.3.1) \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

καλείται **πολυώνυμο Taylor n -τάξης της f με κέντρο το x_0** .

Παράδειγμα 4.3.2. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε τα πολυώνυμα Taylor τάξης 0, 1, 2 της f με κέντρο το x_0 είναι τα εξής :

$$T_0(x) = f(x_0), \quad T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2$$

Παράδειγμα 4.3.3. (α) Το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, n -τάξης με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

για κάθε $n \geq 0$. (β) Το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, +\infty)$ n -τάξης με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

για κάθε $n \geq 0$. (Παρατηρείστε ότι $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, οπότε $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$).

Θεώρημα 4.3.4. (Θεώρημα Taylor I- Τύπος Taylor) Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια $(n+1)$ -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $x_0 \in I$. Τότε, για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$ υπάρχει σημείο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιο ώστε

$$(4.3.2) \quad f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Παρατήρηση 4.3.5. Για $n = 0$ το Θεώρημα 4.3.4 είναι το κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής αφού ο

τύπος (4.3.2) γράφεται

$$(4.3.3) \quad f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

Αν $n = 1$ ο τύπος (4.3.2) γράφεται

$$(4.3.4) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

Σημειώνουμε εδώ ότι το σημείο ξ στην (4.3.3) είναι εν γένει διαφορετικό του ξ στην (4.3.4).

Παράδειγμα 4.3.6. Έστω $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ το πολυώνυμο Taylor της e^x τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$. Τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι

$$(4.3.5) \quad T_n(x) < e^x < T_n(x) + \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και $x > 0$. Από τον Τύπο Taylor υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$(4.3.6) \quad e^x = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = T_n(x) + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Αφού $0 < \xi < x \Rightarrow 1 < e^\xi < e^x$ οπότε $0 < \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$ και άρα από την (4.3.6) προκύπτει ότι

$$(4.3.7) \quad T_n(x) < e^x < T_n(x) + \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

□

Παρατήρηση 4.3.7. Για $n = 9$ και $x = 1$ από την (4.3.5) παίρνουμε ότι

$$2,718281 < e < 2,718282$$

Θεώρημα 4.3.8. (Θεώρημα Taylor II) Έστω $n \geq 1$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in I$ και έστω ότι n f είναι n -φορές παραγωγίσιμη στο a . Έστω $T_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το x_0 . Τότε,

$$(4.3.8) \quad f(x) = T_n(x) + \varepsilon(x)(x - x_0)^n \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Με άλλα λόγια

$$(4.3.9) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Πόρισμα 4.3.9. (Εφαρμογή για τοπικά ακρότατα) Έστω $n \in \mathbb{N}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε n f είναι $2n$ -φορές παραγωγίσιμη στο x_0 . Αν $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{2n-1}(x_0) = 0$ και $f^{2n}(x_0) > 0$ (αντ. $f^{2n}(x_0) < 0$) τότε το a είναι γνήσιο τοπικό ελάχιστο (αντ. μέγιστο) της f , δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < f(x)$ (αντ. $f(x_0) > f(x)$) για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$.

Απόδειξη. Έστω $f^{2n}(x_0) > 0$ (αν $f^{2n}(x_0) < 0$ η απόδειξη είναι παρόμοια ή μπορούμε να θεωρήσουμε

την $-f$). Επειδή $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{2n-1}(x_0) = 0$ έπεται ότι

$$T_{2n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x-x_0)^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}$$

και άρα από το Θεώρημα 4.3.8, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T(x)}{(x-x_0)^{2n}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}}{(x-x_0)^{2n}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{2n}} = \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το πηλίκο $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{2n}}$ είναι θετικό όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0 . Συνεπώς, επειδή $(x-x_0)^{2n} > 0$ για κάθε $x \neq x_0$, θα πρέπει και ο αριθμητής $f(x) - f(x_0)$ να είναι θετικός όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0 . Με άλλα λόγια υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$. $\square$

4.3.2 Πολυώνυμο και Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Σταθεροποιούμε για την συνέχεια μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$.

Το πολυώνυμο Taylor μηδενικής τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ ορίζεται να είναι το σταθερό πολυώνυμο

$$T_0(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Αν η f είναι κλάσης $C^1(A)$, το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ ορίζεται να είναι το πολυώνυμο

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Αν η f είναι κλάσης $C^2(A)$ ορίζουμε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ να είναι το πολυώνυμο

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} (f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2).$$

Παράδειγμα 4.3.10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{3x+2y}$. Υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$.

Λύση. Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$f_x(x, y) = 3e^{3x+2y}, \quad f_y(x, y) = 2e^{3x+2y}$$

και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (f_x)_x(x, y) = 9e^{3x+2y}, & f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y(x, y) = 6e^{3x+2y} \\ f_{yx}(x, y) &= (f_y)_x(x, y) = 6e^{3x+2y}, & f_{yy}(x, y) &= (f_y)_y(x, y) = 4e^{3x+2y}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Επίσης βλέπουμε ότι

$$f_x(0, 1) = 3e^2, \quad f_y(0, 1) = 2e^2$$

και

$$f_{xx}(0,1) = 9e^2, \quad f_{xy}(0,1) = f_{yx}(0,1) = 6e^2, \quad f_{yy}(0,1) = 4e^2.$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(x_0, y_0) = (0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y - 1) \\ &= -e^2 + 3e^2x + 2e^2y. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 1)x^2 + 2f_{xy}(0, 1)x(y - 1) + f_{yy}(0, 1)(y - 1)^2] \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2!} [9e^2x^2 + 12e^2x(y - 1) + 4e^2(y - 1)^2]. \end{aligned}$$

Για να ορίσουμε γενικά το πολυώνυμο Taylor n -τάξης με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ μιας συνάρτησης $f \in C^n(A)$ θα χρειασθεί να εισάγουμε κάποιο συμβολισμό. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε πρώτα έναν διαφορικό τελεστή ως εξής: Αν $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$(4.3.10) \quad (\mathbf{h} \cdot \nabla)^{(k)} = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k}{\partial x^{k-j} \partial y^j} h_1^{k-j} h_2^j$$

όπου

$$(4.3.11) \quad \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

Παρατήρηση 4.3.11. Ο συμβολισμός $\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)}$ προέρχεται από τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \geq 0$ ακέραιος, τότε

$$(4.3.12) \quad (a + b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} b^j$$

Παράδειγμα 4.3.12. Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $k = 0, 1, 2, 3$, ο διαφορικός τελεστής (4.3.10) δρώ ως εξής

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^{(0)} f(x, y) &= \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(0)} f(x, y) = f(x, y) \\ (\mathbf{h} \cdot \nabla)^{(1)} f(x, y) &= \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(1)} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2 \\ &= f_x(x, y)h_1 + f_y(x, y)h_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h} \cdot \nabla)^{(2)} f(x, y) &= \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(2)} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) h_2^2 \\
&= f_{xx}(x, y) h_1^2 + 2 f_{xy}(x, y) h_1 h_2 + f_{yy}(x, y) h_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h} \cdot \nabla)^{(3)} f(x, y) &= \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(3)} f(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) h_1^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) h_1^2 h_2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) h_1 h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) h_2^3 \\
&= f_{xxx}(x, y) h_1^3 + 3 f_{xxy}(x, y) h_1^2 h_2 + 3 f_{xyy}(x, y) h_1 h_2^2 + f_{yyy}(x, y) h_2^3
\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε γενικά τα πολυώνυμα Taylor για οποιαδήποτε τάξη.

Ορισμός 4.3.13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $n \geq 0$ ακέραιος, $f \in C^n(A)$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. Το πολυώνυμο

$$\begin{aligned}
(4.3.13) \quad T_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} ((x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla)^{(k)} f(x_0, y_0) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

καλείται **πολυώνυμο Taylor n -τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$** .

4.3.3 Τύπος Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Στα επόμενα για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0), \mathbf{x} = (x, y)$ του $\mathbb{R}^2$ με $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ συμβολίζουμε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
(4.3.14) \quad [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), t \in [0, 1] \} \\
&= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a_1 + t(b_1 - a_1), y = y_0 + t(b_2 - y_0), t \in [0, 1] \}
\end{aligned}$$

Με $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ συμβολίζουμε το ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}$, δηλαδή

$$(4.3.15) \quad (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), t \in (0, 1) \}$$

Θεώρημα 4.3.14. (Θεώρημα Taylor I-Τύπος Taylor) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $n \geq 0$, $f \in C^{n+1}(A)$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \neq \mathbf{x}_0 \in A$ με $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$(4.3.16) \quad f(x, y) = T_n(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(n+1)} f(\xi_1, \xi_2)$$

όπου $(\xi_1, \xi_2) = (x_0 + \xi(x - x_0), y_0 + \xi(y - y_0))$ και $T_n(x, y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor n -τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Σκιαγράφηση της απόδειξης: Σταθεροποιούμε ένα $\mathbf{x} = (x, y) \neq (x_0, y_0) \in A$ με $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \quad t \in [0, 1].$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι

$$(4.3.17) \quad F^{(k)}(t) = \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$$

για κάθε $k = 1, \dots, m+1$ και κάθε $t \in [0, 1]$. Από τον τύπο του Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής (Θεώρημα 4.3.4) έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$(4.3.18) \quad F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^n \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Όμως $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$ και από την (4.3.17) για $t = 0$,

$$F^{(k)}(0) = \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(x_0, y_0)$$

Άρα

$$F(0) + \sum_{k=1}^n \frac{F^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(x_0, y_0) = T_n(x, y)$$

και άρα η σχέση (4.3.18) δίνει την (4.3.16). □

4.3.4 Οι περιπτώσεις $n = 0$ και $n = 1$ του Τύπου Taylor

Το Θεώρημα 4.3.14 για $n = 0$ δίνει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 4.3.15. (Θεώρημα Μέσης Τιμής για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^1(A)$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$ υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$(4.3.19) \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\xi) \\ &= f_x(\xi_1, \xi_2)(x - x_0) + f_y(\xi_1, \xi_2)(y - y_0) \end{aligned}$$

όπου $(\xi_1, \xi_2) = (x_0 + \xi(x - x_0), y_0 + \xi(y - y_0))$.

Απόδειξη. Έχουμε $T_0(x, y) = f(x_0, y_0)$. Από το Θεώρημα 4.3.14 (για $n = 0$) υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε θέτοντας $(\xi_1, \xi_2) = (x_0 + \xi(x - x_0), y_0 + \xi(y - y_0))$, έχουμε

$$(4.3.20) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(1)} (\xi_1, \xi_2) \\ &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} (\xi_1, \xi_2) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} (\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

□

Ομοίως, για $n = 1$ παίρνουμε το επόμενο.

Πόρισμα 4.3.16. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$(4.3.21) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_2(x, y)$$

όπου

$$(4.3.22) \quad R_2(x, y) = \frac{1}{2} \left(f_{xx}(\xi_1, \xi_2)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(\xi_1, \xi_2)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(\xi_1, \xi_2)(y - y_0)^2 \right)$$

και $(\xi_1, \xi_2) = (x_0 + \xi(x - x_0), y_0 + \xi(y - y_0))$.

Παράδειγμα 4.3.17. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ και $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = 2$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, αποδείξτε ότι $f(x, y) = (x + y)^2$.

Απάντηση: Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x, y) \neq (0, 0)$. Από το Πρόγραμμα 4.3.16, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2) \\ &= x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \end{aligned}$$

για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Επειδή για $(x, y) = (0, 0)$ ο παραπάνω τύπος δίνει ότι $f(0, 0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4.3.5 Δεύτερο Θεώρημα Taylor

Στο κεφάλαιο για την παραγωγή είδαμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν και μόνο αν οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και

$$(4.3.23) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Επειδή το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ ορίζεται να είναι το

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

ο τύπος (4.3.23) γράφεται και ως εξής

$$(4.3.24) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

Ισοδύναμα, θέτοντας $\varepsilon(x) = \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|}$ έχουμε ότι

$$(4.3.25) \quad f(x, y) = T_1(x, y) + \varepsilon(x, y) \cdot \|(x - x_0, y - y_0)\| \quad \text{όπου} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

Ο τύπος (4.3.25) λέει ότι η f γύρω από το $\mathbf{x}_0$ γραμμικοποιείται, ισούται δηλαδή με το πολυώνυμο πρώτου βαθμού $T_1(x, y)$. Το επόμενο θεώρημα γενικεύει τις (4.3.24) και (4.3.25) όταν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και n -τάξης.

Θεώρημα 4.3.18 (Θεώρημα Taylor II). Έστω $n \geq 1$ ακέραιος, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^n(A)$. Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ και $T_n(x, y)$ το πολυώνυμο Taylor n -τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0$. Τότε για κάθε $(x, y) \in A$,

$$(4.3.26) \quad f(x, y) = T_n(x, y) + \varepsilon(x, y) \cdot \|(x - x_0, y - y_0)\|^n \quad \text{όπου} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varepsilon(x, y) = 0.$$

Ισοδύναμα,

$$(4.3.27) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - T_n(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|^n} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - T_n(x, y)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{n/2}} = 0.$$

Για παράδειγμα, αν $n = 2$, έχουμε το εξής

Πόρισμα 4.3.19. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^2(A)$. Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ και $T_2(x, y)$ το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0$. Τότε,

$$f(x, y) = T_2(x, y) + \varepsilon_2(x, y) \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right)$$

με

$$\begin{aligned} T_2(x, y) = & f(0, 0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] \end{aligned}$$

και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varepsilon_2(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 0$$

Ειδικότερα αν $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ τότε

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2 \right] + \varepsilon_2(x, y) (x^2 + y^2)$$

$$\text{με } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Παράδειγμα 4.3.20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{x+y}$. Βρίσκοντας πρώτα τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$, υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2}.$$

Απάντηση: Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f οποιασδήποτε τάξης ταυτίζονται με την f και συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ οποιασδήποτε τάξης είναι ίσες με το $e^0 = 1$. Συνεπώς, τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$ είναι αντίστοιχα τα

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 1 + x + y$$

και

$$\begin{aligned} T_2(x, y) = & f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ & + \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2 \right] \\ = & 1 + x + y + \frac{1}{2!} \left[x^2 + 2xy + y^2 \right]. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Επίσης

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - \frac{1}{2!} [x^2 + 2xy + y^2]}{x^2 + y^2} = \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Τοπικά ακρότατα

5.1 Τοπικά ακρότατα και Κρίσιμα σημεία

Ορισμός 5.1.1. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}_0 \in X$.

(1) Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ **τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(5.1.1) \quad f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

(2) Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ **τοπικό ελάχιστο** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(5.1.2) \quad f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

(3) Λέμε ότι η f έχει στο το $\mathbf{x}_0$ **τοπικό ακρότατο** αν η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

Ένα από τα πλέον κλασικά θεωρήματα σχετικά με τα ακρότατα για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως εξής.

Θεώρημα 5.1.2. (Θεώρημα Ακροτάτων Τιμών) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο, και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K , δηλαδή υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ με

$$f(\mathbf{x}_1) = \min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\} \text{ και } f(\mathbf{x}_2) = \max \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\}$$

Ορισμός 5.1.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ καλείται **κρίσιμο σημείο** της f αν $f_{x_1}(\mathbf{x}_0) = f_{x_2}(\mathbf{x}_0) = \cdots = f_{x_n}(\mathbf{x}_0) = 0$ ή ισοδύναμα αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Παρατήρηση 5.1.4. Αν $n = 2$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε ο τύπος του εφαπτόμενου

επιπέδου της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Συνεπώς, αν το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της f τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο (x_0, y_0) γίνεται

$$z = f(x_0, y_0)$$

και άρα είναι το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που είναι παράλληλο προς το xy -επίπεδο και διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0) , όπου $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Πρόταση 5.1.5. (Θεώρημα Fermat) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Τότε, κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι και κρίσιμο σημείο της f .

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}_0 \in A$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f . Για κάθε $1 \leq i \leq n$ έχουμε

$$(5.1.3) \quad f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_i(t) - F_i(0)}{t} = F'_i(0)$$

όπου

$$F_i(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i)$$

με $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i \in A$. Αφού $F_i(0) = f(\mathbf{x}_0)$ και το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f , έπεται ότι το $t_0 = 0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της F_i . Άρα, από την γνωστή πρόταση του Fermat για τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, συμπεραίνουμε ότι $F'_i(0) = 0$, που λόγω της (5.1.3) σημαίνει ότι $f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$. $\square$

Όπως συμβαίνει και στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το αντίστροφο της Πρότασης 5.1.5 δεν ισχύει, δηλαδή ένα κρίσιμο σημείο δεν είναι απαραίτητα τοπικό ακρότατο. Παρατηρήστε ότι ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο για την f αν σε κάθε ανοικτή περιοχή του υπάρχουν σημεία όπου η f λαμβάνει τιμές εκατέρωθεν (δηλαδή μικρότερες και μεγαλύτερες) της τιμής που λαμβάνει στο $\mathbf{x}_0$. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να δούμε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(x, y) = x^3 + y^3$ αλλά δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου. Πράγματι $f(x, y) > 0$ αν $x > 0$ και $y > 0$ ενώ $f(x, y) < 0$ αν $x < 0$ και $y < 0$.

