

ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ

• Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση από πλήθος με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων

• Η τ.μ. $\bar{X}$ που ευφράζει το πλήθος των λευκών βφαίρων ανάμεσα σε n τυχαία επιλεγμένες βφαίρες (χωρίς επανάθεση) από κάληη με

Λ : ΛΕΥΚΕΣ και $N-\Lambda$: ΜΑΥΡΕΣ βφαίρες.

• (ωμβ) $X \sim h(N, \Lambda, n)$

$$\mathbb{P}(X=x) = f(x) = \frac{\binom{\Lambda}{x} \binom{N-\Lambda}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Παράδειγμα Ανάμεσα σε 1000 λαχεία, κερδίζουν τα 5.
Αν έχουμε αγοράσει 20, ποια η πιθανότητα να κερδίσουμε.

Λύση Έστω X : # λαχείων που κερδίζουν μεταξύ αυτών που έχουμε αγοράσει.

$$X \sim h(1000, 20, 5)$$

$$\mathbb{P}[X \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[X=0] = 1 - \frac{\binom{20}{0} \binom{1000-20}{5-0}}{\binom{1000}{5}}$$

Poisson

• X τμ. που εκφράζει το πλήθος των πραγματοποιήσεων από ένα μεγάλο αριθμό "επάνων" ενδεχομένων.

• $P_k = P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots$ $X \sim P_0(\lambda)$

• Αφορά # συμβάντων σε ορισμένο χρόνο ή χώρο.

- πχ
- (i) # κλήσεων για βοήθεια σε 1 ώρα.
 - (ii) # διακοπών λειτουργίας μηχανής σε 1 μέρα.
 - (iii) # εκπομπής βηματιδίων α από ραδιενεργό ουσία σε διάστημα 1 millisecond.

* N δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $\boxed{\lambda/N = p}$.

$$P[X=k] = \binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k}$$

$$= \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k! N^k} \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-k}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{καθώς}$$

$$(i) \binom{N}{k} = \frac{N!}{k! (N-k)!} \quad \text{και} \quad (ii) \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$$

Siméon Denis Poisson, (1837)

$$\boxed{\begin{matrix} n \geq 20 \\ p \leq 10/n \end{matrix}}$$

Παράδειγμα

Η πιθανότητα να έχει κάποιος ατύχημα σε ένα βηρείο της εθνικής είναι 0.0001.

Το Σαβίκο διέρχονται από το βηρείο αυτό 1000 αυτοκίνητα. Ποια η πιθανότητα να συμβούν 2 ή

περισσότερα ατυχήματα.

Λύση

Έστω X : # πλήθος ατυχημάτων.

Τότε $X \sim \text{Bin}(1000, 0.0001)$.

Στην πράξη και όταν $X \sim \text{Bin}(n, p)$ με

$$\lambda = np$$

$n \geq 20$ και $p \leq \frac{10}{n}$, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της διωνυμικής μέσω της κατανομής Poisson (όπως είδαμε).

$$\text{Άρα } \mathbb{P}[X \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[X=1] - \mathbb{P}[X=0] \quad (*)$$

. Απόκτηση των (*) μέσω πινάκων Poisson ... = 0.00467.
θεωρούμε: $X \sim P_0(0.1)$

. Απόκτηση των (*) με την χρήση της Διωνυμικής

$$\text{Κατανομής} \dots = \underline{0.00468}$$

Συνεχής τμ

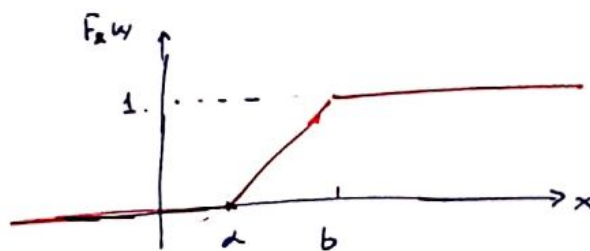
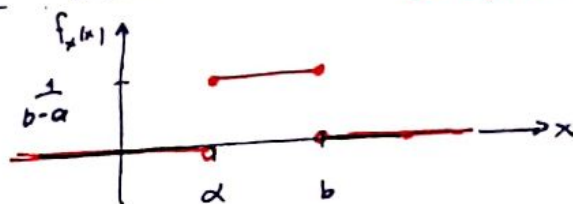
Ομοιόμορφη

- Εμφανίζεται όταν η τμ. X παίρνει τιμές $[a, b]$ με πιθανότητες της μορφής $P(X \in [x_1, x_2])$ ανάλογες του μήκους: $x_2 - x_1$ του διαστήματος $[x_1, x_2]$.

