

Τυχίες Μεταβλητές

①

Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος που ενδιαφέρει όχι καθ' αυτό το αποτέλεσμα του πειράματος, αλλά ένα ή περισσότερα αριθμητικά χαρακτηριστικά του αποτελέσματος αυτού

→ Τυχίες Μεταβλητές (Τ.Μ.)

Π.χ.

Στρέβουμε νότιοτα 10 φορές. Συνήθως δεν μας ενδιαφέρει ακριβώς η αντιστοιχία K ή Γ , αλλά π.χ. πόσες φορές ήρθε η ευθεία K

→ Τ.Μ. X : # κερών επί 10 πηγές.

Ορισμός: Τυχίες Μεταβλητές (Τ.Μ.)

κεείται για μεταβλητή η τιμή της οποίας καθορίζεται από το αποτέλεσμα ενός τυχίου πειράματος

Αν Ω είναι ο δ.χ. του πειράματος τότε η ζ.τ. $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

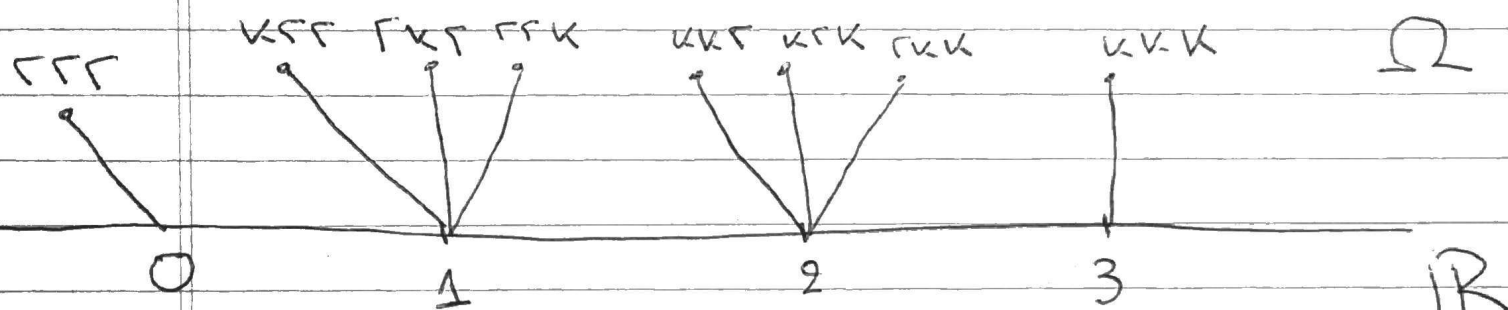
Τις Τ.Μ. τις συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα

Πείραξη Πίχυντε νότις 3 φορές

Ο δ.χ. είναι

$$\Omega = \{ (\Gamma, \Gamma, \Gamma), (\kappa, \Gamma, \Gamma), (\Gamma, \kappa, \Gamma), (\Gamma, \Gamma, \kappa), (\kappa, \kappa, \Gamma), (\kappa, \Gamma, \kappa), (\Gamma, \kappa, \kappa), (\kappa, \kappa, \kappa) \}$$