Ορισμός 5.1.6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ θα καλείται **σαγματικό** αν είναι κρίσιμο σημείο της f αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Αν $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τότε όπως είδαμε στην Παρατήρηση (5.1.4), σε ένα κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z = f(x, y)$ είναι το οριζόντιο επίπεδο (δηλαδή το παράλληλο με το xy -επίπεδο) $z = f(x_0, y_0)$. Όμως αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σαγματικό τότε υπάρχουν σημεία όσο κοντά θέλουμε στο (x_0, y_0) όπου η f λαμβάνει και μεγαλύτερες και μικρότερες τιμές από την τιμή που λαμβάνει στο (x_0, y_0) . Αυτό σημαίνει ότι οσοδήποτε κοντά στο (x_0, y_0) θα υπάρχουν σημεία (x, y) όπου το γράφημα $z = f(x, y)$ θα βρίσκεται και από πάνω και από κάτω του $z = f(x_0, y_0)$ και άρα δεν θα λέγαμε ότι το $z = f(x_0, y_0)$ εφάπτεται στην επιφάνεια $z = f(x, y)$ αλλά μάλλον ότι την διασχίζει. Αντίστοιχο φαινόμενο υπάρχει και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχει το $x_0 = 0$ κρίσιμο σημείο αλλά όχι τοπικό ακρότατο και η εφαπτομένη της $y = f(x)$ στο $x = 0$ είναι ο x -άξονας που διασχίζει

την γραφική παράσταση της f . Το σημείο $x_0 = 0$ λεγόταν σημείο *καμπής* της $f(x) = x^3$. Τα σαγματικά σημεία είναι τα αντίστοιχα σημεία καμπής για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Συνήθως γύρω από ένα σαγματικό σημείο η επιφάνεια της f συνήθως μοιάζει με σέλα (σάγμα) εξου και η ονομασία.¹ Σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν δύο ευθείες ή γενικότερα δύο καμπύλες του $\mathbb{R}^n$ που τέμνονται εγκάρσια σε αυτό το σημείο (με την έννοια ότι δεν είναι εφαπτόμενες) και στην μια από αυτές το σημείο είναι τοπικό μέγιστο για την f ενώ στην άλλη είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 5.1.7. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - y^2$. (α) Δείξτε το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f . (β) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Απάντηση: (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 2x$ και $f_y(x, y) = 2y$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη. Από το Θεώρημα 5.1.5 έχουμε ότι τα τοπικά ακρότατα της f αν υπάρχουν θα είναι κρίσιμα σημεία δηλαδή θα είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το $(0, 0)$ είναι η μοναδική λύση.

(β) Παρατηρούμε ότι

(1) για κάθε σημείο $(x, y) \neq (0, 0)$ της ευθείας $y = 0$ έχουμε $f(x, 0) = x^2 > 0$ και άρα $f(x, 0) \geq f(0, 0)$ δηλαδή το $(0, 0)$ είναι ελάχιστο για την f στην ευθεία $y = 0$.

(2) για κάθε σημείο $(x, y) \neq (0, 0)$ της ευθείας $x = 0$ έχουμε $f(0, y) = -y^2 < 0$ και άρα $f(0, y) \leq f(0, 0)$ δηλαδή το $(0, 0)$ είναι μέγιστο για την f στην ευθεία $x = 0$.

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα 5.1.8. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^4$. (α) Δείξτε το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f . (β) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Απάντηση: (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3$ και $f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3 = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3 = 0 \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$(5.1.4) \quad y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3 - 4(x - y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε από την (5.1.4) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$.

(β) Παρατηρούμε ότι

¹Υπάρχουν όμως και εξαιρέσεις. Π.χ. το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $f(x, y) = y^3$ αλλά το γράφημα της f στο $(0, 0)$ δεν μοιάζει με σέλα, αφού παράγεται από την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης $f(y) = y^3$ κατά μήκος του x -άξονα

$$(1) f(0, 0) = 0,$$

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0, 0)$, είναι $f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0, 0)$, είναι $f(x, y) = f(x, -x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$.

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

5.2 Το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για συναρτήσεις δυο μεταβλητών

Θυμίζουμε ότι για συναρτήσεις μιας μεταβλητής έχουμε το παρακάτω κριτήριο για τοπικά ακρότατα.

Πρόταση 5.2.1. (Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 . Έστω $f'(x_0) = 0$ (δηλαδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f) και έστω ότι $f''(x_0) \neq 0$.

(1) Αν $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Το κλασσικό παράδειγμα για το παραπάνω κριτήριο είναι οι συναρτήσεις x^2 και $-x^2$. Για την x^2 το $x_0 = 0$ είναι ελάχιστο και η δεύτερη παράγωγος είναι το $2 > 0$ ενώ για την $-x^2$ το $x_0 = 0$ είναι μέγιστο και η δεύτερη παράγωγος είναι το $-2 < 0$. Παρατηρείστε επίσης ότι το κριτήριο δεν αποφαιίνεται στην περίπτωση που $f''(x_0) = 0$. Πράγματι, αν $f(x) = x^3$ τότε το $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο με $f''(0) = 0$ αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο. Αντιθέτως αν $f(x) = x^4$ το $x_0 = 0$ είναι ελάχιστο με $f''(0) = 0$.

Η Πρόταση 5.2.1 γενικεύεται για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.2. (Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης $C^2(A)$. Έστω $(x_0, y_0) \in A$ κρίσιμο σημείο της f , δηλαδή $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Έστω

$$f''(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0, y_0) και έστω

$$(5.2.1) \quad \Delta(x_0, y_0) = \det f''(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

η ορίζουσά του και έστω

$$\Delta(x_0, y_0) \neq 0$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω.

(α) Αν $\Delta(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0) .

(β) Αν $\Delta(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0) .

(γ) Αν $\Delta(x_0, y_0) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f .

Σκιαγράφηση της απόδειξης. Από το Θεώρημα Taylor II για $n = 2$ (Πόρισμα 4.3.19) έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$,

$$(5.2.2) \quad f(x, y) = T_2(x, y) + \varepsilon(x, y) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \quad \text{με} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

όπου $T_2(x, y)$ είναι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το (x_0, y_0) . Η (5.2.2) λέει ότι

$$f(x, y) \simeq T_2(x, y)$$

όταν το σημείο (x, y) είναι αρκετά κοντά στο (x_0, y_0) οπότε η μελέτη της f γύρω από το (x_0, y_0) ανάγεται στην μελέτη της συνάρτησης $T_2(x, y)$. Η $T_2(x, y)$ είναι αρκετά απλή συνάρτηση αφού είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Μάλιστα επειδή το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ και άρα ο τύπος του $T_2(x, y)$ απλοποιείται και γράφεται

$$(5.2.3) \quad T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} (a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2)$$

όπου

$$(5.2.4) \quad a = f_{xx}(x_0, y_0), \quad b = f_{xy}(x_0, y_0) \quad \text{και} \quad c = f_{yy}(x_0, y_0)$$

Συναρτήσεις της μορφής

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, καλούνται *τετραγωνικές συναρτήσεις* και μελετώνται κυρίως στην Γραμμική Άλγεβρα.

Αποδεικνύεται ότι αν $ac - b^2 > 0$ τότε η $Q(h, k)$ διατηρεί πρόσημο. Ειδικότερα αν $a > 0$ τότε $Q(h, k) > 0$ ενώ αν $a < 0$, $Q(h, k) < 0$ για κάθε $(h, k) \neq (0, 0)$. Από την (5.2.3) αυτό σημαίνει ότι αν $\Delta(x_0, y_0) > 0$ η διαφορά $T_2(x, y) - f(x_0, y_0)$ γίνεται θετική ή αρνητική (ανάλογα αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ή $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$). Άρα στην περίπτωση όπου $\Delta(x_0, y_0) > 0$ το (x_0, y_0) είναι ολικό ελάχιστο ή ολικό μέγιστο για την $T_2(x, y)$. Όπως είπαμε όμως στην αρχή, $T_2(x, y) \simeq f(x, y)$ γύρω από το (x_0, y_0) . Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όταν $\Delta(x_0, y_0) > 0$ το (x_0, y_0) είναι τοπικό ελάχιστο για την f αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ή τοπικό μέγιστο αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Στην περίπτωση όπου $ac - b^2 < 0$ αποδεικνύεται η $Q(h, k)$ δεν διατηρεί πρόσημο γύρω από το $(0, 0)$ και με παρόμοια επιχειρήματα καταλήγουμε στο ότι το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο για την f . $\square$

Παρατηρήσεις 5.2.3. (α) Αν $\Delta(x_0, y_0) = 0$ τότε το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου δεν εφαρμόζεται. Στις περιπτώσεις αυτές το κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) μπορεί να είναι τοπικό ακρότατο μπορεί και όχι.

(β) Αν $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$ τότε οι τρεις περιπτώσεις (1)-(3) του θεωρήματος είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να συμβούν. Πράγματι, η περίπτωση $\Delta(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού τότε από τον ορισμό του $\Delta(x_0, y_0)$ (εξίσωση (5.2.1)) θα είχαμε $f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0$ που φυσικά δεν μπορεί να ισχύει.

(γ) Στην περίπτωση (γ) του Θεωρήματος 5.2.2 αποδεικνύεται ειδικότερα ότι υπάρχουν δύο ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το (x_0, y_0) όπου στην μια η f έχει το (x_0, y_0) ως τοπικό μέγιστο ενώ στην άλλη το έχει ως τοπικό ελάχιστο. Άρα στην περίπτωση που $\Delta(x_0, y_0) < 0$ η γραφική παράσταση της f στο (x_0, y_0) θα μοιάζει όντως με σέλα.

(δ) Υπάρχουν κάποιες λίγες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου το κριτήριο δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0, 0)$

είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο που έχει η $f(x, y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ και άρα η f έχει στο $(0, 0)$ τοπικό (και μάλιστα ολικό) ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο τοπικό ακρότατο τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο ισοδύναμα θα ήταν λύση του συστήματος

$$f_x(x, y) = 2x = 0$$

$$f_y(x, y) = 2y = 0$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0, 0)$, η f δεν έχει άλλο τοπικό ακρότατο εκτός του $(0, 0)$.

Παράδειγμα 5.2.4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3x$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 3$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y = 0$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3x = 0$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Άρα έχουμε δύο κρίσιμα σημεία, τα $(0, 0)$ και $(-1, -1)$.

Για κάθε (x, y) είναι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0, 0) = -9 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1, -1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$. Άρα το $(-1, -1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα 5.2.5. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y) = 4y^3 + 4x - 4y$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) = 0$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y) = 0$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0, 0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ και } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 16$$

(1) $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Παρατηρούμε ότι

$$(\alpha) \quad f(0, 0) = 0,$$

$$(\beta) \quad \text{για κάθε σημείο } (x, y) \neq (0, 0) \text{ της ευθείας } y = 0 \text{ με } x \in (-1, 1) \text{ είναι } f(x, 0) = x^4 - 2x^2 < 0 \text{ και}$$

$$(\gamma) \quad \text{για κάθε σημείο } (x, y) \neq (0, 0) \text{ της ευθείας } y = x \text{ είναι } f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 > 0.$$

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 5.2.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές.

(α) Αν $a \cdot b > 0$ δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

(β) Αν $a \cdot b < 0$ δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Λύση. Επειδή $f_x(x, y) = 4x^3$ και $f_y(x, y) = 4by^3$ έχουμε ότι $f_x(0, 0) = 0$ και $f_y(0, 0) = 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Επιπλέον $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{yy}(x, y) = 12by^2$ και $f_{xy}(0, 0) = 0$. Οπότε

$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$ και άρα $\Delta(0,0) = 0$. Συνεπώς το Κριτήριο Δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να αποφανθεί. Εξετάζοντας όμως τον τύπο της f βλέπουμε τα εξής:

(α) Αν $a > 0$ και $b > 0$ τότε $f(x,y) = ax^4 + by^4 \geq 0 = f(0,0)$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Αντίστοιχα αν $a < 0$ και $b < 0$ τότε $f(x,y) = ax^4 + by^4 \leq 0$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου.

(β) Αν $a < 0$ και $b > 0$ τότε για όλα τα σημεία $(x,0)$ στον x -άξονα έχουμε $f(x,0) = ax^4 \leq 0$ ενώ για όλα τα σημεία $(0,y)$ στον y -άξονα $f(0,y) = by^4 \geq 0$. Άρα στον x -άξονα το $(0,0)$ είναι σημείο ελαχίστου ενώ στον y -άξονα σημείο μεγίστου. Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. Αντίστοιχα αν $a > 0$ και $b < 0$.

Παράδειγμα 5.2.7. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x,y) = 4x^2 - x^4 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x,y) = 8x - 4x^3$$

$$f_y(x,y) = -4y^3$$

$$f_{xx}(x,y) = 8 - 12x^2$$

$$f_{yy}(x,y) = -12y^2$$

$$f_{xy}(x,y) = 0$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y) = 8x - 4x^3 = 0$$

$$f_y(x,y) = -4y^3 = 0.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι τα σημεία $(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$. Επειδή

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = -12(8 - 12x^2)y^2$$

και σε όλα τα κρίσιμα σημεία η y -συντεταγμένη είναι μηδενική έχουμε ότι

$$\Delta(0,0) = \Delta(\sqrt{2},0) = \Delta(-\sqrt{2},0) = 0$$

που σημαίνει ότι το κριτήριο δεν αποφαινεται για κανένα από τα κρίσιμα σημεία.

Παρατηρούμε ότι $f(\pm\sqrt{2},0) = 4$ και

$$f(x,y) = 4x^2 - x^4 - y^4 = 4x^2 - x^4 - 4 + 4 - y^4 = 4 - (x^2 - 2)^2 - y^4 < 4$$

για κάθε $(x,y) \neq (\pm\sqrt{2},0)$. Άρα η f παρουσιάζει αυστηρό ολικό μέγιστο στα σημεία $(\pm\sqrt{2},0)$.

Επίσης $f(0,0) = 0$, $f(0,y) = -y^4 < 0$ για κάθε σημείο $(0,y) \neq (0,0)$ ενώ $f(x,0) = 4x^2 - x^4 > 0$ για κάθε $(x,0) \neq (0,0)$ με $|x| < 2$. Συνεπώς το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

5.3 Τοπικά Ακρότατα υπό συνθήκη, η μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε μία μέθοδο για τον εντοπισμό των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών που είναι ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$, οπότε

γύρω από κάθε σημείο του A οι μεταβλητές x, y ήταν *ελεύθερες*. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης όταν οι μεταβλητές της ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς. Οι περιορισμοί εκφράζονται με την μορφή εξισώσεων που συνδέουν τις μεταβλητές της συνάρτησης και περιορίζουν το πεδίο ορισμού της. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα ακρότατα της συνάρτησης ονομάζονται *ακρότατα υπό συνθήκες* ή *δεσμευμένα ακρότατα*. Εδώ θα μελετήσουμε τα δεσμευμένα ακρότατα με μία μόνο συνθήκη που θα δίνεται μέσω μιας εξίσωσης της μορφής $g(x, y) = c$ (ή $g(x, y, z) = c$). Γεωμετρικά, κάτω από κάποιες απλές προϋποθέσεις² για την g η συνθήκη αυτή ορίζει μια καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ (αν είναι δύο μεταβλητών) ή μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (αν είναι τριών μεταβλητών). Π.χ. η συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$ ορίζει τον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$, ή συνθήκη $y - x = 0$ μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$ και αντίστοιχα η συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ απεικονίζει την μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ ενώ η συνθήκη $x + y + z = 1$ ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός 5.3.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ καλείται **σημείο τοπικού ακροτάτου της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$** , αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = c\}$.

Η γενική μέθοδος αντιμετώπισης προβλημάτων ακροτάτων υπό συνθήκη είναι η λεγόμενη *μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange*. Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την μέθοδο αυτή μελετώντας το εξής πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια C^1 -συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω S μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ (για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι S είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$). Θέλουμε να βρούμε τα σημεία της S όπου η f όταν την περιορίζουμε πάνω στην S λαμβάνει την μεγαλύτερη ή την μικρότερη τιμή, με άλλα λόγια ψάχνουμε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο πάνω στην επιφάνεια S στο (x_0, y_0, z_0) . Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο πάνω στην επιφάνεια S στο (x_0, y_0, z_0) . Αυτό εξ ορισμού σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$ για όλα τα $(x, y, z) \in S \cap B_\delta(x_0, y_0, z_0)$.

Έστω C μια παραγωγίσιμη καμπύλη της S που διέρχεται από το $\mathbf{x}_0$. Η καμπύλη C μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ όπου I είναι ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $0 \in I$ και $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$. Τότε η συνάρτηση $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, παρουσιάζει στο $t = 0$ τοπικό ακρότατο. Επομένως, από τον Κανόνα Αλυσίδας (δείτε Πρόγραμμα 3.3.3),

$$F'(0) = \nabla f(\mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0$$

Άρα $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp \mathbf{r}'(0)$ για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ της S που διέρχεται από το $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S . Αν επιπλέον η S είναι ισοσταθμική επιφάνεια μιας C^1 συνάρτησης g δηλαδή $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = c\}$ τότε αν επιπλέον $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ το διάνυσμα $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην S στο σημείο (x_0, y_0, z_0) . Επομένως, θα πρέπει

$$(5.3.1) \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

αφού και τα δύο είναι κάθετα στην S στο ίδιο σημείο. Η σχέση (5.3.1) σημαίνει ότι θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$

²Αυτό είναι συνέπεια του Θεωρήματος των Πεπλεγμένων συναρτήσεων που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

τέτοιο ώστε

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Ο αριθμός αυτός λ καλείται *πολλαπλασιαστής Lagrange*. Η μέθοδος που αναπτύξαμε παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε διάσταση n και συνοψίζεται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.2. (Lagrange) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω $\mathbf{x}_0 \in A$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$. Αν $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$(5.3.2) \quad \nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$$

Παρατηρήσεις 5.3.3. (α) Η προϋπόθεση $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ του Θεωρήματος 5.3.2 είναι απαραίτητη για να ισχύει το θεώρημα (δείτε Παράδειγμα 5.3.8 παρακάτω).