· $f_X(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$ και μηδέν αλλού. (δικλάση ανόρτησι).

· Συμβ $X \sim U[a, b]$

· $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}$



Παράδειγμα | αριθμός X εκλέγεται τυχαία στο $[0, 1]$.

Ποια η πιθανότητα το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του να είναι

2 ή 5.

Λύση $X \sim U[0, 1]$. Άρα $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ και

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$P[0.2 \leq X < 0.3 \text{ ή } 0.5 \leq X < 0.6] \stackrel{(!)}{=} P[0.2 \leq X < 0.3] + P[0.5 \leq X < 0.6] \\ = F(0.3) - F(0.2) + F(0.6) - F(0.5) = 0.2$$

Κανονική Κατανομή

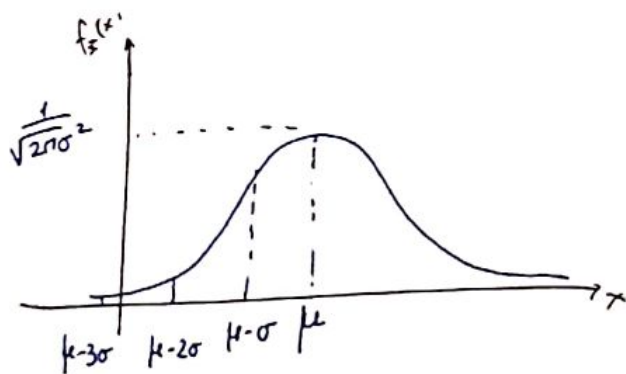
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x-\mu)^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

• Συμβ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

↑
πρότυπος δείκτης

↑
πρότυπος μεταβλητότητας

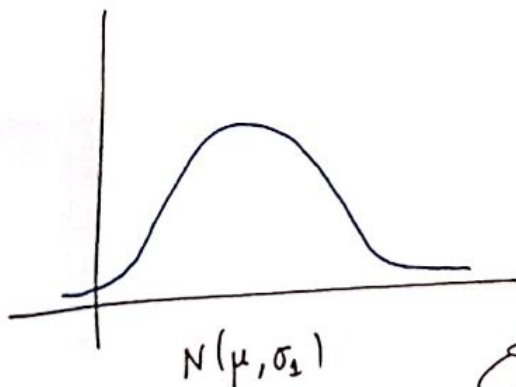
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



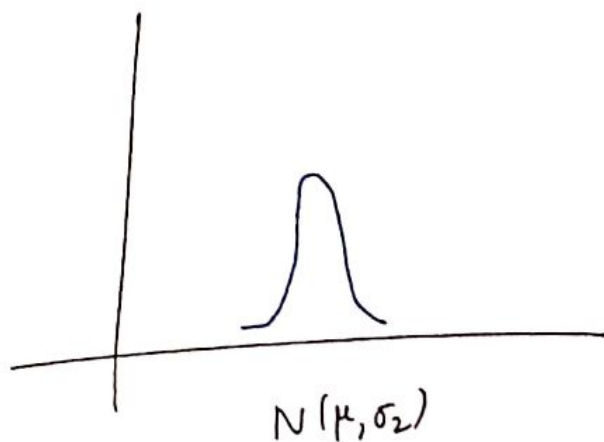
• ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ

• το 99.72% των τιμών ως X ανήκει στο διάστημα $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$

