

Μέθοδος των ρομών

Εστω X_1, \dots, X_n τ.δ. από κάποια κατανομή με r άγνωστες παραμέτρους $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \underline{\theta}$.

Είναι γνωστό ότι η ποσότητα $E(X^k)$ ονομάζεται ρομή k -τάξης της κατανομής. Η αντίστοιχη ποσότητα με βάση το δείγμα είναι η $M_k = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n}$.

Για $k=1$ έχουμε την μέση τιμή $E(X)$ και τον δειγματικό μέσο $M_1 = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$.

Για τη μέθοδο των ρομών εξισώνουμε τις ρομές με τις δειγματικές ρομές για $k=1$ έως $k=r$ οπότε έχουμε τόσες εξισώσεις όσες και αγνώστους.

$$E_{\underline{\theta}}(X_i^k) = M_k, \quad k=1, \dots, r$$

Η λύση του συστήματος ως προς τις παραμέτρους $\theta_1, \dots, \theta_r$ δίνει τις ροποεκτιμήσεις των $\theta_i, i=1, \dots, r$.

Παράδειγμα 1

Εστω X_1, \dots, X_n τ.δ. από την $N(\theta, 1)$.
Να βρεθεί ροποεκτιμήτρια της παραμέτρου θ .

Έχουμε θ διασπάρσως \perp οπότε χρειαζόμαστε
μία εξίσωση: $E(X_i) = \bar{X}$.

Όλες οι $X_i, i=1, \dots, n$ έχουν την ίδια μέση
τιμή θ . (ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση
τιμή θ και διασπάρση 1),

Άρα, $E(X_i) = \theta \Rightarrow \theta = \bar{X}$ ή $\boxed{\hat{\theta} = \bar{X}}$

Παράδειγμα 2

Εστω X_1, \dots, X_n τ.δ. από την εκθετική κατανομή
με σ.π.π. $f(x, \theta) = \theta \cdot e^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0$.
Να βρεθεί ροποεκτιμήτρια της παραμέτρου θ .

Χρειαζόμαστε \perp εξίσωση.

Για την εκθετική κατανομή $E(X_i) = \dots = E(X_n) = \frac{1}{\theta}$

Άρα $E(X_i) = \frac{1}{\theta} = \bar{X} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\bar{X}}$ ή $\boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}}$

Παρατήρηση

Σε αυτά τα παραδείγματα, οι ροποεκτιμήτριες του θ
ταυτίζονται με τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανότητας.

Παράδειγμα 3

Έστω X_1, \dots, X_n τ.δ. από την Gamma (θ_1, θ_2) .
Να βρεθούν ποσοεκτιμήτριες των θ_1, θ_2 .

$$E(X_i) = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad \text{και} \quad \text{Var}(X_i) = \frac{\theta_1}{\theta_2^2} \quad (\text{γνωστά για τη Gamma})$$

Χρησιμοποιούμε 2 εξισώσεις.

$$E(X_i) = \left[\frac{\theta_1}{\theta_2} = \bar{X} \right] \quad (1)$$

$$\text{και} \quad E(X_i^2) = M_2 = \frac{\sum X_i^2}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{Η} \quad E(X_i^2) &= \text{Var}(X_i) + (E(X_i))^2 \quad (\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2) \\ &= \frac{\theta_1}{\theta_2^2} + \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^2 = \frac{\theta_1}{\theta_2^2} (1 + \theta_1) \end{aligned}$$

$$\text{Αρα} \quad \left[\frac{\theta_1}{\theta_2^2} (1 + \theta_1) = \frac{\sum X_i^2}{n} \right] \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \quad \frac{\bar{X}}{\theta_2^2} (1 + \theta_2 \bar{X}) = \frac{\sum X_i^2}{n} \Rightarrow \frac{\bar{X}}{\theta_2} + \bar{X}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{X}}{\theta_2} = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2}{n} \Rightarrow \frac{1}{\theta_2} = \frac{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2}{n \bar{X}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\theta}_2 &= \frac{n \bar{X}}{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2} \quad (*) \\ \hat{\theta}_1 &= \hat{\theta}_2 \cdot \bar{X} \end{aligned}}$$

Συνεχίζοντας λίγο τις πράξεις μπορούμε να δούμε ότι οι ποσοεκτιμήτριες είναι συναρτήσεις των \bar{X} και S^2 .