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι και $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ τότε η σχέση 5.3.2 σημαίνει ότι οι ισοσταθμικές επιφάνειες $S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = c\}$ και $T = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ των g και f αντίστοιχα που διέρχονται από το $\mathbf{x}_0$ δέχονται κοινό εφαπτόμενο επίπεδο στο $\mathbf{x}_0$, με άλλα λόγια οι επιφάνειες S και T εφάπτονται στο $\mathbf{x}_0$.

Πόρισμα 5.3.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Αν $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $g(\mathbf{x}) = c$ τότε τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$ ικανοποιούν το σύστημα

$$(5.3.3) \quad \begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος 5.3.3 καλούνται και **κρίσιμα σημεία της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$** .

Παράδειγμα 5.3.5. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω στην ευθεία $y = x + 1$.

Λύση: Θέτουμε $g(x, y) = y - x - 1$. Επειδή $\nabla g(x, y) = (-1, 1) \neq (0, 0)$, έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y = \lambda \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει μόνο ένα σημείο το $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακροτάτου κάνουμε την εξής σκέψη: Καθώς οι ισοσταθμικές της f που είναι οι κύκλοι με κέντρο το $(0, 0)$ απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων η τιμή της f μεγαλώνει. Επομένως εκεί που εφάπτεται η ισοσταθμική με την ευθεία $y - x - 1 = 0$ θα έχουμε ελάχιστο για την f πάνω στην ευθεία γιατί κάθε άλλο σημείο της ευθείας είναι σημείο τομής της ευθείας με κύκλο μεγαλύτερης ακτίνας.

Παρατήρηση 5.3.6. Στην επόμενη παράγραφο θα δώσουμε έναν άλλο τρόπο λύσης του Παραδείγματος 5.3.5.

Παράδειγμα 5.3.7. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y + z$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Λύση: Θέτουμε $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και συνεπώς η συνθήκη γίνεται $g(x, y, z) = 1$. Έχουμε $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ όταν $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και άρα κάθε σημείο όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 1, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Από το παραπάνω σύστημα παίρνουμε ότι πιθανά τοπικά ακρότατα της f είναι τα σημεία

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{και} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Επειδή η επιφάνεια $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ που είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, και η f είναι συνεχής από το θεώρημα των ακροτάτων τιμών (Θεώρημα 5.1.2) έχουμε ότι η $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ λαμβάνει σίγουρα μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Με σύγκριση των τιμών της f στα παραπάνω δύο σημεία βλέπουμε ότι στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ λαμβάνεται η μέγιστη τιμή και αντίστοιχα στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 5.3.8. Δείξτε ότι το σημείο $(0, 1)$ είναι ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $g(x, y) = x^2 - (y - 1)^3 = 0$ (ισοδύναμα το σημείο $(0, 1)$ είναι το σημείο της καμπύλης $x^2 - (y - 1)^3 = 0$ που είναι το πλησιέστερο στο $(0, 0)$).

(2) Δείξτε ότι το $(0, 1)$ δεν μπορεί να εντοπισθεί με την μέθοδο των Πολλαπλασιαστών Lagrange. Ποιός είναι ο λόγος ;

Λύση. (1) Πράγματι, για κάθε σημείο (x, y) της καμπύλης $x^2 - (y - 1)^3 = 0$ ισχύει ότι

$$(y - 1)^3 = x^2 \geq 0 \Rightarrow (y - 1)^3 \geq 0 \Rightarrow y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$$

οπότε $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq y^2 \geq 1 = f(0, 1)$.

(2) Θα δούμε τώρα ότι το σύστημα

$$(5.3.4) \quad \begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

δεν έχει λύση.

Έχουμε $g_x(x, y) = 2x$, $g_y(x, y) = -3(y - 1)^2$, $f_x(x, y) = 2x$ και $f_y(x, y) = 2y$. Άρα το σύστημα (5.3.4) γράφεται

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x \\ 2y &= -3\lambda(y - 1)^2 \\ x^2 - (y - 1)^3 &= 0 \end{aligned}$$

Απο την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$(\lambda - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \lambda = 1$$

Αν $x = 0$ τότε η τρίτη εξίσωση δίνει $y = 1$ που όμως δεν ικανοποιεί την δεύτερη εξίσωση. Αν τώρα

$\lambda = 1$, η δεύτερη εξίσωση γράφεται

$$2y + 3(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2y + 3y^2 - 6y + 3 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 3 = 0$$

που είναι αδύνατη. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Ο λόγος για τον οποίο το $(0, 1)$ δεν εντοπίζεται από το σύστημα (5.3.4) είναι ότι

$$\nabla g(0, 1) = (g_x(0, 1), g_y(0, 1)) = (0, 0)$$

και άρα δεν ισχύει η υπόθεση $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ του Θεωρήματος Lagrange.

Στις επόμενες υποπαράγραφους δίνουμε και δύο άλλες μεθόδους εύρεσης τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκη.

5.3.1 Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με επίλυση της συνθήκης

Αν η συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$ λύνεται ως προς την μια από τις μεταβλητές τότε το πρόβλημα της εύρεσης των τοπικών ακροτάτων μετατρέπεται σε πρόβλημα εύρεσης ελεύθερων ακροτάτων χωρίς περιορισμό των μεταβλητών. Π.χ. το Παράδειγμα 5.3.5 θα μπορούσε να λυθεί ως εξής.

Παράδειγμα 5.3.9. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω στην ευθεία $y = x + 1$.

Λύση. Η εξίσωση της συνθήκης $y = x + 1$ είναι ήδη λυμένη ως προς y . Αντικαθιστούμε στον τύπο της f το y με $x + 1$ και έχουμε μια συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$F(x) = f(x, x+1) = x^2 + (x+1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$$

Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) ελάχιστο για την F αν και μόνο αν το $(x_0, x_0 + 1)$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) ελάχιστο για την f πάνω στην ευθεία $y = x + 1$. Ομοίως ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) μέγιστο για την F αν και μόνο αν το $(x_0, x_0 + 1)$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) μέγιστο για την f πάνω στην ευθεία $y = x + 1$. Με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα της εύρεσης των τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκη της συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$ ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης μιας μεταβλητής $F(x)$ χωρίς κάποια συνθήκη.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της F . Έχουμε

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Άρα η F έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο. Επειδή $F'(x) < 0$ για $x < -1/2$ και $F'(x) > 0$ για $x > -1/2$, η F είναι φθίνουσα για $x \leq -1/2$ και αύξουσα για $x \geq -1/2$ και συνεπώς στο $x = -1/2$ η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Ισοδύναμα, η f παρουσιάζει ένα μοναδικό τοπικό ακρότατο που είναι ειδικότερα ολικό ελάχιστο πάνω στην ευθεία $y = x + 1$ στο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Παράδειγμα 5.3.10. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz$ υπό την συνθήκη $x + y + z - 1 = 0$.

Λύση: Λύνοντας την συνθήκη ως προς z έχουμε $z = 1 - x - y$ οπότε αντικαθιστώντας στη f παίρνουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x, y) = f(x, y, 1 - x - y) = xy(1 - x - y) = xy - x^2y - xy^2$$

Παρατηρούμε ότι ένα σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $f(x, y, z)$ υπο την συνθήκη $x + y + z = 1$ αν και μόνο αν (x_0, y_0) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $F(x, y)$. Άρα το πρόβλημά μας απο πρόβλημα ακροτάτων τριών δεσμευμένων μεταβλητών μετατρέπεται σε πρόβλημα ελεύθερων τοπικών ακροτάτων δύο μεταβλητών. Μπορούμε να μελετήσουμε τα ακρότατα της F με τον τρόπο που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο δηλαδή βρίσκοντας πρώτα τα κρίσιμα σημεία της και εφαρμόζοντας μετά το κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου.

Ως γνωστόν τα κρίσιμα σημεία της F είναι οι λύσεις του συστήματος

$$F_x(x, y) = y - 2xy - y^2 = y(1 - 2x - y) = 0$$

$$F_y(x, y) = x - x^2 - 2xy = x(1 - x - 2y) = 0$$

Αν $y = 0$ τότε $x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$, οπότε τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ είναι κρίσιμα. Αν $x = 0$ τότε $y(1 - y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 1$, οπότε και το $(0, 1)$ είναι κρίσιμο. Αν $x, y \neq 0$ τότε έχουμε το σύστημα

$$2x + y = 1$$

$$x + 2y = 1$$

που δίνει το κρίσιμο σημείο $(1/3, 1/3)$.

Πάμε τώρα να εφαρμόσουμε το κριτήριο με τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους για να διακρίνουμε ποιά απο τα παραπάνω σημεία είναι τοπικά ακρότατα. Έχουμε

$$F_{xx}(x, y) = -2y, \quad F_{xy}(x, y) = 1 - 2x - 2y, \quad F_{yy}(x, y) = -2x$$

και

$$\Delta = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\Delta(0, 0) = -1 < 0$, $\Delta(1, 0) = -1 < 0$, $\Delta(0, 1) = -1 < 0$ και άρα όλα αυτά τα σημεία είναι σαγματικά. Επίσης $\Delta(1/3, 1/3) = 1/3 > 0$ και $F_{xx}(1/3, 1/3) = -2/3 < 0$ το σημείο $(1/3, 1/3)$ είναι το μοναδικό τοπικό μέγιστο της F . Άρα το σημείο $(1/3, 1/3, 1/3)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο της $f(x, y, z) = xyz$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 1$.

Παρατήρηση 5.3.11. Αν περιορισθούμε στην περίπτωση όπου τα x, y, z είναι όλα μη αρνητικά τότε το $(1/3, 1/3, 1/3)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου της $f(x, y, z) = xyz$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 1$. Πράγματι το σύνολο $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$ είναι κλειστό και φραγμένο (αποτελεί ένα ισοσκελές ορθογώνιο τετράεδρο στον $\mathbb{R}^3$ με κορυφή το $(0, 0, 0)$). Επειδή η $f(x, y, z) = xyz$ είναι συνεχής συνάρτηση, από το Θεώρημα των Ακροτάτων Τιμών, θα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο M . Επειδή αυτά είναι και σημεία τοπικών ακροτάτων θα πρέπει το σημείο ολικού μεγίστου της f στο M να είναι αναγκαστικά το $(1/3, 1/3, 1/3)$. (Το σημείο ολικού ελαχίστου είναι όπως εύκολα βλέπουμε το $(0, 0, 0)$). Έχουμε δηλαδή ότι για όλα τα $x, y, z \geq 0$ με $x + y + z = 1$ ισχύει ότι $xyz \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Γενικότερα, αν $c > 0$ τότε για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς ακέραιους x, y, z με $x + y + z = c$ ισχύει ότι $xyz \leq \left(\frac{c}{3}\right)^3$. Αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με δεδομένο άθροισμα ακμών ο κύβος έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

5.3.2 Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με παραμετρικοποίηση της συνθήκης

Μια άλλη μέθοδος για εύρεση τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκη είναι η παραμετρικοποίηση της συνθήκης.

Παράδειγμα 5.3.12. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x + y$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$.

Λύση: Έστω $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ μια παραμετρικοποίηση του μοναδιαίου κύκλου. Το πρόβλημα της εύρεσης των ακροτάτων της $f(x, y)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ ανάγεται στην εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής και συγκεκριμένα της της συνάρτησης

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = -x(t) - y(t) = \cos t + \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Όπως γνωρίζουμε τα πιθανά τοπικά ακρότατα της g περιέχονται είτε στα άκρα $0, 2\pi$ ή στα εσωτερικά σημεία του $[0, 2\pi]$ που μηδενίζουν την παράγωγο της g . Έχουμε

$$g'(t) = \sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ ή } t = \frac{5\pi}{4}$$

Επειδή η g σίγουρα λαμβάνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή (ως συνεχής σε κλειστό φραγμένο διάστημα) και

$$g(0) = g(2\pi) = 1, \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

συγκρίνοντας τις τιμές έπεται ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $t = \frac{5\pi}{4}$ και μέγιστο στο $t = \frac{\pi}{4}$.

Άρα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο σημείο $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ και μέγιστη στο $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

5.3.3 Ακρότατα σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με εσωτερικό

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και φραγμένο με μη κενό εσωτερικό (πχ. το D είναι ένας κλειστός δίσκος του $\mathbb{R}^2$). Αν $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τότε από το Θεώρημα 5.1.2 η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στο D . Επειδή το D είναι κλειστό ισχύει ότι $D = D^\circ \cup \partial D$. Για να προσδιορίσουμε τα σημεία αυτά εργαζόμαστε ως εξής:

- (i) Βρίσκουμε πρώτα τα **κρίσιμα σημεία της f στο εσωτερικό του D** δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$(5.3.5) \quad \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Από το Θεώρημα Fermat κάθε τοπικό ακρότατο του περιορισμού της f στο εσωτερικό του D είναι του παραπάνω συστήματος.

- (ii) Βρίσκουμε τα **κρίσιμα σημεία της f στο σύνολο του D** . Αν $g(\mathbf{x}) = c$ είναι η εξίσωση του συνόρου του D και $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \partial D$ τότε για να προσδιορίσουμε τα σημεία αυτά

επιλύουμε το σύστημα

$$(5.3.6) \quad \begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

Από το Θεώρημα Lagrange κάθε τοπικό ακρότατο του περιορισμού της f πάνω στο σύνορο του D είναι λύση αυτού του παραπάνω συστήματος.

- (iii) Συγκρίνουμε τις τιμές της f στα σημεία που βρήκαμε στα προηγούμενα δύο βήματα. Η μεγαλύτερη τιμή αντιστοιχεί στα σημεία όπου έχουμε ολικό μέγιστο της f στο D και η μικρότερη στα σημεία όπου έχουμε ολικό ελάχιστο της f στο D .

Παράδειγμα 5.3.13. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$$

πάνω στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Λύση: Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσιμα στο εσωτερικό του D . Έχουμε $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$ και άρα

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Περνάμε τώρα στην εύρεση των ακροτάτων στο σύνορο του D που σημαίνει στα τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Επειδή $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ για όλα τα $(x, y) \in \partial D$ τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(x, y) = 1$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$(5.3.7) \quad \begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = 1 \end{cases}$$

Επειδή $x^2 + y^2 = 1$ ο τύπος της f απλοποιείται και παίρνει την μορφή $f(x, y) = 1 - x - y$. Άρα το σύστημα στην (5.3.7) γράφεται

$$\begin{cases} (-1, -1) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Βλέπουμε εύκολα ότι οι λύσεις του συστήματος είναι τα σημεία

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ και } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Έχουμε

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

και

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

Συγκρίνοντας τις τιμές, βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ολικό μέγιστο στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

6.1 Πεπλεγμένες συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα της επίλυσης μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών

$$(6.1.1) \quad F(x, y) = 0$$

ως προς τη μία από τις μεταβλητές συναρτήσει της άλλης. Θέλουμε δηλαδή να δώσουμε κάποιες συνθήκες ώστε δεδομένης της εξίσωσης (6.1.1) να υπάρχει μια λύση της μορφής

$$(6.1.2) \quad y = f(x) \quad \text{ή} \quad x = g(y).$$

Το ερώτημα αυτό έχει και την εξής γεωμετρική διατύπωση: Πότε το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $F(x, y) = 0$, αποτελεί το ίχνος μιας «φυσιολογικής» καμπύλης του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή είναι το γράφημα μιας συνάρτησης από ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$; Ας δούμε δύο παραδείγματα.

Αν έχουμε την εξίσωση που περιγράφει μια ευθεία του επιπέδου,

$$(6.1.3) \quad ax + by + c = 0$$

τότε αν $b \neq 0$, η (6.1.3) λύνεται ως προς τη μεταβλητή y ,

$$(6.1.4) \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

και συνεπώς όλα τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την (6.1.3) αποτελούν το γράφημα της συνάρτησης (6.1.4).

Από την άλλη πλευρά, αν η εξίσωση περιγράφει τον μοναδιαίο κύκλο

$$(6.1.5) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά y_1, y_2 με $F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0$ και αντίστοιχα για κάθε $y \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά x_1, x_2 με $F(x_1, y) = F(x_2, y) = 0$. Συνεπώς, η εξίσωση $x^2 + y^2 - 1 = 0$ δεν μπορεί να επιλυθεί πλήρως ως προς καμία από τις μεταβλητές x, y . Όμως, αν περιορίσουμε τα (x, y) με $F(x, y) = 0$ που θεωρούμε, τότε μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$

ως προς μία μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Για παράδειγμα, αν περιοριστούμε στο άνω ημικύκλιο (δηλαδή για $y \geq 0$), έχουμε

$$F(x, y) = 0 \text{ και } y \geq 0 \iff y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1].$$

Ομοίως,

$$F(x, y) = 0 \text{ και } x \leq 0 \iff x = -\sqrt{1 - y^2}, y \in [-1, 1].$$

Όπως θα δούμε στην συνέχεια το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης λέει ότι κάτω από κάποιες απλές συνθήκες μια εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$ μπορεί να επιλυθεί ως προς μια μεταβλητή τοπικά σε κάθε σημείο (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$.