• Παρατήρηση



$N(\mu, \sigma_1)$



$N(\mu, \sigma_2)$

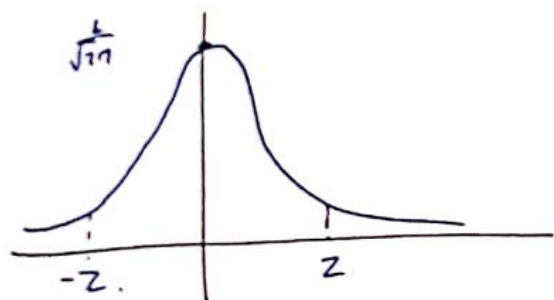
$\sigma_1 > \sigma_2$

• Για $\mu=0, \sigma=1 \leadsto$ τυποποιημένη κανονική κατανομή

$$N(0,1) \text{ με } f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R} \text{ και}$$

ΟΚ η $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$

Βρίσκουμε τιμές του Φ
από πίνακες.



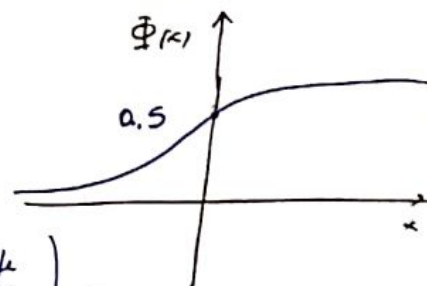
• Λόγω συμμετρίας: $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$

• $\Phi(0) = 0.5$

• Εάν $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(πάλι χρήσιμη ιδιότητα)

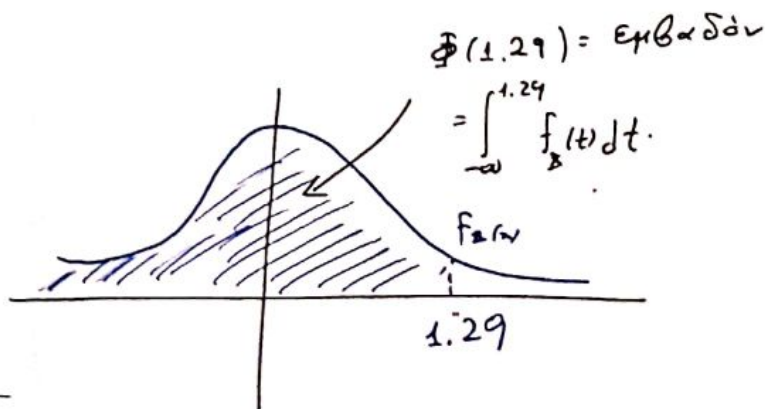
Επομένως $F_Z(z) = \Phi\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$ και



$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

Πίνακας της σκπ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

	0	1	2	3	...	9
0.0	0.5					
0.1						
0.2						
...						
0.7	$\Phi(0.7)$					
1.0						
1.1						
1.2						$\Phi(1.29)$
1.7	$\Phi(1.7)$					



Παραδείγματα

1) $X \sim N(1000, 8^2)$.

$$P[X \leq 990] = P\left[\frac{X-1000}{8} \leq \frac{990-1000}{8}\right] = P[Z \leq -1.25]$$

$$= \Phi(-1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.89435 = 0.10565$$

(Συνέχεια)

2) Ποιο πρέπει να είναι το σ ώστε

$$P(X \leq 990) \leq 0.01.$$

$$\text{Είναι } P\left[\frac{X-1000}{\sigma} \leq \frac{990-1000}{\sigma}\right] = P\left[Z \leq \frac{-10}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right). \text{ Άρα πρέπει } \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.99 \xrightarrow{\text{πίνακας}}$$

$$\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) \geq \Phi(2.33) \xrightarrow[\text{Μονοτονία(?)}]{\Phi: \text{Γ.Κ.Π.}} \frac{10}{\sigma} \geq 2.33 \Rightarrow \sigma \leq 4.29.$$

3) Μπαζαρία, διάρκεια ζωής $X \sim N\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$.