Έστω $\sim$ T.M. $X: \# \kappa \text{ στον } \Omega$



$$P(X=0) = 1/8$$

$$P(X=1) = 3/8$$

$$P(X=2) = 3/8$$

$$P(X=3) = 1/8$$

+

$$8/8$$

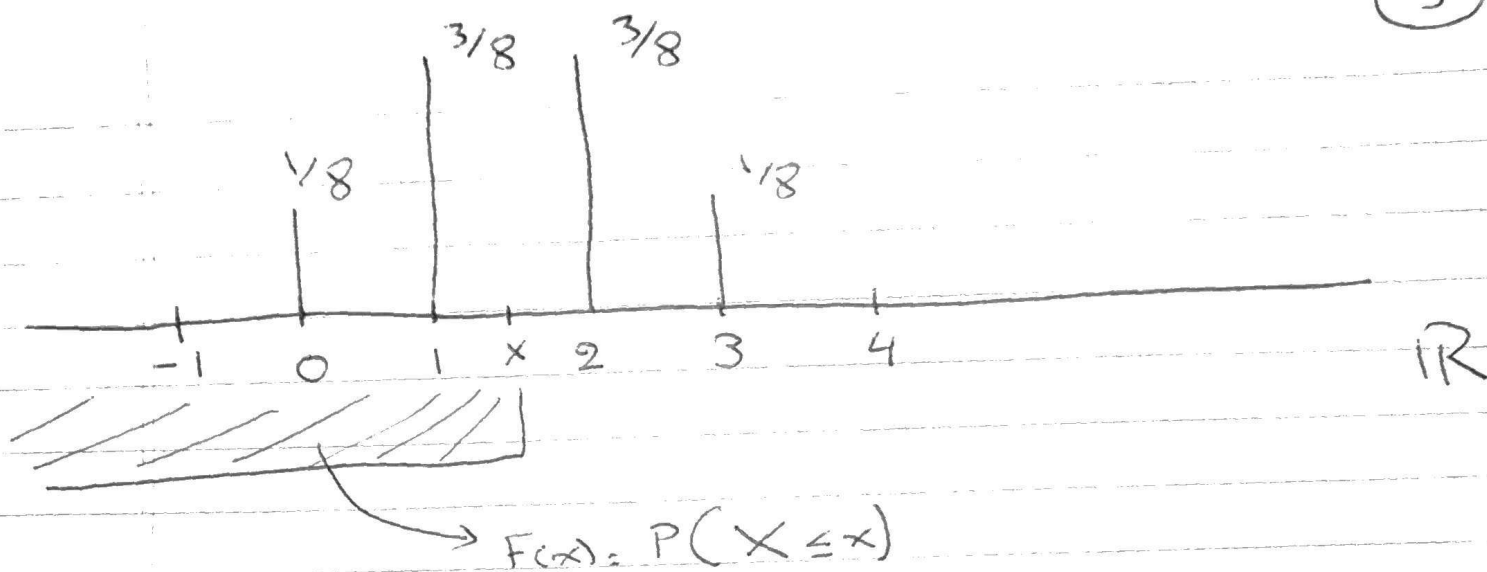
→ Κατανομή της τ.τ. X

Ορίστος: Η συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ τέ

$F(x) = P(X \leq x)$ καλείται συνάρτηση κατανομής

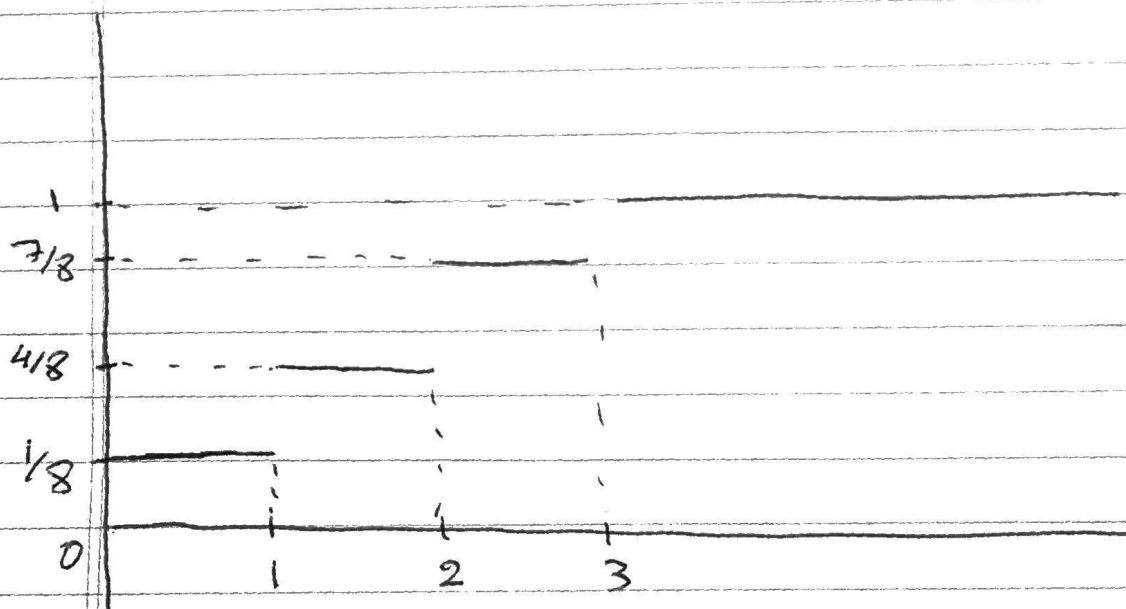
η συνάρτηση (δ.κ.η.) της τ.τ. X

3



Στο προηγούμενο παράδειγμα

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



- "κατακλιση", • "Δεξιά Συνέπεια"
- "Αγέρεια" για το $P(X=x)$

Ιδιότητες

- i) $0 \leq F(x) \leq 1$
- ii) $F(x_1) \leq F(x_2)$ όταν $x_1 \leq x_2 \rightarrow$ F αύξουσα
- iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$
- iv) $F(x_1) \downarrow F(x_2)$ όταν $x_1 \downarrow x_2 \rightarrow$ F σφικτική

σφικτική

Κάθε συνάρτηση F που ικανοποιεί τις ii), iii), iv) είναι β.κ.η.