Ορισμός 6.1.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Λέμε ότι η $F(x, y) = 0$ **λύνεται ως προς y γύρω από το (x_0, y_0)** αν υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ και $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ τέτοιο ώστε $F(x, y) = 0$. Η συνάρτηση $y = f(x)$ που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$ λέμε ότι ορίζεται **πεπλεγμένα μέσω της $F(x, y) = 0$ γύρω από το (x_0, y_0)** .

Θεώρημα 6.1.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Αν $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ τότε η $F(x, y) = 0$ λύνεται ως προς y γύρω από το (x_0, y_0) .

Η συνάρτηση $y = f(x)$ που ορίζεται πεπλεγμένα μέσω της $F(x, y) = 0$ γύρω από το (x_0, y_0) , είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει ότι

$$(6.1.6) \quad f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \Big|_{y=f(x)}$$

Ειδικότερα,

$$(6.1.7) \quad f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Παρατηρήσεις 6.1.3. (1) Το παράδειγμα της ευθείας $F(x, y) = ax + by + c = 0$ που δώσαμε προηγουμένως είναι ένα απλό παράδειγμα που επιβεβαιώνει τη συνθήκη $F_y(x, y) \neq 0$. Πράγματι, η F λύνεται ως προς y συναρτήσει του x αν $b = F_y(x, y) \neq 0$.

(2) Παρατηρήστε ότι η επίλυση της $F(x, y) = 0$ ως προς $y = f(x)$ είναι τοπική στο (x_0, y_0) , δηλαδή υπάρχει μια περιοχή X του x_0 και μια περιοχή Y του y_0 , όπου η $F(x, y) = 0$ λύνεται ως προς y συναρτήσει του x . Γενικά όμως μπορεί για κάποια ή και για όλα τα $x \in X$ να υπάρχουν και άλλα y που δεν ανήκουν στο Y αλλά ικανοποιούν την $F(x, y) = 0$. Στο παράδειγμα όπου $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, αν $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $X = (-1, 1)$ και $Y = (0, 2)$ έχουμε $F(x, +\sqrt{1 - x^2}) = 0$ για κάθε $x \in X$ (εδώ $f(x) = +\sqrt{1 - x^2}$), ενώ για $Y = (-2, 0)$, $F(x, -\sqrt{1 - x^2}) = 0$, πάλι για κάθε $x \in X$ (και άρα $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$).

(3) Γενικά η συνάρτηση $y = y(x)$ που επιλύει την $F(x, y) = 0$ ως προς y στο (x_0, y_0) όταν $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ συνήθως δεν δίνεται από κάποιον κλειστό τύπο, ούτε και τα διαστήματα X και Y μπορούν να προσδιορισθούν εύκολα. Αυτό που γνωρίζουμε για την $y = y(x)$ είναι ότι ανήκει στην κλάση C^1 . Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $F \in C^k(A)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ (ή αντίστοιχα C^∞) τότε και η $y = y(x)$ είναι $C^k(X)$ (αντίστοιχα C^∞).

Με εναλλαγή των x και y έχουμε τα εξής. Καταρχάς θα λέμε ότι η εξίσωση $F(x, y) = 0$ **λύνεται ως προς x γύρω από το (x_0, y_0)** αν υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ και $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ τέτοια ώστε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει μοναδικό $x \in X$ τέτοιο ώστε $F(x, y) = 0$. Η συνάρτηση $x = f(y)$ που στέλνει κάθε $y \in Y$ στο μοναδικό $x \in X$ με $F(x, y) = 0$ λέμε ότι ορίζεται **πεπλεγμένα μέσω της $F(x, y) = 0$ γύρω από το (x_0, y_0)** .

Θεώρημα 6.1.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Αν $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ τότε η $F(x, y) = 0$ λύνεται ως προς x γύρω από το (x_0, y_0) . Η συνάρτηση $x = f(y)$ που ορίζεται πεπλεγμένα μέσω της $F(x, y) = 0$ γύρω από το (x_0, y_0) , είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει ότι

$$(6.1.8) \quad f'(y) = - \frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \Big|_{x=f(y)}$$

Ειδικότερα,

$$(6.1.9) \quad f'(y_0) = - \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

Παράδειγμα 6.1.5. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 e^y + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα γύρω από το $(0, 1)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = y(x)$ με $y'(0) = 0$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F(x, y) = x^2 e^y + y - 1$ είναι C^1 με

$$F_x(x, y) = 2xe^y, \quad F_y(x, y) = x^2 e^y + 1$$

Επειδή $F(0, 1) = 0$ και $F_y(x, y) \neq 0$ από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης έχουμε ότι η εξίσωση $x^2 e^y + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα γύρω από το $(0, 1)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = y(x)$ με

$$y'(0) = - \frac{F_x(0, 1)}{F_y(0, 1)} = - \frac{0}{1} = 0.$$

□

Παράδειγμα 6.1.6. Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη σε ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$ με κέντρο το $x_0 = 1$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = 2x^{f(x)}$, για όλα τα $x \in I$.

Απόδειξη. Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = 2x^y \iff 2x^y - y = 0$. Θέτουμε $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x, y) = 2x^y - y.$$

Έχουμε

$$F_x(x, y) = 2yx^{y-1} \text{ και } F_y(x, y) = 2 \ln x \cdot x^y - 1$$

και άρα η F είναι C^1 . Επίσης,

$$F(1, 2) = 0 \text{ και } F_y(1, 2) = -1 \neq 0.$$

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται ως προς y γύρω από το $(1, 2)$, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα X και Y με κέντρα τα $x_0 = 1$ και $y_0 = 2$ αντίστοιχα, και μια C^1 συνάρτηση

$f : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$, για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Συνεπώς, $f(1) = 2$ και $F(x, f(x)) = 0 \iff 2x^{f(x)} - f(x) = 0 \iff f(x) = 2x^{f(x)}$, για κάθε $x \in X$. $\square$

Τα Θεωρήματα 6.1.2 και 6.1.4 έχουν και την εξής γεωμετρική συνέπεια:

Πόρισμα 6.1.7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω

$$C = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$$

Τότε για οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0) \in C$ με

$$(6.1.10) \quad \nabla F(x_0, y_0) = (F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)) \neq \mathbf{0}$$

υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ και $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ τέτοια ώστε αν $R = X \times Y$ είναι το ανοικτό ορθογώνιο με πλευρές τα X και Y και με κέντρο το (x_0, y_0) η τομή $R \cap C$ είναι η γραφική παράσταση μιας C^1 πραγματικής συνάρτησης από το X στο Y ή από το Y στο X με το $\nabla F(x_0, y_0)$ να είναι κάθετο στην εφαπτομένη της.

Το παραπάνω πόρισμα λέει ότι γύρω από το σημείο (x_0, y_0) η C είναι μια παραγωγίσιμη καμπύλη με την εφαπτομένη της να δίνεται από τον τύπο

$$(6.1.11) \quad \nabla F(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$(6.1.12) \quad f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Στην περίπτωση όπου $\nabla F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ για όλα τα $(x_0, y_0) \in C$ τότε έχουμε ότι η C είναι μια ένωση από μικρές διαφορίσιμες καμπύλες.

Παράδειγμα 6.1.8. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$$

στο σημείο $(1, 0)$.

Λύση. Έχουμε

$$F_x(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad F_y(x, y) = 3y^2 - 3x$$

Άρα η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 1ης τάξης και

$$\nabla F(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$$

Επίσης $\nabla F(1, 0) = (3, -3) \neq \mathbf{0}$. Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $F(x, y) = 0$ στο σημείο $(1, 0)$ δίδεται από τον τύπο

$$\nabla F(1, 0) \cdot (x - 1, y) = (3, -3) \cdot (x - 1, y) = 3(x - 1) - 3y = 3x - 3y - 1 = 0$$

Το παραπάνω πόρισμα λέει ότι γύρω από το σημείο (x_0, y_0) η C είναι μια παραγωγίσιμη καμπύλη

με την εφαπτομένη της να δίνεται από τον τύπο

$$(6.1.13) \quad \nabla F(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$(6.1.14) \quad f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Στην περίπτωση όπου $\nabla F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ για όλα τα $(x_0, y_0) \in C$ τότε έχουμε ότι η C είναι μια ένωση από μικρές διαφορίσιμες καμπύλες.

6.2 Πεπλεγμένες συναρτήσεις τριών μεταβλητών

Ορισμός 6.2.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0, z_0) \in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Λέμε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ **λύνεται ως προς z γύρω από το σημείο** (x_0, y_0, z_0) αν υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ και $Z = (z_0 - \delta_3, z_0 + \delta_3)$ τέτοια ώστε για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ υπάρχει μοναδικό $z \in Z$ τέτοιο ώστε $F(x, y, z) = 0$. Η συνάρτηση $g : X \times Y \rightarrow Z$ που στέλνει κάθε $(x, y) \in X \times Y$ στο μοναδικό $z \in Z$ με $F(x, y, z) = 0$ λέμε ότι ορίζεται **πεπλεγμένα μέσω της** $F(x, y, z) = 0$ **γύρω από το** (x_0, y_0, z_0) .

Θεώρημα 6.2.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό σύνολο, $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0, z_0) \in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Αν $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ τότε η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς z γύρω από το (x_0, y_0, z_0) . Η συνάρτηση $z = f(x, y)$ που ορίζεται πεπλεγμένα μέσω της $F(x, y, z) = 0$ γύρω από το (x_0, y_0, z_0) έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και ισχύει ότι

$$(6.2.1) \quad f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_{z=f(x, y)} \quad \text{και} \quad f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_{z=f(x, y)}$$

Ειδικότερα,

$$(6.2.2) \quad f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{και} \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Αντίστοιχα διατυπώνεται το Θεώρημα 6.2.2 όταν $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ή $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Παράδειγμα 6.2.3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

λύνεται ως προς z στο $(1, 1, 2)$.

Λύση. Πράγματι,

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz, \quad F_y(x, y, z) = 3y^2 - 3xz, \quad F_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

Άρα, η F είναι C^1 . Επιπλέον, $F(1, 1, 2) = 0$ και $F_z(1, 1, 2) = 12 - 3 = 9 \neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 6.2.2 μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή $U = X \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$ του $(1, 1)$ και ανοικτή περιοχή $Z \subseteq \mathbb{R}$ του $z = 2$ ώστε για κάθε $(x, y) \in U$ να υπάρχει μοναδικό $z = z(x, y) \in Z$ με $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Επίσης,

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_{z=z(x, y)}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_{z=z(x, y)}$$

και άρα (αφού $z(1,1) = 2$),

$$z_x(1,1) = -\frac{-3}{9} = 1/3, \quad z_y(1,1) = -\frac{-3}{9} = 1/3.$$

Παράδειγμα 6.2.4. Δίνεται η συνάρτηση $F(x, y, z) = z^3 + z - x^2 - y^2 - 2$.

(α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς z στο $(0, 0, 1)$.

(β) Αποδείξτε ότι η $z(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(γ) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ δεύτερης τάξης της $z = z(x, y)$ με κέντρο το $(0, 0)$ και υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x, y) - z(0, 0)}{x^2 + y^2}$.

Λύση. (α) Η F είναι C^2 συνάρτηση ως πολυωνυμική. Επίσης έχουμε $F(0, 0, 1) = 0$ και $F_z(x, y, z) = 3z^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (οπότε και $F_z(0, 0, 1) \neq 0$). Άρα, η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς z γύρω από το $(0, 0)$.

(β) Έχουμε $F_x(x, y, z) = -2x$, $F_y(x, y, z) = -2y$ και όπως είδαμε $F_z(x, y, z) = 3z^2 + 1$. Υπολογίζουμε:

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}_{z=z(x,y)} = \frac{2x}{3z^2(x, y) + 1}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}_{z=z(x,y)} = \frac{2y}{3z^2(x, y) + 1}$$

και άρα

$$\begin{aligned} z_{xx}(x, y) &= \frac{2(3z^2(x, y) + 1) - 2x \cdot 6z(x, y)z_x(x, y)}{(3z^2 + 1)^2} \\ z_{yy}(x, y) &= \frac{2(3z^2(x, y) + 1) - 2y \cdot 6z(x, y)z_y(x, y)}{(3z^2(x, y) + 1)^2} \\ z_{xy}(x, y) &= \frac{-2x \cdot 6z(x, y)z_y(x, y)}{(3z^2(x, y) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Άρα, επειδή $z(0, 0) = 1$, $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$. Συνεπώς το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την $z = z(x, y)$. Επιπλέον, $z_{xx}(0, 0) = z_{yy}(0, 0) = 8/16 = 1/2$ και $z_{xy}(0, 0) = 0$. Άρα, $z_{xx}(0, 0) > 0$ και $\Delta = z_{xx}(0, 0) \cdot z_{yy}(0, 0) - z_{xy}(0, 0)^2 = 1/4 > 0$ και άρα, από το κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου, η $z(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(β) Έχουμε

$$T_2(x, y) = z(0, 0) + z_x(0, 0)x + z_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (z_{xx}(0, 0)x^2 + 2z_{xy}(0, 0)xy + z_{yy}(0, 0)y^2)$$

και άρα αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

Από το θεώρημα Taylor II έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x, y) - 1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{z(x, y) - 1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{4} \right] = 0.$$

Συνεπώς, αφού $z(0, 0) = 1$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}.$$

Η γεωμετρική συνέπεια του θεωρήματος 6.2.2 (ή των αντιστοιχών του όταν $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ή $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$) είναι η εξής:

Πόρισμα 6.2.5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω

$$S = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = 0\}.$$

Τότε για οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$ με

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$$

υπάρχει ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R με κέντρο το (x_0, y_0, z_0) τέτοιο ώστε η τομή $R \cap S$ είναι η γραφική παράσταση μιας C^1 πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών. Επιπλέον το διάνυσμα $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας αυτής στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Το παραπάνω πόρισμα λέει ότι γύρω από το σημείο (x_0, y_0, z_0) η S είναι μια διαφορίσιμη επιφάνεια της οποίας το εφαπτόμενο επίπεδό της δίνεται από τον τύπο

$$(6.2.3) \quad \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$(6.2.4) \quad f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Στην περίπτωση όπου $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ για όλα τα $(x_0, y_0, z_0) \in S$ τότε έχουμε ότι η S είναι μια ένωση από μικρές διαφορίσιμες επιφάνειες.

Παράδειγμα 6.2.6. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

στο σημείο $(1, 1, 2)$.

Λύση. Έχουμε

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz, \quad F_y(x, y, z) = 3y^2 - 3xz, \quad F_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

Άρα η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 1ης τάξης. Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας $F(x, y, z) = 0$ στο σημείο $(1, 1, 2)$ δίδεται από τον τύπο

$$\nabla F(1, 1, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = 0$$

Επειδή

$$F_x(1, 1, 2) = -3, \quad F_y(1, 1, 2) = -3, \quad F_z(1, 1, 2) = 9$$

η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}\nabla F(1, 1, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) &= 0 \Leftrightarrow (-3, -3, 9) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3(x - 1) - 3(y - 1) + 9(z - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y - 3z + 4 = 0.\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Διπλό ολοκλήρωμα

Με τον όρο **διπλό ολοκλήρωμα** εννοούμε το ολοκλήρωμα μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών. Αποτελεί μια φυσιολογική επέκταση του ολοκληρώματος μιας μεταβλητής και συμβολίζεται με

$$\iint_D f \quad \text{ή} \quad \iint_D f(x,y) \, dA \quad \text{ή} \quad \iint_D f(x,y) \, dx \, dy$$

όπου D είναι ένα χωρίο του $\mathbb{R}^2$ όπου ορίζεται η f . Αν $f(x,y) \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in D$ τότε το ολοκλήρωμα παριστάνει τον **όγκο** του στερεού που βρίσκεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του επιπέδου xy . Για παράδειγμα αν $f(x,y) = c > 0$ τότε το ολοκλήρωμα παριστάνει τον όγκο ενός ορθογώνιου κυλίνδρου με βάση το D και ύψους c . Ειδικότερα, αν $c = 1$ τότε το ολοκλήρωμα ισούται αριθμητικά με το **εμβαδόν** του χωρίου D .

Το διπλό ολοκλήρωμα ορίζεται όπως και το ολοκλήρωμα συνάρτησης μιας μεταβλητής χρησιμοποιώντας τα αθροίσματα Riemann. Μια σημαντική διαφορά όμως είναι ότι ενώ το ολοκλήρωμα μιας μεταβλητής γίνεται πάνω σε ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, στο διπλό ολοκλήρωμα το χωρίο D επί του οποίου γίνεται η ολοκλήρωση μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκο. Εδώ θα ασχοληθούμε με ομαλά επίπεδα χωρία όπου τα διπλά ολοκληρώματα θα ανάγονται σε δύο διαδοχικά απλά (δηλαδή μιας μεταβλητής) ολοκληρώματα (δείτε τα θεωρήματα Fubini παρακάτω).

7.1 Ολοκλήρωση σε ορθογώνια

Η θεμελίωση του διπλού ολοκληρώματος ξεκινά με την απλούστερη δυνατή περίπτωση όπου το χωρίο ολοκλήρωσης είναι ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$,

$$R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta\}$$

όπου $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ πραγματικοί αριθμοί.