Ποια η πιθανότητα μία τέτοια μπαζαρία να λειτουργήσει
6ω 4: έως ???

$$P[3 < X \leq 4] = \Phi\left(\frac{4-3}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{3-3}{0.5}\right) = \Phi(2) - 0.5 =$$

$$= 0.97725 - 0.5 = 0.47725.$$

σημείωση: Εάν X : συνεχής τ.κ., τότε

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$$

$$\text{και } P(X=a) = 0 = P(X=b) \dots$$

$$4) X \sim N(50, 100^2)$$

$$\text{Ποια η τιμή του } c : P[X \leq c] = 0.1840$$

$$\text{Είχα: } P\left[\frac{X-50}{100} \leq \frac{c-50}{100}\right] = P\left[Z \leq \frac{c-50}{100}\right] = \Phi\left(\frac{c-50}{100}\right).$$

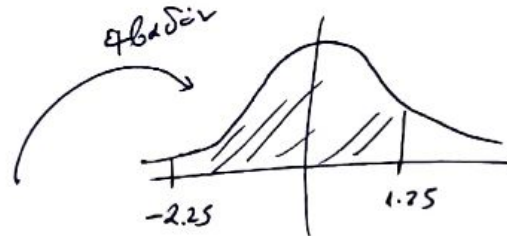
$$\text{Άρα, πρέπει: } \Phi\left(\frac{c-50}{100}\right) = 0.1840 \xrightarrow{\text{πίνακας}} \Phi(0.9) \xrightarrow{\Phi: 1-1} \boxed{c = -40}$$

$$5) X \sim N(6, 16). \text{ Ποια η πιθανότητα: } P[|X-5| < 3.5].$$

$$\text{Είχα: } P[-3.5 < X-5 < 3.5] = P[1.5 < X < 8.5] =$$

$$= P\left[\frac{1.5-6}{4} < \frac{X-6}{4} < \frac{8.5-6}{4}\right]$$

$$= P[-2.25 < Z < 1.25]$$

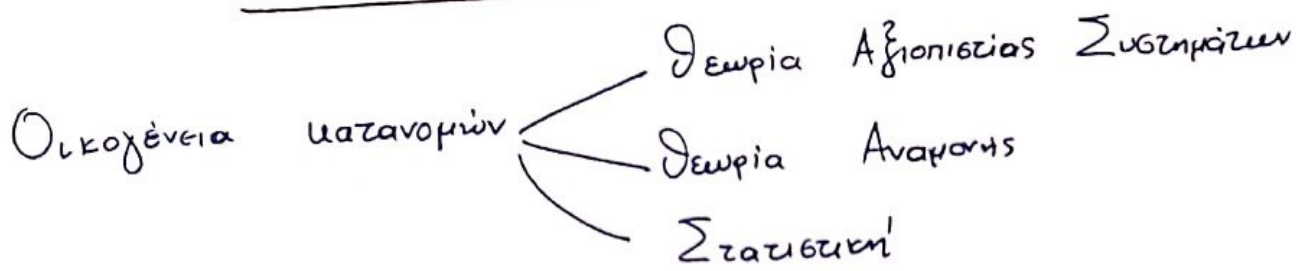


$$= \Phi(1.25) - \Phi(-2.25) =$$

$$= \Phi(1.25) - 1 + \Phi(2.25) = 0.8822$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ 0.8944 & & 0.9878 \end{array}$$

Κατανομή Γάμμα



X συνεχής τ.μ. $\sim G_a(a, p)$, $a, p \geq 0$.

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \cdot e^{-ax} \stackrel{\text{εμφ.}}{=} G(x, a, p), \underline{\underline{x \geq 0}}$$

$$\text{όπου } \Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx, p > 0$$

Παρατηρήσεις: (1) $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ αναγωγική σχέση

$$(2) \Gamma(1) = 1.$$

$$(3) \Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(4) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

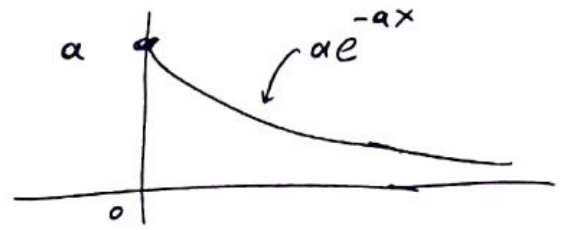
Ειδικές μορφές της κατανομής Γάμμα είναι:

- Ευθεία κατανομή
- Κατανομή Erlang
- Κατανομή χ^2

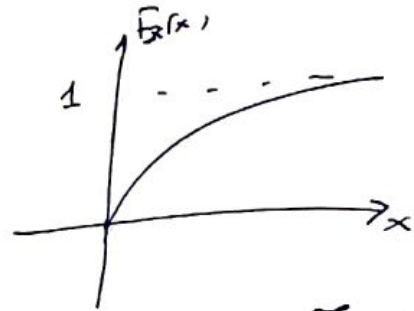
Ευθεία Κατανομή, $\text{Exp}(a) \equiv G_a(a, 1)$, $p=1$

ωρβ $X \sim \text{Exp}(a)$

$$f_X(x) = \begin{cases} a e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (a > 0).$$



$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Μια ενδιαφέρουσα Εφαρμογή της είναι ο χρόνος ζωής κάποιου εξαρτήματος (πχ ηλεκτρικός λαμπτήρας)

Παρατηρήσεις

$$(i) \mathbb{P}(x_1 < X < x_2) = e^{-ax_1} - e^{-ax_2}$$

$$(ii) \mathbb{P}(X > x) = e^{-ax}$$

$$(iii) \text{ Απώλεια Μνήμης: } \mathbb{P}(X > k+l | X > l) = \frac{\mathbb{P}(X > k+l, X > l)}{\mathbb{P}(X > l)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > k+l)}{\mathbb{P}(X > l)} = \frac{e^{-a(k+l)}}{e^{-al}} = e^{-ak} = \mathbb{P}(X > k)$$

(iv) Το διακρίνω "ανάλογο" της Ευθείας

είναι η γεωμετρική κατανομή (απώλεια μνήμης)

Παράδειγμα Η διάρκεια 6ε λεπτά των υπερβολικών
τηλεφωνικών συνδιαλέξεων $\sim \text{Exp}(1/2)$.

Ποια η πιθανότητα μια συνδιάλεξη να υπερβεί τα
6 λεπτά ???

Λύση $\mathbb{P}(X > 6) = e^{-\frac{6}{2}} = 0.0498$ μέσω της $F_{2/1}$

ή μέσω της $f_{2/1} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ θα έχουμε:

$$\mathbb{P}(X > 6) = \int_6^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = \left(e^{-\frac{1}{2}x} \right)_{x=0}^{\infty} = e^{-\frac{6}{2}} - 0 = 0.0498.$$

Κατανομή Erlang $\equiv \text{Ga}(a, p)$, $p = n \in \mathbb{N}$

$$f_{2/1}(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}, \quad x > 0 \quad (\text{και μηδέν διαφορετικά})$$

▮ Θεώρημα Αναμονής: Αν $X_i \sim \text{Exp}(a) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Erlang}(a, n)$
↑ ανεξάρτητες

Κατανομή $\chi^2 \equiv G(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}), \underline{n \in \mathbb{N}}$

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \equiv \chi^2(n).$$

Στατιστική: $\bullet \underset{\text{αντξ}}{X_i} \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$ βαθμοί
ελευθερίας

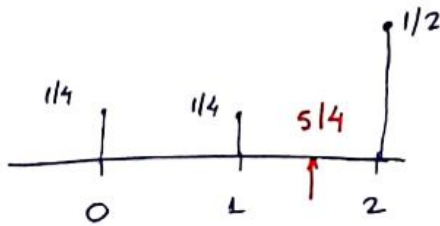
$\bullet X \sim \text{Erlang}(a, n) \Rightarrow 2aX \sim \chi^2(n)$

• X : τ.μ. $\rightarrow F$ κατανομή

↪ δεν δίνει άμεσα κάποια πληροφορία σχετικά με τις τιμές που μπορεί να λάβει η τ.μ. X .