Παρατήρηση

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n \bar{X}^2$$

δίδει

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum (X_i^2 + \bar{X}^2 - 2X_i \bar{X}) = \sum X_i^2 + n \bar{X}^2 - 2\bar{X} \sum X_i =$$

$$\sum X_i^2 + n \bar{X}^2 - 2\bar{X} n \bar{X} = \sum X_i^2 - n \bar{X}^2.$$

Από (*) $\hat{\theta}_2 = \frac{n \bar{X}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{n \bar{X}}{(n-1) \underbrace{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}_{S^2}} = \frac{n}{n-1} \frac{\bar{X}}{S^2}$

και $\hat{\theta}_1 = \frac{n}{n-1} \frac{\bar{X}^2}{S^2}$

Παράδειγμα 4

Έστω X_1, \dots, X_n τ.δ. από την κατανομή με σ.π.η.

$$f(x, \theta) = (1+\theta) x^\theta, \quad 0 < x < 1, \quad 1+\theta > 0$$

Να βρεθεί ποσοεικτιμήτρια του θ .

Χρησιμοποιεί 1 εξίσωση.

$$\boxed{E(X_i) = \bar{X}}$$

$$E(X_i) = \int_0^1 x (1+\theta) x^\theta dx = \int_0^1 (1+\theta) x^{\theta+1} dx = (1+\theta) \left. \frac{x^{\theta+2}}{\theta+2} \right|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$\text{Άρα } \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X} \Rightarrow \theta+1 = \bar{X}\theta+2\bar{X} \Rightarrow \theta(1-\bar{X}) = 2\bar{X}-1 \Rightarrow$$

$$\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$$

Παρατήρηση

Να συγκριθεί με ΕΜΠ του θ

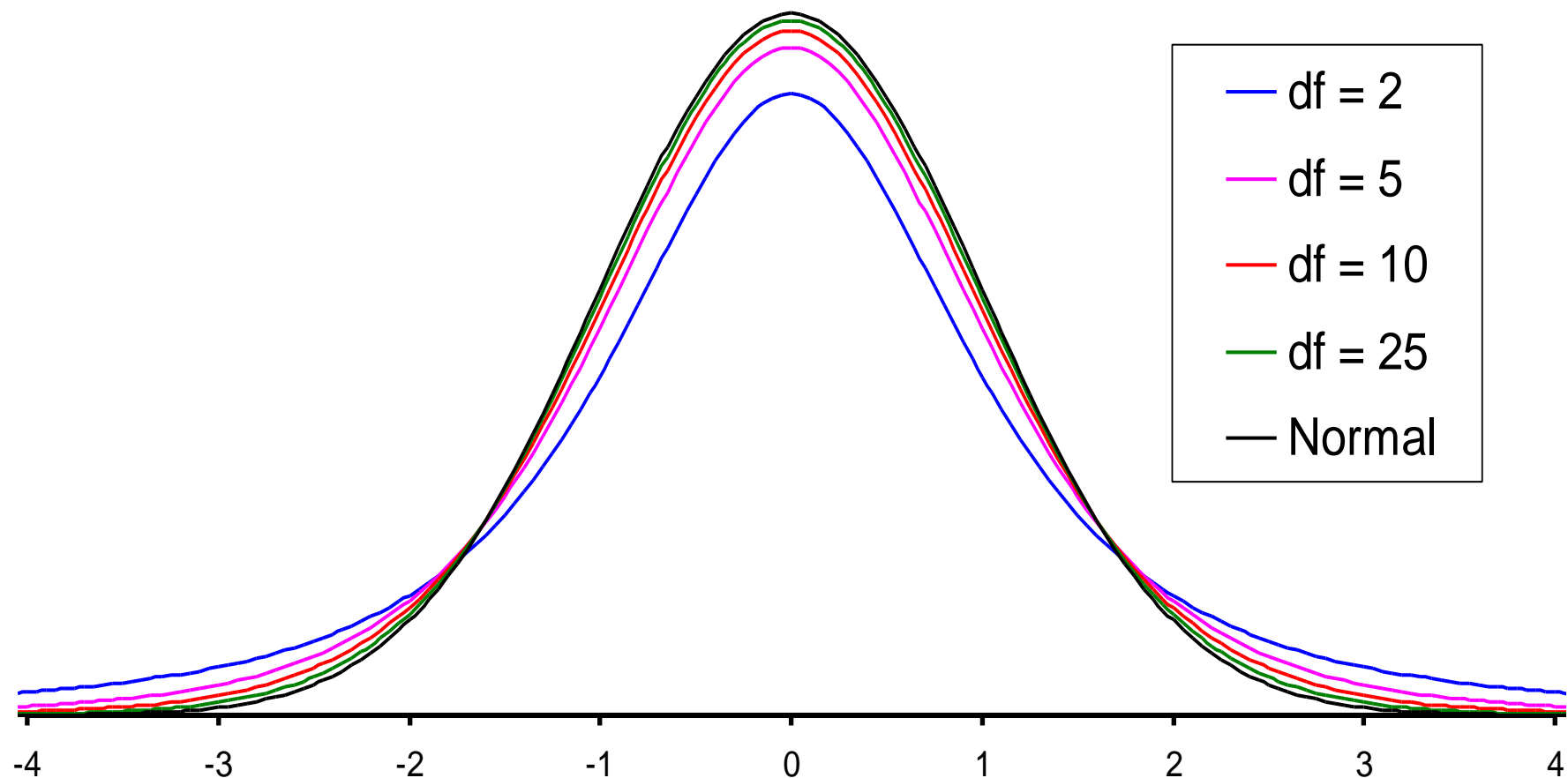
Πριν των επόμενων ενότια χρειάζεται να
μαθήσουμε για άλλη μία συνεχή κατανομή των
 t_n (ταυ με βαθμούς ελευθερίας n)