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για να ορίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα είναι απλή γενίκευση της αντίστοιχης που χρησιμοποιήθηκε στο ολοκλήρωμα συνάρτησης μιας μεταβλητής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(R)$ το εμβαδόν του R ,

$$\mathcal{E}(R) = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma).$$

Διαμέριση του ορθογωνίου $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ είναι ένα σύνολο της μορφής

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$$

όπου $\mathcal{P}_1 = \{\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta\}$ και $\mathcal{P}_2 = \{\gamma = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = \delta\}$ είναι διαμερίσεις των $[\alpha, \beta]$ και $[\gamma, \delta]$ αντίστοιχα. Κάθε τέτοια διαμέριση είναι συνεπώς ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων

$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\} \subseteq R$$

Η διαμέριση $\mathcal{P}$ διαμερίζει το R στα υποορθογώνια

$$R_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

που ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά και η ένωσή τους ισούται με το R . Για κάθε $0 \leq i \leq n-1$ και $0 \leq j \leq m-1$ θέτουμε

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad \text{και} \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του R_{ij} είναι

$$\mathcal{E}(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$$

Ορίζουμε επίσης,

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{ \|\mathcal{P}_1\|, \|\mathcal{P}_2\| \}$$

όπου $\|\mathcal{P}_1\| = \max \{ \Delta x_i : 0 \leq i \leq n-1 \}$ και $\|\mathcal{P}_2\| = \max \{ \Delta y_j : 0 \leq j \leq m-1 \}$. **Επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την διαμέριση $\mathcal{P}$** είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων

$$T = \{T_{ij} : 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}$$

με την ιδιότητα $T_{ij} \in R_{ij}$ για κάθε $0 \leq i \leq n-1$ και $0 \leq j \leq m-1$.

Αν $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ και T όπως παραπάνω, το άθροισμα

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}, T) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(T_{ij}) \mathcal{E}(R_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(T_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

καλείται **άθροισμα Riemann της f ως προς την διαμέριση $\mathcal{P}$ και την επιλογή T** .

Η f λέγεται **ολοκληρώσιμη** στο R αν υπάρχει $I \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|I - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}, T)| < \varepsilon$ για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του R με $\|\mathcal{P}\| < \delta$ και όλες τις επιλογές T ενδιάμεσων σημείων ως προς την $\mathcal{P}$.

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \mathcal{S}(f, \mathcal{P}, T) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(T_{ij}) \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

Ο αριθμός I καλείται **ολοκλήρωμα της f στο R** και συμβολίζεται με

$$\iint_R f \quad \acute{\eta} \quad \iint_R f(x, y) \, dA \quad \acute{\eta} \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy$$

Παράδειγμα 7.1.1. Έστω $f(x, y) = c \in \mathbb{R}$ για κάθε $(x, y) \in R$. Τότε, για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του R και κάθε επιλογή T ενδιάμεσων σημείων έχουμε

$$S(f, \mathcal{P}, T) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} c \mathcal{E}(R_{ij}) = c \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}(R_{ij}) = c \mathcal{E}(R)$$

δηλαδή, όλα τα αθροίσματα Riemann της f είναι ίσα με $c \mathcal{E}(R)$ και άρα

$$\iint_R f = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}, T) = c \mathcal{E}(R).$$

Παράδειγμα 7.1.2. Θεωρούμε το ορθογώνιο $R = [0, 1] \times [0, 1]$ και τη συνάρτηση $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν και ο } x \text{ και ο } y \text{ είναι και οι δύο ρητοί στο } [0, 1] \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η f δεν είναι ολοκληρώσιμη. Πράγματι, αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του R , τότε λόγω της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων στο $[0, 1]$, υπάρχουν επιλογές ενδιάμεσων σημείων που περιέχουν μόνο ρητά σημεία καθώς και επιλογές που περιέχουν μόνο άρρητα σημεία. Αν όμως μια επιλογή T αποτελείται από ρητά σημεία τότε

$$S(f, \mathcal{P}, T) = 1$$

ενώ αν η T αποτελείται από άρρητα σημεία

$$S(f, \mathcal{P}, T) = 0$$

Αυτό δείχνει ότι το όριο $\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}, T)$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Αποδεικνύονται οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος.

Πρόταση 7.1.3. Έστω R ορθογώνιο, $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

(α) Οι $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$ και $|f|$ είναι ολοκληρώσιμες.

(β) (**Γραμμικότητα**) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό:

$$\iint_R (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_R f + \mu \iint_R g.$$

(γ) (**Μονοτονία**) Εάν $f \leq g$ στο R , τότε

$$\iint_R f \leq \iint_R g.$$

(δ) (**Τριγωνική Ανισότητα**) Ισχύει η ανισότητα

$$\left| \iint_R f \right| \leq \iint_R |f|.$$

Πρόταση 7.1.4. (**Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες**) Έστω R ορθογώνιο και $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R .

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων συνεχών συναρτήσεων είναι το Θεώρημα Fubini που λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα κάνοντας δύο φορές διαδοχική απλή ολοκλήρωση ως προς x και y με οποιαδήποτε σειρά θέλουμε.

Θεώρημα 7.1.5. (Θεώρημα Fubini για ορθογώνια) Έστω $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ και $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\gamma}^{\delta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right) dy.$$

Τα δύο ολοκληρώματα στο Θεώρημα 7.1.5 καλούνται **επάλληλα** (ή **διαδοχικά**) ολοκληρώματα. Το θεώρημα Fubini λέει ότι αν για κάθε $x \in [a, b]$, θέσουμε $F(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy$ τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx$$

και ομοίως αν θέσουμε $G(y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx$ για κάθε $y \in [\gamma, \delta]$, τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\gamma}^{\delta} G(y) dy$$

Παρατήρηση 7.1.6. Κάποιες φορές έχει σημασία η σειρά που θα διαλέξουμε για την διαδοχική ολοκλήρωση. Παρατηρείστε ότι είναι πιο δύσκολο να υπολογίσουμε τα παρακάτω ολοκληρώματα αν αλλάξουμε την σειρά της διαδοχικής ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 7.1.7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_R y \sin(xy) dx dy$ όπου $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_R y \sin(xy) dx dy &= \int_0^{\pi} \left[\int_1^2 y \sin(xy) dx \right] dy \\ &= - \int_0^{\pi} \cos(xy) \Big|_{x=1}^{x=2} dy \\ &= - \int_0^{\pi} (\cos(2y) - \cos(y)) dy = - \left(\frac{\sin(2y)}{2} - \sin y \right) \Big|_{y=0}^{y=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.1.8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_R x e^{xy} dx dy$ όπου $R = [0, 2] \times [0, 1]$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_R x e^{xy} dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 x e^{xy} dy \right) dx \\ &= \int_0^2 e^{xy} \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^2 = e^2 - 3 \end{aligned}$$

7.2 Ολοκλήρωση σε γενικότερα χωρία

Δίνουμε τώρα τον ορισμό ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε ένα γενικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 7.2.1. Έστω D μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και R ορθογώνιο με $D \subseteq R$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{αν } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{αν } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη στο D** αν η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο R .

Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε

$$\iint_D f = \iint_R \tilde{f}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός του $\iint_D f$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του ορθογωνίου R με $D \subseteq R$. Με βάση τον Ορισμό 7.2.1 ενδέχεται για κάποιο φραγμένο σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ακόμα και οι σταθερές συναρτήσεις να μην είναι ολοκληρώσιμες στο D . Π. χ. στο Παράδειγμα 7.1.2 ουσιαστικά είδαμε ότι στο χωρίο

$$D = \{(x, y) : x, y \text{ ρητοί στο } [0, 1]\}$$

δεν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\iint_D 1 dx dy$.

Αποδεικνύεται ότι αν το συνορό του D είναι μια ένωση από γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων μιας μεταβλητής τότε δεν υπάρχει πρόβλημα με την ολοκλήρωση συνεχών συναρτήσεων στο D . Τέτοιου είδους χωρία περιγράφονται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.2.2. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$.

(1) Το D λέγεται **κατακόρυφα απλό** (ή **y-απλό**) αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_1 \leq g_2$ τέτοιες ώστε

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

(2) Το D λέγεται **οριζόντια απλό** (ή **x-απλό**) αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h_1 \leq h_2$ τέτοιες ώστε

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

(3) Το D λέγεται **απλό** αν είτε είναι κατακόρυφα απλό είτε είναι οριζόντια απλό.

Παράδειγμα 7.2.3. Αν D είναι ένα ορθογώνιο ή ένας κλειστός δίσκος τότε το D είναι ταυτόχρονα και κατακόρυφα και οριζόντια απλό. Π.χ.

$$\begin{aligned} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\} \end{aligned}$$

Το Θεώρημα 7.1.5 γενικεύεται τώρα για απλά χωρία ως εξής.

Θεώρημα 7.2.4. (Θεώρημα Fubini για απλά χωρία) Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(1) Αν το D είναι ένα κατακόρυφα απλό χωρίο, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

(2) Αν το D είναι ένα οριζόντια απλό χωρίο, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ τότε,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Παράδειγμα 7.2.5. Υπολογίστε το $\iint_D e^{y^2} dx dy$ όπου D το τριγωνικό χωρίο που φράσσεται από την ευθεία $y = x$, τον άξονα Oy και την ευθεία $y = 1$.

Λύση. Για σταθερό $y \in [0, 1]$ το x βρίσκεται μεταξύ 0 και y . Συνεπώς,

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{2}.$$

Σημειώνουμε ότι το A είναι ταυτόχρονα και οριζόντια απλό, αλλά δεν εξυπηρετεί να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y διότι η e^{y^2} δεν έχει παράγουσα η οποία να εκφράζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Παράδειγμα 7.2.6. Υπολογίστε το $I := \iint_D x dx dy$ όπου D το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, την ευθεία $x = 1$ και τους θετικούς ημιάξονες.

Λύση. Για σταθερό $x \in [0, 1]$ το y βρίσκεται μεταξύ 0 και $\sqrt{4-x^2}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx = \int_0^1 x \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_3^4 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{3/2} \Big|_{u=3}^{u=4} = \frac{4^{3/2} - 3^{3/2}}{3}. \end{aligned}$$

Είναι χρήσιμο κάποιες φορές να παρατηρούμε και την συμμετρία του D καθώς και της συνάρτησης f ως προς τους άξονες. Σχετικό είναι το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.2.7. Υπολογίστε το $I := \iint_D \frac{x^3}{x^4 + y^4 + 1} dx dy$ όπου D το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, τον άξονα x' και βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $y \geq 0$.

Λύση. Για σταθερό $y \in [0, 1]$ το x βρίσκεται μεταξύ $-\sqrt{1-y^2}$ και $\sqrt{1-y^2}$. Συνεπώς,

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^3}{x^4 + y^4 + 1} dx \right) dy.$$

Όμως, η $x \mapsto \frac{x^3}{x^4 + y^4 + 1}$ είναι περιττή συνάρτηση, άρα το εσωτερικό ολοκλήρωμα ισούται με 0 για κάθε $y \in [0, 1]$. Έπεται ότι $I = 0$.

Όταν το χωρίο D διασπάται σε μικρότερα απλά χωρία με μη επικαλυπτόμενα εσωτερικά έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 7.2.8. Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $D = D_1 \cup D_2$ όπου D_1, D_2 απλά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με ξένα εσωτερικά, τότε

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

Παράδειγμα 7.2.9. Υπολογίστε το $I := \iint_D (x+y) dx dy$ όπου D το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=2$ και τους θετικούς ημιάξονες.

Λύση. Γράφουμε $D = D_1 \cup D_2$, όπου D_1 το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x + y = 1$, $x + y = 2$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$, και D_2 το τρίγωνο που φράσσεται από τις ευθείες $x + y = 2$, $x = 1$ και τον ημιάξονα Ox . Έχουμε ότι τα D_1, D_2 έχουν ξένα εσωτερικά και άρα

$$I := \iint_D (x + y) dx dy = \iint_{D_1} (x + y) dx dy + \iint_{D_2} (x + y) dx dy.$$

Υπολογίζουμε πρώτα το

$$\iint_{D_1} (x + y) dx dy.$$

Για σταθερό $x \in [0, 1]$ έχουμε $y \in [1 - x, 2 - x]$, άρα

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} (x + y) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_{1-x}^{2-x} (x + y) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x + y)^2 \Big|_{y=1-x}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2^2 - 1^2) dx = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα το

$$\iint_{D_2} (x + y) dx dy.$$

Για σταθερό $x \in [1, 2]$ έχουμε $y \in [0, 2 - x]$, άρα

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} (x + y) dx dy &= \int_1^2 \left[\int_0^{2-x} (x + y) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (x + y)^2 \Big|_{y=0}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (2^2 - x^2) dx \\ &= 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx = 2 - \frac{1}{6} x^3 \Big|_{x=1}^{x=2} = 2 - \frac{1}{6} (2^3 - 1) = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$I = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

7.3 Ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες

Στην Ολοκλήρωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής η αλλαγή μεταβλητών μετασχηματίζει ένα πολύπλοκο ολοκλήρωμα σε ένα πολύ απλούστερο. Στον Λογισμό Πολλών μεταβλητών η αλλαγή μεταβλητών είναι επίσης πολύ χρήσιμη. Εδώ εκτός από την απλοποίηση της ολοκληρωτέας συνάρτησης η αλλαγή μεταβλητών στοχεύει και σε πολικές συντεταγμένες, στην απλοποίηση του χωρίου ολοκλήρωσης. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την αλλαγή μεταβλητών και Θυμίζουμε ότι οι πολικές συντεταγμένες (ϑ, r) και οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) ενός σημείου του $\mathbb{R}^2$ συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \sin \vartheta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Το r είναι πάντα μη αρνητικό. Το ϑ συνήθως περιορίζεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ αλλά μερικές φορές βολεύει να παίρνει και αρνητικές τιμές. Π. χ. η ανισότητα $\cos \vartheta \geq 0$ ισχύει για $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ένα υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$ θα καλείται **ακτινικά απλό** αν μέσω των πολικών συντεταγμένων γράφεται στη μορφή

$$(7.3.1) \quad D = \{(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) : \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, r_1(\vartheta) \leq r \leq r_2(\vartheta)\}$$

όπου $r_1, r_2 : [\vartheta_1, \vartheta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $r_1 \leq r_2$. Παρατηρείστε ότι το D μετασχηματίζεται στο (r, ϑ) -χωρίο

$$(7.3.2) \quad D^* = \{(r, \vartheta) : \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, r_1(\vartheta) \leq r \leq r_2(\vartheta)\}$$

Π.χ. το χωρίο $D = \{(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) : \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, R_1 \leq r \leq R_2\}$ (γωνιακός τομέας ενός δακτύλιου του $\mathbb{R}^2$) είναι ακτινικά απλό χωρίο. Παρατηρείστε ότι το D σε πολικές συντεταγμένες (r, ϑ) μετασχηματίζεται στο (πολικό) ορθογώνιο $D^* = [R_1, R_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2]$.

Θεώρημα 7.3.1. (Θεώρημα Fubini για ακτινικά απλά χωρία) Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ το οποίο σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τις σχέσεις

$$\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, r_1(\vartheta) \leq r \leq r_2(\vartheta)$$

και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\int_{r_1(\vartheta)}^{r_2(\vartheta)} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r dr \right) d\vartheta.$$

Παρατηρείστε ότι το στοιχειώδες εμβαδό dA που σε καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζεται ως $dA = dx dy$ σε πολικές συντεταγμένες μετατρέπεται σε

$$dA = r dr d\vartheta$$

Παράδειγμα 7.3.2. Έστω $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ο δακτύλιος του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το $(0, 0)$ εσωτερικής ακτίνας $R_1 = 1$ και εξωτερικής ακτίνας $R_2 = 2$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I := \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Λύση. Θέτουμε $x = r \cos \vartheta$ και $y = r \sin \vartheta$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $x = r \cos \vartheta$ και $y = r \sin \vartheta$ όπου $1 \leq r \leq 2$ και $\vartheta \in [0, 2\pi]$, δηλαδή το D μετασχηματίζεται στο πολικό ορθογώνιο $D^* = [1, 2] \times [0, 2\pi]$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{D^*} e^{-r^2} r dr d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 r e^{-r^2} dr \right] d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot \int_1^2 r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_1^2 \right) = \pi \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4} \right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3.3. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I := \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

Λύση. Παρατηρήστε ότι $x^2 + y^2 \leq 2x$ αν και μόνο αν $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, δηλαδή το D είναι δίσκος με κέντρο το $M(1, 0)$ και ακτίνα 1. Θέτουμε $x = r \cos \vartheta$ και $y = r \sin \vartheta$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta$. Επειδή $2 \cos \vartheta \geq 0$ το διάστημα στο οποίο κινείται το ϑ είναι το $[-\pi/2, \pi/2]$.

Άρα το D μετασχηματίζεται στο (r, ϑ) -χωρίο

$$D^* = \{(r, \vartheta) : -\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta\}$$

και άρα είναι ακτινικά απλό. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_{D^*} \frac{1}{r} r dr d\vartheta = \iint_{D^*} dr d\vartheta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \vartheta} dr \right) d\vartheta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta = 4 \sin \vartheta \Big|_0^{\pi/2} = 4. \end{aligned}$$

7.4 Εμβαδά και όγκοι μέσω διπλών ολοκληρωμάτων

Οι πιο άμεσες εφαρμογές των διπλών ολοκληρωμάτων είναι στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων.

7.4.1 Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων χωρίων

Το εμβαδόν ενός χωρίου D του $\mathbb{R}^2$ ορίζεται να είναι το ολοκλήρωμα

$$(7.4.1) \quad \mathcal{E}(D) = \iint_D 1 dx dy$$

Όπως έχουμε δει το ολοκλήρωμα (7.4.1) δεν ορίζεται σε όλα τα επίπεδα χωρία $D \subseteq \mathbb{R}^2$, με άλλα λόγια δεν έχουν όλα τα επίπεδα χωρία εμβαδόν. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με απλά ή ακτινικά απλά χωρία για τα οποία όπως έχουμε δει το ολοκλήρωμα στην (7.4.1) ορίζεται.