• Θα ήταν πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε "γύρω" από ποια τιμή κυμαίνεται η $X \rightarrow$ μέση τιμή.

π.χ. τ.μ. X διακριτή $f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & x=0 \\ 1/4, & x=1 \\ 1/2, & x=2 \end{cases}$



κέντρο βάρους της f στο $\mathbb{R}$ από το Ω , μέσω της X :

$$0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

Ορισμός Έστω X : διακριτή τ.μ. με β.μ.π. $f(x_k) = P[X=x_k]$,

$k=0,1,2,\dots$. Η μέση τιμή της X συμβολίζεται με $E[X]$ ή μ και ορίζεται ως: $\mu = E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(x_k)$

υπό την προϋπόθεση ότι: $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| f(x_k) < \infty$.

Εάν η X είναι συνεχής τ.μ. με β.η.π. $f_X(x)$ έχουμε:

$$\mu = E[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad \text{εάν} \quad \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx < \infty.$$

Παραδείγματα:

(1) X ζμ. $f(x) = \frac{5-x}{15}$, $x=0,1,2,3,4$.

$$E[X] = \sum_{x=0}^4 x f(x) = 0 + 1 \cdot \frac{5-1}{15} + 2 \cdot \frac{5-2}{15} + 3 \cdot \frac{5-3}{15} + 4 \cdot \frac{5-4}{15} = 1.33$$

(2) X ζμ με $f(x) = \frac{3^{x-1}}{4^x}$, $x=1,2,3,\dots$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j = \frac{|a| < 1}{1-a}$$

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{3^{x-1}}{4^x} = \frac{1}{4} \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 4.$$

παράγωγος (καθώς η

συνάρτηση είναι γραμμική)

$$\sum_{j=1}^{\infty} j a^{j-1} = \frac{d}{da} \left(\frac{1}{1-a} \right) = \frac{1}{(1-a)^2}$$

(3) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} =$$

$$= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \quad \text{by parts}$$

$$= - \int_0^{\infty} x (e^{-\lambda x})' dx = - \left[x e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

καθώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0, \quad \lambda > 0$

Παρατηρήσεις

- Η μέση τιμή μιας ζ.μ. (εάν υπάρχει) είναι πραγματικός αριθμός (και όχι συνάρτηση).
- Δεν έχουν όλες οι ζ.μ. μέση τιμή. Παράδειγμα η κατανομή Cauchy με β.π.π.

$$f_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Έυκολα αναζητούμε ότι είναι β.π.π. μιας ζ.μ. η παραπάνω συνάρτηση αφού:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$$
$$= (\arctan x)_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

- Είναι
$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathcal{B}}(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1+x^2) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(1+x^2) \right\}.$$

Συνεπώς το οριστήριο δεν αργεία $\leadsto$

$\leadsto$ Δεν ορίζεται η μέση τιμή!

Θεώρημα Έστω τ.μ. X και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) f(x_k), & X: \text{διακριτή στο σύνολο } \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, & X: \text{συνεχής στο } \mathbb{R} \end{cases}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το άθροισμα (αντ. ολοκλήρωμα) συγκεντρώνει απολύτως.

Σημείωση Η $Y := g(X)$ είναι μια νέα τ.μ. Η μέση τιμή της μπορεί εναλλακτικά από το παραπάνω Θεώρημα να υπολογιστεί μέσω του φ.π.μ., αλλά βεβαίως βλέπει η κατανομή της τ.μ. Y . Σχετικώς, θα επανέλθουμε αργότερα στην παράγραφο αυτή.

Ιδιότητες της μέσης τιμής

$$(1) E[aX + b] = aE[X] + b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

γραμμικότητα!!!

$$(2) E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)], \quad \begin{matrix} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$(3) E\left[\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right] = \sum_{i=1}^n a_i E[g_i(X)], \quad \begin{matrix} g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ a_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

με δεδομένο ότι υπάρχουν οι μέσες τιμές.

