

Άσκηση 1

1) Η ετήσια εισροή I ενός ταμειευτήρα είναι κάθε χρόνο σταθερή και ίση με 10 μονάδες, ενώ η εκροή Q είναι αύξουσα συνάρτηση του αποθέματος S της μορφής $Q = 0.2e^{0.3S}$:

(α) Κατασκευάστε μοντέλο προσομοίωσης του συστήματος πραγματοποιώντας μια πρώτη προσομοίωση μήκους 100 ετών, ξεκινώντας από μια αρχική τυχαία τιμή S_0 στο διάστημα (5, 15), και επαναλάβετε πειραματικά την προσομοίωση αλλάζοντας κατά 0.01% την πρώτη τιμή.

(β) Με βάση ένα δείγμα 20 τιμών εκτιμήστε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τα όρια διακύμανσης (για συντελεστή εμπιστοσύνης 95%) της συχνότητας με την οποία συμβαίνει το απόθεμα του ταμειευτήρα να είναι μεγαλύτερο από 5 μονάδες.

(γ) Υπολογίστε θεωρητικά το απαιτούμενο μήκος προσομοίωσης και τον απαιτούμενο αριθμό επαναλήψεων για να γίνει εκτίμηση της πιο πάνω συχνότητας με ακρίβεια 99% (με την παραδοχή ότι η συχνότητα αυτή ακολουθεί κανονική κατανομή).

(δ) Χαρακτηρίστε το ίδιο το σύστημα αλλά και την κατηγορία των παραπάνω προσομοιώσεων.

2) Να εκτιμηθούν τα σημαντικά περιθώρια δειγματικά στατιστικά χαρακτηριστικά (4 πρώτες ροπές) της χρονοσειράς μιας προσομοίωσης του αποθέματος με τη μέθοδο των (α) κεντρικών ροπών (με τις κλασικές εκτιμήτριες) και (β) L ροπών (με τις μεροληπτικές εκτιμήτριες), και (γ) μέγιστης πιθανοφάνειας για διπαραμετρική κατανομή Gaussian και gamma.

3) Αν η ετήσια εισροή του ταμειευτήρα χωρητικότητας 5 μονάδων ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 6 και τυπική απόκλιση 1: (α) να προσομοιωθεί το σύστημα με τη μέθοδο μόνιμης κατάστασης για μεγάλο μήκος (π.χ. 1000 ετών) με τυχαία σταθερή ετήσια απόληψη στο διάστημα (5, 10), (β) να υπολογιστεί η πιθανότητα αστοχίας κάλυψης αναγκών και υπερπήδησης (γ) να σχεδιαστεί η καμπύλη αξιοπιστίας – απόληψης με ακρίβεια 1 δεκαδικού, και να εκτιμηθεί η σταθερή ετήσια απόληψη από το σύστημα για αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας 5%, και (δ) να επαναληφθεί το προηγούμενο ερώτημα για προσαύξηση κατά 30% της χωρητικότητας του ταμειευτήρα.