Παράδειγμα 7.4.1. Έστω $D = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}$ (μισός λημνίσκος *Bernoulli*). Δείξτε ότι το D είναι ακτινικά απλό και υπολογίστε το εμβαδόν του.

Λύση. Τότε, αν θέσουμε $x = r \cos \vartheta$ και $y = r \sin \vartheta$ έχουμε $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν

$$r^4 \leq r^2(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \Leftrightarrow r^2 \leq \cos(2\vartheta)$$

Συνεπώς,

$$\cos(2\vartheta) \geq 0 \Leftrightarrow -\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/4$$

Άρα

$$D = \{(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) : -\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/4 \text{ και } 0 \leq r \leq \sqrt{\cos(2\vartheta)}\}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(D) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos(2\vartheta)}} r \, dr \right) d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\vartheta) \, d\vartheta = \int_0^{\pi/4} \cos(2\vartheta) \, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

7.4.2 Υπολογισμός όγκων με διπλά ολοκληρώματα

Γενικά ο όγκος $V(K)$ ενός στερεού K στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται ως το *τριπλό ολοκλήρωμα*

$$(7.4.2) \quad V(K) = \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz$$

το οποίο θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Υπάρχουν όμως και ειδικές περιπτώσεις στερεών που ο όγκος τους μπορεί να υπολογισθεί και μέσω διπλού ολοκληρώματος. Μια τέτοια περίπτωση είναι και η εξής.

Έστω D ένα απλό ή ένα ακτινικά απλό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε το στερεό

$$K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Παρατηρείστε ότι το K είναι το στερεό μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του D που φράσσεται από τον ορθό κύλινδρο με γενέτειρες παράλληλες στον κατακόρυφο άξονα $z'z$ και οδηγό το σύνορο ∂D του D .

Ο όγκος $V(K)$ του K αποδεικνύεται ότι είναι το ολοκλήρωμα

$$(7.4.3) \quad V(K) = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Γενικότερα, έστω D κλειστό και φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g \leq f$ στο D . Θεωρούμε το στερεό

$$K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \, g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$$

Το K είναι το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ και τον ορθό κύλινδρο με γενέτειρες παράλληλες στον κατακόρυφο άξονα $z'z$ και οδηγό την καμπύλη ∂D . Το D καλείται **προβολή** του K στο xy -επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή ο όγκος του K ισούται με

$$(7.4.4) \quad V(K) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) \, dx \, dy.$$

Στερεά που περιγράφονται με τον παραπάνω τρόπο καλούνται και **z -απλά**.

Παράδειγμα 7.4.2. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, \, x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Λύση. Αν $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, τότε

$$\begin{aligned} V(K) &= \iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - x^2 - y^2 + 1 \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\sqrt{4 - r^2} - r^2 + 1 \right) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{4 - r^2} - r^2 + 1 \right) r dr, \end{aligned}$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα.

Παράδειγμα 7.4.3. Δείξτε ότι όγκος της σφαίρας $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ είναι $V(B) = \frac{4\pi}{3} R^3$.

Λύση. Έχουμε

$$B = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Συνεπώς, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ και

$$V(B) = \iint_D 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

Θέτουμε $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$. Τότε, το D μετασχηματίζεται στο πολικό ορθογώνιο $D^* = \{(\vartheta, r) : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R\}$. Επομένως,

$$V(B) = \iint_{D^*} 2\sqrt{R^2 - r^2} r dr d\vartheta = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr \right) d\vartheta = 4\pi \int_0^{R^2} \sqrt{u} du = 2\pi \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^{R^2} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Τριπλό Ολοκλήρωμα

Το τριπλό ολοκλήρωμα αποτελεί επέκταση του διπλού ολοκληρώματος και ορίζεται με παρόμοιο τρόπο. Πρώτα το ορίζουμε σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και μετά σε γενικότερα χωρία του $\mathbb{R}^3$. Οι συνήθεις αλλαγές μεταβλητών για το τριπλό ολοκλήρωμα είναι σε κυλινδρικές και σε σφαιρικές συντεταγμένες.

8.1 Ολοκλήρωση σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $B \subset \mathbb{R}^3$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες,

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3], \quad a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2, \quad a_3 < b_3.$$

δηλαδή το B αποτελείται από όλα τα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με

$$a_1 \leq x \leq b_1, \quad a_2 \leq y \leq b_2, \quad a_3 \leq z \leq b_3$$

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για να ορίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα είναι απλή γενίκευση της αντίστοιχης που χρησιμοποιήθηκε στο διπλό ολοκλήρωμα. Συμβολίζουμε με $V(B)$ τον όγκο του B ,

$$V(B) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

Διαμέριση του B είναι ένα σύνολο της μορφής $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3$ όπου $\mathcal{P}_1 = \{a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_1} = b_1\}$, $\mathcal{P}_2 = \{a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_2} = b_2\}$ και $\mathcal{P}_3 = \{a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n_3} = b_3\}$ είναι διαμερίσεις των $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ και $[a_3, b_3]$ αντίστοιχα. Κάθε τέτοια διαμέριση είναι συνεπώς ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων

$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_j, z_k) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_2, 0 \leq k \leq n_3\} \subseteq B$$

Η διαμέριση $\mathcal{P}$ χωρίζει το B σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα $B_{ijl} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$ που ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά και η ένωσή τους ισούται με το B . Για κάθε $0 \leq i \leq n_1 - 1$, $0 \leq j \leq n_2 - 1$ και $0 \leq k \leq n_3 - 1$ θέτουμε

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

Παρατηρούμε ότι ο όγκος του B_{ijk} είναι $V(B_{ijk}) = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. Ορίζουμε επίσης,

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{\|\mathcal{P}_1\|, \|\mathcal{P}_2\|, \|\mathcal{P}_3\|\}$$

όπου $\|\mathcal{P}_1\| = \max \{\Delta x_i : 0 \leq i \leq n-1\}$ και $\|\mathcal{P}_2\| = \max \{\Delta y_j : 0 \leq j \leq n_2-1\}$ και $\|\mathcal{P}_3\| = \max \{\Delta z_k : 0 \leq k \leq n_3-1\}$.

Επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την διαμέριση $\mathcal{P}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων

$$T = \{T_{ijk} : 0 \leq i \leq n_1-1, 0 \leq j \leq n_2-1, 0 \leq k \leq n_3-1\}$$

με την ιδιότητα $T_{ijk} \in B_{ijk}$ για κάθε $0 \leq i \leq n_1-1, 0 \leq j \leq n_2-1$ και $0 \leq k \leq n_3-1$.

Αν $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ και T όπως παραπάνω, το άθροισμα

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}, T) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{k=0}^{n_3-1} f(T_{ijk}) V(B_{ijk}) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{k=0}^{n_3-1} f(T_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

καλείται *άθροισμα Riemann της f ως προς την διαμέριση $\mathcal{P}$ και την επιλογή T* .

Η f λέγεται *ολοκληρώσιμη* στο B αν υπάρχει το όριο

$$I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \mathcal{S}(f, \mathcal{P}, T) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{k=0}^{n_3-1} f(T_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Ο αριθμός I καλείται το *τριπλό ολοκλήρωμα της f στο B* και συμβολίζεται με

$$\iiint_B f \text{ ή } \iiint_B f(x, y, z) dV \text{ ή } \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$$

Θεώρημα 8.1.1 (Θεώρημα Fubini για ορθογώνια παραλληλεπίπεδα). Έστω $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ και $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Επιπλέον το διαδοχικό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί με οποιαδήποτε σειρά ολοκλήρωσης ως προς τις τρείς μεταβλητές, δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx &= \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy \quad \kappa.λ.π. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.1.2. Έστω $B = [0, 1] \times [1, 2] \times [3, 4]$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$J = \iiint_B (x^2 y + z) dx dy dz$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\iiint_B (x^2y + z) \, dx dy dz &= \int_3^4 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2y + z) \, dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_3^4 \left(\int_1^2 (y/3 + z) \, dy \right) dz \\ &= \int_3^4 \left(\frac{1}{2} + z \right) dz = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4\end{aligned}$$

διότι

$$\int_0^1 (x^2y + z) \, dx = \left[\frac{x^3}{3}y + 2y \right]_0^1 = y/3 + z$$

,

$$\int_1^2 (y/3 + z) dy = \frac{1}{6}y^2 \Big|_1^2 + z = \frac{3}{6} + z = \frac{1}{2} + z,$$

και

$$\int_3^4 \left(\frac{1}{2} + z \right) dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2 \Big|_3^4 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι ισχύουν τα ανάλογα των Προτάσεων 7.1.3 και 7.1.4 και για το τριπλό ολοκλήρωμα.

8.2 Ολοκλήρωση σε γενικότερα χωρία

Ο Ορισμός 7.2.1 γενικεύεται άμεσα στα τριπλά ολοκληρώματα ως εξής. Έστω K μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και B ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με $K \subseteq B$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : B \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{αν } (x, y, z) \in K, \\ 0 & \text{αν } (x, y, z) \notin K \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη στο K** αν η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο B .

Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε

$$\iiint_K f = \iiint_B \tilde{f}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός του $\iiint_K f$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου B με $K \subseteq B$. Όπως και στο διπλό ολοκλήρωμα ενδέχεται για κάποια φραγμένα σύνολα $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ακόμα και οι σταθερές συναρτήσεις να μην είναι ολοκληρώσιμες στο K . Αποδεικνύεται ότι αν το συνορό του K είναι μια πεπερασμένη ένωση από γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων δύο μεταβλητών τότε δεν υπάρχει πρόβλημα με την ολοκλήρωση συνεχών συναρτήσεων στο K . Τέτοιου είδους χωρία είναι τα απλά χωρία του $\mathbb{R}^3$ που αποτελούν επεκτάσεις στις τρεις διαστάσεις των απλών χωρίων του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 8.2.1. Ένα χωρίο $K \subset \mathbb{R}^3$ θα καλείται **z-απλό** αν γράφεται στην μορφή

$$K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ απλό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ και $z_1, z_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ για όλα τα $(x, y) \in D$. Το

$$D = \{(x, y) : \exists z \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } (x, y, z) \in K\}$$

καλείται η **προβολή** του K στο xy -επίπεδο.

Θεώρημα 8.2.2 (Θεώρημα Fubini για z -απλά χωρία). Έστω $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής όπου

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

ένα z -απλό χωρίο. Τότε

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Αντίστοιχα ορίζονται τα y -απλά και x -απλά χωρία του $\mathbb{R}^3$. Π.χ. ένα χωρίο $K \subseteq \mathbb{R}^3$ θα καλείται y -απλό αν είναι της μορφής

$$K = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, \quad y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$$

Το αντίστοιχο Θεώρημα Fubini για y -απλά χωρία λέει ότι αν $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τότε

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz.$$

Παράδειγμα 8.2.3. Να υπολογιστεί το $\iiint_K xy dx dy dz$, όπου K είναι το στερεό τετράεδρο που βρίσκεται στο 1ο ογδομήριο και φράσσεται από τις επιφάνειες $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Λύση. Η προβολή του K στο xy -επίπεδο είναι το $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, \, x \geq 0, \, y \geq 0\}$ και έχουμε ότι

$$K = \{(x, y, z) : x \geq 0, \, y \geq 0, \, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \iiint_K xy dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} xy dz \right) dx dy = \iint_D xy(1-x-y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\underbrace{\int_0^{1-y} xy(1-x-y) dx}_{I_y} \right] dy, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{1-y} xy(1-x-y) dx = y \left[\int_0^{1-y} x(1-y) dx - \int_0^{1-y} x^2 dx \right] = y \left[(1-y) \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1-y} \right] \\ &= y \left[\frac{(1-y)^3}{2} - \frac{(1-y)^3}{3} \right] = \frac{y(1-y)^3}{6}. \end{aligned}$$

Τότε, το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \int_0^1 y(1-y)^3 dy &\stackrel{(u=1-y)}{=} -\frac{1}{6} \int_1^0 (1-u)u^3 du = \frac{1}{6} \int_0^1 (u^3 - u^4) du \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

8.3 Ολοκλήρωση σε Κυλινδρικές συντεταγμένες

Όταν το στερεό χωρίο $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ενός τριπλού ολοκληρώματος $\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz$ έχει προβολή στο xy -επίπεδο ένα δίσκο ή γενικότερα ένα ακτινικά απλό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ τότε μπορούμε να το εκφράσουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι άμεση επέκταση των πολικών συντεταγμένων και συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \sin \vartheta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ z &= z \end{aligned}$$

Θεώρημα 8.3.1. (Τριπλό Ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^3$ το οποίο σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από τις σχέσεις

$$\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, \quad r_1(\vartheta) \leq r \leq r_2(\vartheta), \quad z_1(r, \vartheta) \leq z \leq z_2(r, \vartheta)$$

και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{r=r_1(\vartheta)}^{r_2(\vartheta)} \int_{z=z_1(r, \vartheta)}^{z_2(r, \vartheta)} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z) r dz dr d\vartheta$$

Παρατηρείστε ότι ο στοιχειώδης όγκος dV που σε καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζεται ως $dV = dx dy dz$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες μετατρέπεται σε

$$dV = r dz dr d\vartheta$$

Παράδειγμα 8.3.2. Να υπολογιστεί το $\iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, όπου K είναι το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 4.$$

Λύση. Έχουμε $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$. Συνεπώς $r^2 \leq z \leq 4$ και το K περιγράφεται από τις σχέσεις

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \text{και} \quad r^2 \leq z \leq 4$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 \left(\int_{z=r^2}^4 dz \right) r \, dr \, d\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) \, dr = 2\pi \left[4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.3.3. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού K που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 8 - x^2 - y^2.$$

Λύση. Απαλοϊφώντας το z μεταξύ των εξισώσεων $z = x^2 + y^2$ και $z = 8 - x^2 - y^2$ βρίσκουμε την προβολή D του K στο xy -επίπεδο:

$$\left. \begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 8 - x^2 - y^2 \end{aligned} \right\} \implies x^2 + y^2 = 4.$$

Η προβολή της παραπάνω καμπύλης στο xy -επίπεδο είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$. Συνεπώς, το K σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad r^2 \leq z \leq 8 - r^2$$

Άρα

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=r^2}^{8-r^2} r \, dz \, dr \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 (8 - 2r^2) r \, dr \, d\vartheta = 4\pi \int_{r=0}^2 (4r - r^3) \, dr \\ &= 4\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 16\pi \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.3.4. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

Λύση. Η $x^2 + y^2 = 2x$ γράφεται στη μορφή $(x-1)^2 + y^2 = 1$ που είναι η κυλινδρική επιφάνεια με βάση τον κύκλο του xy -επιπέδου με κέντρο το $(1, 0)$ και ακτίνα $R = 1$. Η επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ είναι ένα παραβολοειδές και η $z = 0$ είναι το xy -επίπεδο. Άρα

$$\begin{aligned} K &= \{(x, y, z) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2\} \\ &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2x, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2\} \end{aligned}$$

Μετατρέποντας σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουμε ότι

$$r^2 \leq 2r \cos \vartheta \implies 0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta \quad \text{και} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \implies 0 \leq z \leq r^2$$

και συνεπώς το K δίνεται από τις σχέσεις

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta, \quad 0 \leq z \leq r^2$$

Επομένως,

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\vartheta} \left(\int_0^r dz \right) r dr d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} r^3 dr \right) d\vartheta = \frac{16}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \vartheta d\vartheta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \vartheta d\vartheta.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \cos^4 \vartheta &= (\cos^2 \vartheta)^2 = \left(\frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos^2(2\vartheta) + 2\cos(2\vartheta)) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\cos(4\vartheta) + 1}{2} + 2\cos(2\vartheta) \right) \\ &= \frac{1}{8} (3 + \cos(4\vartheta) + 4\cos(2\vartheta)) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{8} \left[3\vartheta + \frac{1}{4} \sin(4\vartheta) + 2\sin(2\vartheta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8}.$$

8.4 Ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές και οι καρτεσιανές συντεταγμένες συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \varphi \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

όπου $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ και $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Θεώρημα 8.4.1. (Τριπλό Ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες) Εάν $K \subseteq \mathbb{R}^3$ που σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από τις σχέσεις

$$\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad r_1(\vartheta, \varphi) \leq r \leq r_2(\vartheta, \varphi)$$

Έστω $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε

$$\iiint_K f(x, y, z) dV = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\vartheta, \varphi)}^{r_2(\vartheta, \varphi)} f(r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\vartheta$$

Παρατηρείστε ότι ο στοιχειώδης όγκος $dV = dx dy dz$ σε σφαιρικές συντεταγμένες μετατρέπεται σε

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\vartheta$$

Παράδειγμα 8.4.2. Να υπολογίσετε τον όγκο της σφαίρας $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.4.3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iiint_K z^2 dx dy dz$ όπου $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r^2 \cos^2 \varphi \, r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2\pi R^5}{5} \int_{-1}^1 u^2 \, du = \frac{4\pi R^5}{15} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.4.4. Να υπολογίσετε το $\iiint_K \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, όπου K το στερεό που φράσσεται από τις σφαίρες

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < a < b).$$

Λύση. Περνώντας σε σφαιρικές συντεταγμένες ϑ, φ, r , παίρνουμε ότι το K δίνεται από τις σχέσεις

$$\vartheta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi], \quad a \leq r \leq b$$

και

$$\begin{aligned} \iiint_K \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \frac{r^2 \sin \varphi}{r^3} \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= 4\pi(\ln b - \ln a) = 4\pi \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.4.5. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται πάνω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Λύση. Έχουμε

$$K = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \right\},$$

άρα

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(x,y,z) \in K} \begin{cases} r \sin \varphi \leq r \cos \varphi \\ r^2 \leq 2r \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi \in [0, \pi/4] \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad \text{και} \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{2 \cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{16\pi}{3} \frac{1}{4} \cos^4 \varphi \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{4\pi}{3} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 - 1 \right] = -\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \pi. \end{aligned}$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

9.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους

Το ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης πάνω σε μια καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ καλείται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους. Θα παρουσιάσουμε τον ορισμό του για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$. Ο γενικός ορισμός για οποιαδήποτε διάσταση n είναι ανάλογος.