Απόδειξη για την (1) εάν X : συνεχής ζ.μ με γ.π.π $f_X(x)$.

$$\mathbb{E}[\underbrace{aX+b}_{g(X)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f_X(x) dx = a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx}_{\mathbb{E}[X]} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx}_1 = a\mathbb{E}[X] + b$$

Παράδειγμα X : Διακριτή ζ.μ με $f_X(x) = \begin{cases} 0.5, & x=0 \\ 0.1, & x=1 \\ 0.3, & x=2 \\ 0.1, & x=3 \end{cases}$

↖ Δεύτερη ροπή $\mathbb{E}[X^2] = ?$ Εδώ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(y) = y^2$ και X : Διακριτή ζ.μ. Άρα:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x=0}^3 x^2 f(x) = 0^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1 = 2.2$$

Ορισμός: Έστω ζ.μ X με γ.μ.π (ή γ.π.π.) $f(x)$. Λέμε ότι

$\exists$ η ροπή n -τάξης περί των αρχών, $n \in \mathbb{N}$ όταν

υπάρχει η $\mathbb{E}(|X|^n)$. Τότε:

$$\mathbb{E}[X^n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} x_k^n f(x_k), & X: \text{διακριτή στο σύνολο } \{x_0, x_1, \dots\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx, & X: \text{συνεχής στο } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Παρατήρηση: Για $n=1 \leadsto$ μέση τιμή.

Πρόταση Αν $\exists$ η ροπή n -τάξης (περί την αρχή)

τότε υπάρχουν και όλες οι ροπές m -τάξης με $m \leq n, m \in \mathbb{N}$.

Επομένως η κατανομή Cauchy δεν έχει καμία ροπή αφού δεν έχει μέση τιμή.

Ορισμός: Έστω τμ X με πεπερασμένη μέση τιμή. Λέμε ότι $\exists$ η κεντρική ροπή n -τάξης, $n \in \mathbb{N}$ εάν $E(|X-\mu|^n) < \infty$.

Τότε: $\mu_n := E[(X-\mu)^n]$.

Ειδικά για $|n|=2 \rightarrow$ ^(διακύμανση) διασπορά της τμ X και συμβολίζεται

$V(X)$ ή $\sigma^2(X)$. Είναι δηλαδή

$$\sigma^2 = V(X) := E[(X-\mu)^2] =$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \mu)^2 f(x_k), & X: \text{διακριτά στο } \{x_0, x_1, \dots\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx, & X: \text{συνεχής στο } \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Η διασπορά δείχνει πόσο "κοντά" ή "μακριά" είναι οι τιμές της X από την μέση τιμή.
- Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς καλείται τυπική απόκλιση. $\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$

Ιδιότητες

- $V(X) \geq 0$, $\sigma(X) \geq 0$. (από τον ορισμό)
- $V(c) = 0$, $\forall c \in \mathbb{R}$ (σταθερά)
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, X : τ.μ.

$$E[aX+b - (a\mu+b)]^2 = E[aX - a\mu]^2 = a^2 E[X - \mu]^2$$
- $\sigma(aX+b) = |a| \sigma_X$.
- X : τ.μ. με $E[X^2] < \infty$. Τότε $V(X) < \infty$ και

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Αποδ! Αφαι $E[X^2] < \infty \leadsto E[X] < \infty$.

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X-\mu)^2] = E[X^2 + \mu^2 - 2\mu X] = E[X^2] + E[\mu^2] - \\ &\quad - 2\mu E[X] = E[X^2] - (E[X])^2. \end{aligned}$$

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X]$$

Παράδειγμα

(1) α) X τυ.

$$f(x) = \begin{cases} 0.5, & x=0 \\ 0.1, & x=1 \\ 0.3, & x=2 \\ 0.1, & x=3 \end{cases}$$

$$\boxed{V(X) = ???}$$

$$E[X] = 0.5 \cdot 0 + 0.1 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 = 1$$

$$E[X^2] = 0.5 \cdot 0^2 + 0.1 \cdot 1^2 + 0.3 \cdot 2^2 + 0.1 \cdot 3^2 = 2.2$$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 1.2$$