Παράδειγμα

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

- $x_1 \leq x_2 \Rightarrow 1 - e^{-\alpha x_1} \leq 1 - e^{-\alpha x_2}$ ✓
- $\text{σφικτική} \Rightarrow \text{αύξουσα} \Rightarrow \text{σφικτική} \Rightarrow \text{αύξουσα}$
- $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-\alpha x}) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\alpha x}) = 1$

Διακριτές και συνεχείς ζ.τ.

Ορισμός: Μια ζ.τ. X καλείται διακριτή αν παίρνει με πιθανότητες ≥ 1 ανεξαρτήτως ή αριθμητικό σύνολο τιμών $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$.

Τότε η $f(x_k) = P(X=x_k)$, $k=0,1,2,\dots$ καλείται συνάρτηση πιθανότητας (σ.τ.π.)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ \sum_{k=0}^r f(x_k), & x_r \leq x < x_{r+1} \end{cases} \quad r=0,1,2,\dots$$

$$f(x_r) = \begin{cases} F(x_0), & r=0 \\ F(x_r) - F(x_{r-1}), & r=1,2,\dots \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

$$\bullet P(\alpha < X \leq \beta) = P(X \leq \beta) - P(X \leq \alpha) = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \bullet P(\alpha \leq X \leq \beta) &= P(X \leq \beta) - P(X < \alpha) = \\ &= P(X \leq \beta) - P(X \leq \alpha) + P(X = \alpha) \\ &= F(\beta) - F(\alpha) + f(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(\alpha < X < \beta) &= P(X < \beta) - P(X \leq \alpha) = \\ &= P(X \leq \beta) - P(X \leq \alpha) - P(X = \beta) \\ &= F(\beta) - F(\alpha) - f(\beta) \end{aligned}$$

$$\bullet P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) + f(\alpha) - f(\beta)$$

Ορισμός: Μία τ.π. X καλείται βωρεχία

τε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f(x)$

αν $(0 \leq f(x) \leq 1)$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$:

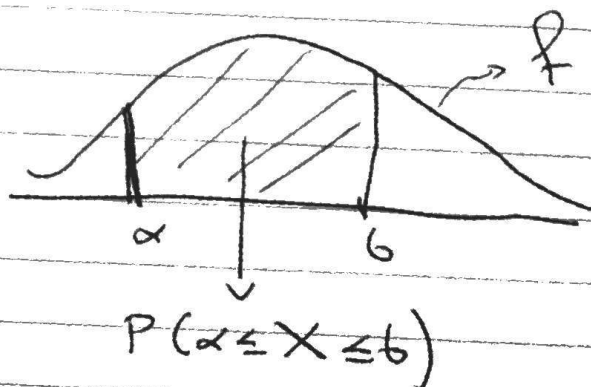
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

ii) Το σύνολο σημείων S_X της X μπορεί να εκφραστεί ως ένωση ενός πεπερασμένου αριθμού (την περίπτωση) διαστημάτων πραγματικών αριθμών και σημείων:

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$$

iii) Για οποιαδήποτε $a < b$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



Properties

i) $P(X = \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) $P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta)$
 $= P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$

iii) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$

iv) $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

- Au Eigenschaften f. W.D.F. f. $f(x)$
 - $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Diese sind G.N.N.

Example:

$f(x) = c \cdot x(1-x), \quad 0 < x < 1$

i) N. Bed. zu c, was n. f. v. sind G.N.

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$
- $\int_0^1 c \cdot x(1-x) dx = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{c=6}$

ii) Na bedei n $P(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4})$

$$P(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 6x(1-x) dx = \dots = \frac{9}{32}$$

iii) Na bedei n $P(X > \frac{1}{2} \mid X > \frac{1}{4})$

$$P(X > \frac{1}{2} \mid X > \frac{1}{4}) = \frac{P(X > \frac{1}{2} \text{ and } X > \frac{1}{4})}{P(X > \frac{1}{4})} =$$

$$= \frac{P(X > \frac{1}{2})}{P(X > \frac{1}{4})} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 6x(1-x) dx}{\int_{\frac{1}{4}}^1 6x(1-x) dx} = \dots$$