Με τον όρο **απλή καμπύλη** του $\mathbb{R}^3$, θα εννοούμε ένα υποσύνολο C του $\mathbb{R}^3$ για το οποίο υπάρχει μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε η C είναι η εικόνα του $[a, b]$ μέσω της $\mathbf{r}$, δηλαδή

$$C = \{\mathbf{r}(t) : t \in [a, b]\}$$

Η συνάρτηση $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ καλείται μια **παραμέτρηση** της C . Θα υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ αν $t_1 \neq t_2$ (δηλαδή η C δεν σχηματίζει "θηλιές") με πιθανή εξαίρεση την περίπτωση όπου $t_1 = a$ και $t_2 = b$. Αν $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ τότε η καμπύλη C θα καλείται **κλειστή**. Ανάλογους ορισμούς έχουμε και για καμπύλες του $\mathbb{R}^2$.

Μπορούμε να φανταζόμαστε την καμπύλη C σαν ένα **δρόμο** που διαγράφεται από ένα κινητό το οποίο την χρονική στιγμή t βρίσκεται στο σημείο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ του δρόμου. Η υπόθεση ότι η $\mathbf{r}$ είναι 1-1 εκτός ίσως από τα άκρα σημαίνει ότι το κινητό διαγράφει μια μόνο φορά την καμπύλη. Επίσης, το διάνυσμα

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

εκφράζει την **ταχύτητα** του κινητού την χρονική στιγμή t .

Παράδειγμα 9.1.1. (i) Ένα ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^3$ είναι μια απλή καμπύλη. Πράγματι αν έχει άκρα τα σημεία $A(x_0, y_0, z_0)$ και $B(x_1, y_1, z_1)$ τότε μια παραμέτρηση δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{r}(t) = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1, (1-t)z_0 + tz_1)$$

με $t \in [0, 1]$. Παρατηρείστε ότι $\mathbf{r}(0) = A$ και $\mathbf{r}(1) = B$.

(ii) Μια απλή καμπύλη έχει γενικά πολλές παραμετρήσεις. Για παράδειγμα, αν $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = x^2\}$ τότε οι συναρτήσεις $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2)$ και $\mathbf{r}_2(t) = (t^3, t^6)$, $t \in [-1, 1]$ είναι δύο παραμετρήσεις της C .

Έστω C μια απλή καμπύλη και έστω $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ μια βαθμωτή συνάρτηση. Το επικαμπύλιο

ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της C ορίζεται με την συνήθη διαδικασία: *διαμερίσεις, αθροίσματα, όριο*. Πιο συγκεκριμένα, έστω $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια παραμέτρηση της C και έστω $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Για κάθε υποδιάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ επιλέγουμε $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ και σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann

$$(9.1.1) \quad \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(t_i^*)) \Delta s_i$$

όπου Δs_i είναι το μήκος του τόξου της καμπύλης C με άκρα τα σημεία $\mathbf{r}(t_{i-1})$ και $\mathbf{r}(t_i)$ της C .

Το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(t_i^*)) \Delta s_i$$

($\|\mathcal{P}\| = \max \{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n-1\}$) καλείται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της C** και συμβολίζεται με

$$\int_C f(x, y, z) \, ds$$

Παρατηρείστε ότι αν $f = 1$ τότε κάθε άθροισμα Riemann είναι της μορφής

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = L(C)$$

όπου $L(C)$ είναι το μήκος της C και άρα

$$(9.1.2) \quad \int_C 1 \, ds = L(C)$$

Αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 9.1.2. (Υπολογισμός του επικαμπυλίου ολοκληρώματος βαθμωτής συνάρτησης) Έστω C απλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ και $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια παραμέτρηση της C τότε

$$(9.1.3) \quad \begin{aligned} \int_C f \, ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 9.1.2 έχουμε και τον εξής τύπο για το μήκος $L(C)$ της C .

Πόρισμα 9.1.3. Έστω C απλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$. Αν $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια παραμέτρηση της C τότε

$$(9.1.4) \quad L(C) = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt$$

Παρατήρηση 9.1.4. Παρατηρείστε την σχέση των διαφορικών ds και dt :

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

Πράγματι, το μέτρο της ταχύτητας είναι η μεταβολή της απόστασης προς την μεταβολή του χρόνου.

Για να πάρουμε όμως μια πιο ακριβή ιδέα γιατί θα πρέπει να ισχύει ο τύπος (9.1.3) παρατηρούμε τα ε_i . Αν το $\|\mathcal{P}\| = \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n-1\}$ είναι πολύ μικρό τότε το μήκος Δs_i είναι σχεδόν ίσο με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $\mathbf{r}(t_{i-1})$ και $\mathbf{r}(t_i)$, δηλαδή

$$\Delta s_i \approx \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για συναρτήσεις μιας μεταβλητής) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (t_{i-1}, t_i)$ τέτοια ώστε

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_1)(t_i - t_{i-1}), \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\xi_2)(t_i - t_{i-1}), \quad z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\xi_3)(t_i - t_{i-1})$$

όπου λόγω συνέχειας των $x'(t), y'(t), z'(t)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = t_i^*$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε όταν $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$, τότε

$$\begin{aligned} \Delta s_i &\approx \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| \\ &= \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2} \\ &\approx \sqrt{(x'(t_i^*))^2 + (y'(t_i^*))^2 + (z'(t_i^*))^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) = \|\mathbf{r}'(t_i^*)\| \cdot \Delta t_i \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(t_i^*)) \Delta s_i = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(t_i^*)) \|\mathbf{r}'(t_i^*)\| \Delta t_i = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt$$

Παράδειγμα 9.1.5. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C (x + y + z) \, ds$ όπου C η έλικα $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ με $0 \leq t \leq 3\pi$.

Λύση. Έχουμε $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{(-\sin^2 t)^2 + \cos^2 t + 1} dt = \sqrt{2} \, dt$. Επιπλέον $f(\mathbf{r}(t)) = f(\cos t, \sin t, t) = \cos t + \sin t + t$, οπότε

$$\int_C (x+y+z) \, ds = \int_0^{3\pi} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{2} \int_0^{3\pi} (\cos t + \sin t + t) \, dt = \left[\sin t - \cos t + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{3\pi} = 2\sqrt{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2} \pi^2$$

Παράδειγμα 9.1.6. Υπολογίστε το μήκος της έλικας του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση. Το μήκος της έλικας είναι το ολοκλήρωμα

$$\int_C 1 \, ds = \int_0^{3\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{2} \int_0^{3\pi} dt = 3\pi\sqrt{2}$$

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για απλές καμπύλες του $\mathbb{R}^2$: Αν C απλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$,

$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια παραμέτρηση της C και $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y) ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt\end{aligned}$$

Επίσης το μήκος της C δίνεται από τον τύπο

$$L(C) = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Παράδειγμα 9.1.7. Έστω C ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$. Η παραμέτρηση $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ δίνει ότι

$$\int_C f(x, y) ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt$$

για κάθε $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή.

Επίσης το μήκος του μοναδιαίου κύκλου είναι

$$L(C) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Παράδειγμα 9.1.8. Βρείτε το μήκος του τόξου C της αστεροειδούς καμπύλης $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ που περιέχεται στο 1ο τεταρτημόριο χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Λύση. Έχουμε $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$ και άρα

$$\begin{aligned}L(C) &= \int_{\mathbf{r}} 1 ds = \int_0^{\pi/2} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 3|\cos t \sin t| dt = 3 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt\end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)' \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)' dt = \frac{1}{2} (\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L(C) = 3/2$.

9.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους ορίζεται για διανυσματικά πεδία. Στην ουσία ο ορισμός του προέρχεται από την Φυσική και εκφράζει το **έργο** που παράγει το διανυσματικό πεδίο θεωρούμενο ως δύναμη που δρά σε υλικό σημείο που κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης. Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται σε απλή καμπύλη που είναι **λεία** που σημαίνει ότι δέχεται μια παραμέτρυσή $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα

$$\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Μια τέτοια παραμέτρηση της C θα καλείται **κανονική**. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός **μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος** σε κάθε σημείο $P = \mathbf{r}(t)$ της καμπύλης :

$$(9.2.1) \quad \mathbf{T}(P) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα δείχνουν και μια κατεύθυνση διαγραφής της καμπύλης από την παραμέτρηση $\mathbf{r}$.

Κάθε λεία καμπύλη θεωρούμενη ως τροχιά ενός κινητού μπορεί να δεχθεί δύο κατευθύνσεις διαγραφής. Κάθε τέτοια κατεύθυνση λέγεται **προσανατολισμός** της C . Π.χ. ένας κύκλος έχει τον **ωρολογιακό** και τον **αντι-ωρολογιακό** προσανατολισμό. Ομοίως μια καμπύλη με άκρα A και B έχει δύο κατευθύνσεις ως προς τις οποίες μπορεί να διαγραφεί, η μια είναι με αρχή το A και τέλος το B και η άλλη με αρχή το B και τέλος το A . Οι δύο προσανατολισμοί μιας λείας καμπύλης θα καλούνται **αντίθετοι**. Συνηθίζεται στις απλές κλειστές **επίπεδες** καμπύλες να ονομάζουμε τον αντι-ωρολογιακό προσανατολισμό ως **θετικό** και τον ωρολογιακό ως **αρνητικό** προσανατολισμό.

Επιλέγοντας έναν προσανατολισμό για μια καμπύλη C τότε η C θα ονομάζεται **προσανατολισμένη**. Η καμπύλη C με τον αντίθετο προσανατολισμό θα συμβολίζεται με C^- . Μια παραμέτρηση της C θα ακολουθεί τον ένανα από τους δύο προσανατολισμούς. Αν ακολουθεί τον προσανατολισμό που επιλέξαμε για την C τότε θα λέμε ότι η παραμέτρηση **διατηρεί** τον προσανατολισμό της C ή ότι η $\mathbf{r}$ είναι **θετικά** προσανατολισμένη. Διαφορετικά θα λέμε ότι η $\mathbf{r}$ είναι **αρνητικά** προσανατολισμένη. Παρατηρείστε ότι αν η $\mathbf{r}$ είναι αρνητικά προσανατολισμένη ως προς την C αν και μόνο αν είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς την C^- .

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος β' είδους.

Ορισμός 9.2.1. Έστω C απλή, λεία και προσανατολισμένη καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ και έστω $\mathbf{F}$ συνεχές διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^3$ ορισμένο σε χωρίο του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει την C . Έστω επίσης $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow C$ μια κανονική παραμέτρηση της C που **διατηρεί** τον προσανατολισμό της. Το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ κατά μήκος της προσανατολισμένης καμπύλης C** το συμβολίζουμε με

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

και ορίζουμε να είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ (εσωτερικό γινόμενο) κατά μήκος της C , δηλαδή θέτουμε

$$(9.2.2) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Αν η κανονική παραμέτρηση $\mathbf{r}$ έχει τον αντίθετο προσανατολισμό από αυτόν που έχει η C δηλαδή

διατηρεί τον προσανατολισμό της C^- τότε ορίζουμε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ο συμβολισμός $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ μας παραπέμπει να κάνουμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος με τον εξής τρόπο. Επειδή

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) \Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt$$

θα πρέπει

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Όντως αυτό ισχύει και αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 9.2.2. (Υπολογισμός επικαμπυλίου ολοκληρώματος διανυσματικού πεδίου) Έστω C μια απλή λεία προσανατολισμένη καμπύλη και $\mathbf{r}(t)$ μια κανονική παραμέτρηση της C με $a \leq t \leq b$. Αν $\mathbf{r}$ διατηρεί τον προσανατολισμό της C τότε

$$(9.2.3) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Απόδειξη. Αν $\mathbf{r}$ έχει τον ίδιο προσανατολισμό με την C τότε από τον Ορισμό 9.2.1 το Θεώρημα 9.1.2 και τον ορισμό του $\mathbf{T}$ στην (9.2.1) έχουμε

$$(9.2.4) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \left(\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

□

Άρα ακριβώς όπως και στην περίπτωση του βαθμωτών συναρτήσεων το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικών πεδίων μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα συνάρτησης μιας μεταβλητής. Μάλιστα λόγω της μη ύπαρξης της $\|\mathbf{r}'(t)\|$ όπου εμπλέκει μια τετραγωνική ρίζα τα επικαμπύλια ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων είναι πιο εύκολο να υπολογισθούν.

Ένας άλλος συμβολισμός για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου είναι και ο εξής. Εκφράζουμε το $\mathbf{F}$ με τις συντεταγμένες συναρτήσεις

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

και ομοίως, εφόσον $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$,

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt = (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

οπότε μπορούμε να γράφουμε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Με αυτόν τον συμβολισμό η σχέση (9.2.2) γράφεται

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b (F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

Αν η C είναι επίπεδη καμπύλη με παραμετρηση $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, και $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ τότε

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_a^b (F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

Παρατήρηση 9.2.3. Ο παραπάνω συμβολισμός γενικεύει τον κλασσικό συμβολισμό του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$ συνάρτησης μιας μεταβλητής. Πράγματι, έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω C να είναι το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^2$ με αρχή το $A(a, 0)$ και πέρας το $B(b, 0)$. Θεωρούμε την θετικά προσανατολισμένη παραμετρηση $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0)$ με $a \leq t \leq b$ και έστω $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ το πεδίο $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ όπου $F_1(x, y) = f(x)$ και $F_2(x, y) = 0$. Τότε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_C F_1 dx = \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Μάλιστα αν θεωρήσουμε την αρνητικά προσανατολισμένη παραμετρηση $\mathbf{r}(t) = (a + b - t, 0)$, $a \leq t \leq b$ τότε

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{C^-} F_1 dx + F_2 dy \\ &= - \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt \\ &= - \int_a^b f(a + b - t) (a + b - t)' dt = \int_b^a f(u) du = - \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.2.4. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C y^2 dx - x^2 dy$, όπου C είναι το $\vec{AB}$, όπου $A(2, 1)$, $B(0, 1)$.

Λύση. Μία παραμετρηση του $\vec{AB}$ είναι

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)(2, 1) + t(0, 1) = (2 - 2t, 1), \quad t \in [0, 1].$$

Θέτοντας $x(t) = 2 - 2t$, $y(t) = 1$ έχουμε

$$\int_C y^2 dx - x^2 dy = \int_0^1 [1^2 x'(t) - (2 - 2t)^2 y'(t)] dt = \int_0^1 [-2 - (2 - 2t)^2 \cdot 0] dt = -2.$$

Παράδειγμα 9.2.5. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

όπου C είναι ο θετικά (αντι-ωρολογιακά) προσανατολισμένος κύκλος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $R > 0$.

Λύση. Μία θετικά προσανατολισμένη παραμέτρηση είναι

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Το ολοκλήρωμα επομένως είναι ίσο με

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} (R \cos t) \right) dt = 2\pi.$$

Παράδειγμα 9.2.6. Έστω C το τόξο της αστεροειδούς καμπύλης $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ που περιέχεται στο 1ο τεταρτημόριο και έστω

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

μια θετική παραμετρικοποίησή του. Έστω το πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (F_1, F_2) = \left(\frac{-y^2}{x^{5/3} + y^{5/3}}, \frac{x^2}{x^{5/3} + y^{5/3}} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_C F_1 dx + F_2 dy$.

Λύση.

$$\begin{aligned} \int_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy &= \int_{\mathbf{r}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{x^2(t)y'(t) - y^2(t)x'(t)}{x^{5/3}(t) + y^{5/3}(t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{3 \cos^6 t \sin^2 t \cos t - 3 \sin^6 t \cos^2 t (-\sin t)}{\cos^5 t + \sin^5 t} dt \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^7 t \sin^2 t + \sin^7 t \cos^2 t}{\cos^5 t + \sin^5 t} dt \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^5 t + \sin^5 t)}{\cos^5 t + \sin^5 t} dt \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt$. Θέτοντας $u = 2t$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u (-\cos u)' du = -\frac{1}{2} \left(\sin u \cos u \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos^2 u du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 u du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 u) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} du - \int_0^{\pi} \sin^2 u du \right) = \frac{\pi}{2} - I \end{aligned}$$

και συνεπώς $2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{4}$. Άρα $I = \frac{3\pi}{16}$.

Παράδειγμα 9.2.7 (Έργο και κινητική ενέργεια). Για ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται στην τροχιά C της $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ υπό την επίδραση του πεδίου δυνάμεων $\mathbf{F}$, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα λέει ότι

$$\mathbf{F} = m\mathbf{r}''(t).$$

Το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται στο χρονικό διάστημα $[a, b]$ είναι

$$(9.2.5) \quad W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b m \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Αν με $K(t) = \frac{1}{2}m \cdot \|\mathbf{r}'(t)\|^2$ συμβολίσουμε την **κινητική ενέργεια**, τότε επειδή

$$(\|\mathbf{r}'(t)\|^2)' = (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t))' = 2\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

έχουμε $K'(t) = m \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$ και η (9.2.5) γράφεται

$$W = \int_a^b K'(t) dt = K(b) - K(a),$$

Συνεπώς το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται κατά την μετακίνηση του υλικού σημείου στην καμπύλη από το σημείο $A(\mathbf{r}(a))$ στο σημείο $B(\mathbf{r}(b))$ είναι ίσο με τη διαφορά των κινητικών ενεργειών που έχει στις δύο αυτές θέσεις.