(b) $V(5X+3) = 5^2 V(X) = 25 \cdot 1.2 = 30$

(2) X τυ, $X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$. $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} x^2 (e^{-\lambda x})' dx \quad \text{by parts}$$

$$= - \left[\cancel{x^2} e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \quad \text{or} \quad \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} \cdot \lambda dx =$$

$$= \frac{2}{\lambda} E[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

for $V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}, (\lambda > 0)$

$$(3) X \sim \text{Be}(p), \quad p > 0. \quad X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1-p. \end{cases}$$

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$$

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

$$(4) X \sim \text{Ge}(p), \quad \text{avé?} \text{ Sor. Bernoulli } (p) \leadsto \text{enivaxid Gur K Sokimn'}$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \underbrace{p(1-p)^{k-1}}_{\text{G.P.N.}} = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p}, \quad \text{uadus } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k w^k \stackrel{|w| < 1}{=} \frac{w}{(1-w)^2} \right\}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} \left[\text{G.K.N.G.N.} \right].$$

$$(5) X \sim U[a, b], \quad f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{alla' } \end{cases}$$

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=a}^b = \frac{b^2 - a^2}{2} \frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}.$$

$$E[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$V(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \Rightarrow V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

(6). $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $E[X] = \mu$, $V(X) = \sigma^2$.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \text{ Θέτουμε } \frac{x-\mu}{\sigma} = y \Rightarrow dx = \sigma dy.$$

Τότε $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot (\sigma y + \mu) e^{-\frac{y^2}{2}} (dy)\sigma =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \mu$$

(πρώτη συνάρτηση
σε συμμετρικά διαστήματα)

6. Πικνότητα της αποποιημένης κανονικής

(7) X : συνεχής τ.μ. με τετραγωνική μέση τιμή.

Αν η σφπ f_X είναι συμμετρική γύρω από $c \in \mathbb{R}$

τότε $E[X] = c$.

Λύση $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \xrightarrow[\text{Θέτουμε } x=c+y]{f(c+x)=f(c-x)} \int_{-\infty}^{+\infty} (c+y) f(c+y) dy$

Συμμετρικά $\int_{-\infty}^{+\infty} (c+y) f(c-y) dy \xrightarrow{c-y=t} \int_{-\infty}^{+\infty} (c+c-t) f(t) (-dt)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (2c-t) f(t) dt = 2c \int_{\mathbb{R}} f(t) dt - \int_{\mathbb{R}} t f(t) dt \Rightarrow \underline{2E[X] = 2c} \quad \square$$

(8) Να δειχθεί $\forall c \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$V(X) \leq E[(X-c)^2].$$

Απόδειξη $E[(X-c)^2] = E[X^2 - 2cX + c^2] =$

$$= \underbrace{c^2 - 2E[X]c + E[X^2]}_{f(c)} \quad \text{επιώνυμο του } c \quad \underset{f(\frac{b}{2a})}{\geq} f(E[X]) =$$

$$= E[X]^2 - 2E[X]^2 + E[X^2] = E[X^2] - E[X]^2 = V(X).$$

(9) Ρουλέτα (0, 1, 2, ..., 36). Παικτης στοιχηματίζει α € στους περιττούς. Αν έρδει περιττός κερδίζει α €, ενώ αν έρδει άρτιος ή 0 χάνει α €. Είναι δίκαιο το παιχνίδι??

Έστω X η τ.κ. του κέρδους του παίκτη.

$$\text{Τότε } X = \begin{cases} -\alpha, & p = \frac{19}{37} \\ \alpha, & p = \frac{18}{37} \end{cases}$$

Επομένως $E[X] = -\alpha \cdot \frac{19}{37} + \alpha \cdot \frac{18}{37} = \frac{-\alpha}{37}$ (άδικο παιχνίδι!)

Εάν $E[X] = 0$ (δίκαιο)

Εάν $E[X] \neq 0$ (άδικο $\begin{cases} > 0, \text{ υπέρ του παίκτη} \\ < 0, \text{ υπέρ του διαργανωτή} \end{cases}$).