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα συναρτήσεων μιας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται στα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Θεώρημα 9.2.8. (Θεμελιώδες Θεώρημα για επικαμπύλια ολοκληρώματα) Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^1 . Τότε ισχύουν τα εξής.

(α) Για κάθε $A, B \in D$ και για κάθε απλή λεία προσανατολισμένη καμπύλη $C \subseteq D$ με σημείο αφετηρίας το A και σημείο τερματισμού το B ισχύει ότι

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

(β) Για κάθε απλή κλειστή λεία προσανατολισμένη καμπύλη $C \subseteq D$ ισχύει ότι

$$\oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$$

(Πολλές φορές υμβολίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος απλής κλειστής καμπύλης με $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.)

Απόδειξη. (α) Έστω $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow C$ μια κανονική και θετικά προσανατολισμένη παραμέτρηση της C .

Από τον Κανόνα Αλυσίδας (Θεώρημα 3.3.3) και το Θεώρημα 9.2.2 έχουμε

$$\int_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[f(\mathbf{r}(t))] \, dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = f(A) - f(B).$$

(β) Προκύπτει από το (α) επιλέγοντας ένα τυχαίο σημείο $\Gamma \in C$ και θέτοντας $A = B = \Gamma$. $\square$

9.3 Συντηρητικά πεδία

Ορισμός 9.3.1. Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται ονομάζεται **συντηρητικό στο D** αν υπάρχει $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ βαθμωτή συνάρτηση κλάσης C^1 τέτοια ώστε

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

Η f λέγεται **συνάρτηση δυναμικού**.

Άρα ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ στον $\mathbb{R}^3$ είναι συντηρητικό αν

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \text{ και } F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

για κάποια βαθμωτή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

Παράδειγμα 9.3.2. Το πεδίο $F(x, y) = (2xy, x^2)$ είναι συντηρητικό στον $\mathbb{R}^2$. Πράγματι αν $f(x, y) = x^2y$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$.

Το Θεώρημα 9.2.8 αναδιατυπώνεται για συντηρητικά πεδία ως εξής.

Θεώρημα 9.3.3. Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ συντηρητικό πεδίο. Τότε ισχύουν τα εξής.

(α) Έστω $C_1, C_2 \subseteq D$ απλές λείες προσανατολισμένες καμπύλες με κοινή αρχή και κοινό πέρας. Τότε

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2$$

(β) Για κάθε απλή κλειστή λεία προσανατολισμένη καμπύλη $C \subseteq D$ ισχύει ότι

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Παράδειγμα 9.3.4. Έστω $F(x, y, z) = (2xy + z, x^2, x)$.

(α) Να επιβεβαιώσετε ότι η $f(x, y, z) = x^2y + xz$ αποτελεί μια συνάρτηση δυναμικού για την F .

(β) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ κατά μήκος μιας απλής λείας καμπύλης με αρχή το $A(1, -1, 2)$ και πέρας το $B(2, 2, 3)$.

Λύση. (α) Έχουμε $f_x(x, y, z) = 2xy + z$, $f_y(x, y, z) = x^2$, $f_z(x, y, z) = x$ οπότε

$$F(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = \nabla f(x, y, z)$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(β) Έχουμε $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2, 2, 3) - f(1, -1, 2) = 13$.

Παράδειγμα 9.3.5. Δείξτε ότι το πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ δεν είναι συντηρητικό στον $\mathbb{R}^2$ αλλά είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Λύση. Έστω C ο αντι-ωρολογιακά προσανατολισμένος μοναδιαίος κύκλος, με παραμέτρηση $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 9.2.5 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ και άρα το $\mathbf{F}$ δεν είναι συντηρητικό στον $\mathbb{R}^2$.

Παρόλα αυτά το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Πράγματι έστω

$$f(x, y) = -\arctan \frac{y}{x}$$

με $(x, y) \neq (0, 0)$. Χρησιμοποιώντας ότι $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Άρα το $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ολοκληρωτικά θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης

10.1 Το Θεώρημα Green

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού λέει ότι αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τάξης C^1 τότε

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Είδαμε ότι το θεώρημα αυτό επεκτείνεται στο Θεμελιώδες Θεώρημα για επικαμπύλια ολοκληρώματα στην μορφή

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

όπου C απλή λεία προσανατολισμένη καμπύλη με αρχή το A και τέλος το B .

Το Θεώρημα Green αποτελεί μια διδιάστατη επέκταση του Θεμελιώδους θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Το Θεμελιώδες Θεώρημα για επικαμπύλια ολοκληρώματα που αναφέραμε παραπάνω είναι μια επέκταση αλλά η διάσταση παραμένει η ίδια αφού η ολοκλήρωση είναι πάνω σε μια μονοδιάστατη καμπύλη. Το Θεώρημα Green συνδέει ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ένα επίπεδο χωρίο με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο του χωρίου. Γενικά τα Θεωρήματα Ολοκλήρωσης της Διανυσματικής Ανάλυσης ακολουθούν αυτή την ιδέα δηλαδή ανάγουν ολοκληρώματα πάνω σε χωρία στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ σε ολοκληρώματα πάνω στο σύνορο των χωρίων όπου έχουμε μια ολοκλήρωση και μια διάσταση λιγότερη.

Υπενθυμίζουμε ότι μια απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου καλείται θετικά προσανατολισμένη αν είναι αντι-ωρολογιακά προσανατολισμένη ή με άλλα λόγια ένας παρατηρητής διαγράφει την καμπύλη κατά τον θετικό προσανατολισμό όταν έχει το εσωτερικό της καμπύλης στα αριστερά του.

Θεώρημα 10.1.1. Έστω D φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^2$ του οποίου το σύνορο ∂D είναι μια απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη λεία καμπύλη. Έστω επίσης $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 ορισμένες σε μια ανοικτή περιοχή U του $\mathbb{R}^2$ που περιέχει το D . Τότε

$$(10.1.1) \quad \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα Green στην ειδική περίπτωση όπου το D είναι ταυτόχρονα και x -απλό και y -απλό. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\int_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial D} F_1 dx = \iint_D \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{και} \quad \int_{\partial D} F_2 dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy$$

Για την πρώτη εξίσωση γράφουμε το D στην μορφή

$$a \leq x \leq b \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

οπότε

$$(10.1.2) \quad \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (F_1(x, g_2(x)) - F_1(x, g_1(x))) dx$$

Περνάμε τώρα στον υπολογισμό του $\int_{\partial D} F_1 dx$. Το ∂D αποτελείται από τέσσερις καμπύλες που δίνονται από τις εξισώσεις

$$y = g_1(x) \quad x = b, \quad y = g_2(x), \quad x = a$$

Στα τμήματα $x = a$ και $x = b$ δεν υπάρχει μεταβολή του x και άρα τα αντίστοιχα ολοκληρώματα είναι μηδέν. Στα άλλα δύο μέρη δίνουμε τις παραμετρήσεις $x = t, y = g_1(t) \quad a \leq t \leq b$ και $x = t, y = g_2(t) \quad a \leq t \leq b$. Στην καμπύλη $y = g_2(x)$ η παραμέτρηση είναι αντίθετη του προσανατολισμού της καμπύλης αφού ο προσανατολισμός του ∂D είναι αντι-ωρολογιακός. Άρα

$$(10.1.3) \quad \int_{\partial D} F_1 dx = \int_a^b F_1(x, g_1(x)) dx - \int_a^b F_1(x, g_2(x)) dx = \int_a^b (F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))) dx$$

Από τις (10.1.2) και (10.1.3) έπεται ότι

$$\int_{\partial D} F_1 dx = \iint_D \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Η απόδειξη της αντίστοιχης εξίσωσης για το y είναι παρόμοια (χρησιμοποιούμε ότι το D είναι y -απλό) και αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Παράδειγμα 10.1.2. Να επαληθεύσετε το Θεώρημα Green για $F_1(x, y) = x$ και $F_2(x, y) = x + y$ στον κυκλικό δίσκο D ακτίνας $R = 2$.

Λύση. Έχουμε

$$I_2 = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (1 - 0) dx dy = \iint_D 1 dx dy = \pi R^2 = 4\pi$$

Περνάμε τώρα στον υπολογισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Το ∂D είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2^2$ και χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση του

$$x(t) = 2 \cos t, \quad y(t) = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \int_0^{2\pi} (x(t)x'(t) + (x(t) + y(t))y'(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos t \sin t - 4(\cos t + \sin t) \cos t) dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

Βλέπουμε συνεπώς ότι $I_1 = I_2$ και άρα το Θεώρημα Green επαληθεύτηκε.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green μπορούμε να υπολογίσουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μέσω ενός διπλού ολοκληρώματος.

Παράδειγμα 10.1.3. Με χρήση του θεωρήματος Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (2x + e^y + y)dx + (xe^y + 3x - y^3)dy$$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$.

Λύση. Η C φράσσει τον μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την παραμέτρηση $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Αν $F = (F_1, F_2)$, όπου $F_1(x, y) = 2x + e^y + y$ και $F_2(x, y) = xe^y + 3x - y^3$ τότε $\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^y + 3$ και $\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^y + 1$. Από το Θεώρημα Green παίρνουμε

$$\oint_C (2x + e^y + y) dx + (xe^y + 3x - y^3) dy = \iint_D (e^y + 3 - e^y - 1) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\text{Εμβα}(D) = 2\pi.$$

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατευθείαν θα κάνουμε περισσότερες πράξεις.

Παράδειγμα 10.1.4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_C e^{xy}(y \cos x - \sin x) dx + xe^{xy} \cos x dy$ όπου C ο κύκλος $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Λύση. Θέτουμε $F_1(x, y) = e^{xy}(y \cos x - \sin x)$ και $F_2(x, y) = xe^{xy} \cos x$. Τότε

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{xy} \cos x + xye^{xy} \cos x - xe^{xy} \sin x = e^{xy}(xy \cos x - x \sin x + \cos x)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^{xy}x(y \cos x - \sin x) + e^{xy}(\cos x + 0) = e^{xy}(xy \cos x - x \sin x + \cos x)$$

$$\text{Άρα } \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Αν D ο δίσκος του $\mathbb{R}^2$ με σύνορο τον κύκλο C τότε από το Θεώρημα Green έπεται ότι

$$\int_C e^{xy}(y \cos x - \sin x) dx + xe^{xy} \cos x dy = \int_C F_1 dx + F_2 dx = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} 0 dx dy = 0$$

10.2 Εμβαδό με χρήση επικαμπυλίου ολοκληρώματος

Πρόταση 10.2.1. Έστω C μια απλή κλειστή λεία καμπύλη θετικά προσανατολισμένη. Τότε το εμβαδόν του χωρίου D που φράσσεται από την C δίνεται από τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\text{Εμβ}(D) = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy = - \int_C y \, dx = \int_C x \, dy .$$

Απόδειξη. Για το πεδίο $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (-y, x)$, από το θεώρημα Green παίρνουμε

$$\int_C (-y \, dx + x \, dy) = \int_C (F_1 \, dx + F_2 \, dy) = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_D (1 + 1) \, dx \, dy = 2 \iint_D dx \, dy = 2 \, \text{Εμβ}(D) .$$

Για $F_1 = -y$, $F_2 = 0$, το θεώρημα Green μας δίνει

$$\int_C -y \, dx = \iint_D 1 \, dx \, dy = \text{Εμβ}(D) .$$

Για $F_1 = 0$, $F_2 = x$ το θεώρημα Green μας δίνει

$$\int_C x \, dy = \iint_D 1 \, dx \, dy = \text{Εμβ}(D) .$$

□

Παράδειγμα 10.2.2. Υπολογίστε το εμβαδόν της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε την παραμέτρηση

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Για $F_1 = 0$ και $F_2 = x$,

$$E = \int_C x \, dy = \int_0^{2\pi} a \cos t b \cos t \, dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt$$

Για $F_1 = -y$ και $F_2 = 0$,

$$E = \int_C (-y) \, dx = \int_0^{2\pi} -b \sin t (-a \sin t) \, dt = ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt$$

Θέτοντας $F_1 = -y$ και $F_2 = x$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_C (-y) \, dx + x \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_C (-y) \, dx + \int_C x \, dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt + ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

Παράδειγμα 10.2.3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την καμπύλη C με

εξίσωση $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (αστεροειδές) χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση. Έχουμε $x(t) = \cos^3 t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3\cos^2 t(-\sin t) \Rightarrow dx = -3\cos^2 t \sin t dt$.

Ομοίως $y(t) = \sin^3 t \Rightarrow dy = 3\sin^2 t \cos t dt$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{Εμβ}(D) &= \int_C (-ydx + xdy) = \int_0^{2\pi} [(-\sin^3 t)(-3\cos^2 t \sin t) + \cos^3 t(3\sin^2 t \cos t)] dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (\sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t) dt = 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(4t)] dt = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Άρα $\text{Εμβ}(D) = 3\pi/8$.

10.3 Στροβιλισμός και απόκλιση

10.3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Έστω f βαθμωτή συνάρτηση ορισμένη σε μια ανοικτή περιοχή του $\mathbb{R}^3$. Θυμίζουμε ότι

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Άρα η βαθμωτή συνάρτηση f παράγει ένα διανυσματικό πεδίο.

Ορισμός 10.3.1. Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ δίνεται από τον τύπο

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ορισμός 10.3.2. Ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ είναι η συνάρτηση

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Πρόταση 10.3.3. Έστω $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ διανυσματικό πεδίο C^2 κλάσης. Τότε

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

δηλαδή η απόκλιση του στροβιλισμού είναι μηδέν.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} \right) + \left(-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \right) \\ &= 0 + 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

από το Θεώρημα Schwarz. □

Πρόταση 10.3.4. Έστω f βαθμωτή συνάρτηση C^2 κλάσης. Τότε

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

δηλαδή ο στροβιλισμός της κλίσης είναι μηδέν.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\mathbf{F} = \nabla f = (F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Από το Θεώρημα Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Ομοίως προκύπτει ότι $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$ και $\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$, οπότε $\text{curl } \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$. □

Αν $\mathbf{F}$ είναι ένα συντηρητικό πεδίο τότε $\mathbf{F} = \nabla f$ και συνεπώς έχουμε το εξής πόρισμα

Πόρισμα 10.3.5. Ο στροβιλισμός ενός συντηρητικού πεδίου είναι μηδέν.

10.3.2 Το Θεώρημα Green με χρήση του στροβιλισμού

Θεωρώντας ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ του $\mathbb{R}^2$ ως διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ του $\mathbb{R}^3$ όπου η z -συντεταγμένη του είναι η μηδενική συνάρτηση και οι F_1, F_2 δεν εξαρτώνται από την z -συντεταγμένη, ο στροβιλισμός του $\mathbf{F}$ παίρνει την μορφή

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Άρα

$$\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

οπότε το Θεώρημα Green αναδιατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 10.3.6. (Διανυσματική μορφή του Θεωρήματος Green) Έστω D φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^2$ του οποίου το σύνορο ∂D είναι μια απλή κλειστή λεία καμπύλη θετικά προσανατολισμένη. Έστω επίσης $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ανοικτή περιοχή του $\mathbb{R}^2$ που περιέχει το D . Τότε

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy$$

Παρατήρηση 10.3.7. Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται στον $\mathbb{R}^3$ όπου είναι γνωστό ως Θεώρημα Stokes.

10.3.3 Το Θεώρημα Green με χρήση της απόκλισης

Έστω C μια απλή κλειστή λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του επιπέδου και έστω $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια κανονική και θετικά προσανατολισμένη παραμέτρηση της C . Για κάθε σημείο $P = \mathbf{r}(t)$ της C είχαμε ορίσει το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της C στο P , να είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{T}(P) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right)$$

Ορίζουμε τώρα το **κάθετο εξερχόμενο μοναδιαίο διάνυσμα της C στο P** να είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{n}(P) = \mathbf{T}(P) \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} & \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right)$$

Παρατηρείστε ότι το $\mathbf{n}(P)$ είναι κάθετο στο $\mathbf{T}(P)$ και εφόσον η C έχει προσανατολισθεί θετικά δείχνει προς το εξωτερικό της καμπύλης. Το ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

καλείται η **εξερχόμενη ροή του $\mathbf{F}$ από την καμπύλη C** .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το Θεώρημα Green αναδιατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 10.3.8. (Θεώρημα Απόκλισης στο επίπεδο) Έστω D φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^2$ του οποίου το σύνορο ∂D είναι μια απλή κλειστή λεία καμπύλη θετικά προσανατολισμένη. Έστω επίσης $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ανοικτή περιοχή του $\mathbb{R}^2$ που περιέχει το D . Τότε

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dx \, dy$$

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_a^b \left(F_1(\mathbf{r}(t)) \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} - F_2(\mathbf{r}(t)) \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b (F_1(x(t), y(t)) y'(t) - F_2(x(t), y(t)) x'(t)) \, dt \\ &= \int_C -F_2 \, dx + F_1 \, dy \\ &= \int_{\partial D} (-F_2, F_1) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial (-F_2)}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 10.3.9. Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται στον $\mathbb{R}^3$ όπου είναι γνωστό ως Θεώρημα Απόκλισης του Gauss.