Η t_n -κατανομή μοιάζει πολύ με την κανονική
κατανομή $N(0,1)$ αφού είναι συμμετρική γύρω από
το 0 και έχει καμπανοειδές σχήμα. Όταν το
 n είναι μικρό ($n < 30$) έχει πιο παχιές ουρές από
την $N(0,1)$ και όχι τόσο έντονη κορυφή. Όσο
όμως μεγαλώνει το n , τόσο ληθαίνουν οι ουρές
της κατανομής και ανεβαίνει η κορυφή της και πιο
συγκεκριμένα τείνει να ταυτιστεί με τη $N(0,1)$.

Η t_n κατανομή έχει πίνακα με εσοιμες
πιθανότητες για διαφορες τιμές του n

The t distributions

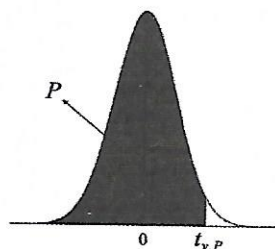
Comparison of normal and t distributions



ΠΑΝΑΚΑΣ 4. ΚΑΤΑΝΟΜΗ t ΤΟΥ STUDENT

Τιμές του $t_{v,P}$ τέτοιες ώστε

$$P = \int_{-\infty}^{t_{v,P}} \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dt$$



P	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.310	636.620
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Θεώρημα 1

Αν τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η

$$\text{z.μ. } Z = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_1^2$$

Θεώρημα 2

Έστω $X_i, i=1, \dots, n$ ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ αντίστοιχα. Έστω η z.μ. $Y = \sum_{i=1}^n k_i X_i$, k_i σταθερές. Τότε η

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n k_i \mu_i, \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2\right).$$

Θα βρούμε μόνο συν $E(Y)$ και $\text{Var}(Y)$ για να επιβεβαιώσουμε το Θεώρημα.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\sum_{i=1}^n k_i X_i\right) = E(k_1 X_1 + \dots + k_n X_n) = E(k_1 X_1) + \dots + E(k_n X_n) \\ &= k_1 E(X_1) + \dots + k_n E(X_n) = \sum_{i=1}^n k_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n k_i \mu_i \end{aligned}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n k_i X_i\right) = \text{Var}(k_1 X_1) + \dots + \text{Var}(k_n X_n) =$$

λόγω ανεξαρτησίας δεν υπάρχουν όροι συνδιασποράς

$$= k_1^2 \text{Var}(X_1) + \dots + k_n^2 \text{Var}(X_n) = \sum_{i=1}^n k_i^2 \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2$$

Εφαρμογή

Αν $X_1 \sim N(2, 9)$ και $X_2 \sim (0, 25)$ τότε

$$\eta \quad Y = 2X_1 + 3X_2 \sim N(4, 261)$$

Θεώρημα 3

Εστω $X_i, i=1, \dots, n$ ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\chi^2_{n_i}$ αντίστοιχα. Τότε η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{\sum_{i=1}^n n_i}$

Εφαρμογή

Αν $X_1 \sim \chi^2_1$ και $X_2 \sim \chi^2_3$ και $X_3 \sim \chi^2_1$ τότε

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim \chi^2_5$$

Θεώρημα 4

Εστω $X_i, i=1, \dots, n$ που ακολουθούν $N(\mu, \sigma^2)$. Τότε η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_n$

$$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_1 \quad \forall i \text{ από Θεώρημα 1.}$$

Θεώρημα 5

Εστω $X_i, i=1, \dots, n$ ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Τότε ο δειγματικός μέσος

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

Απόδειξη

Από Θεώρημα 2, για $k_i = \frac{1}{n}, i=1, \dots, n$

$$Y = \sum_{i=1}^n k_i X_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \sim$$

$$N\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \mu, \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma^2\right) = N\left(\frac{1}{n} n \cdot \mu, \frac{1}{n^2} n \sigma^2\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Θεώρημα 6

Έστω X_1, \dots, X_n ανεξάρτητες ζ.μ. $\sim N(\mu, \sigma^2)$

Τότε $\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}}$ οπου $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

Υπόδειξη

Απο Θεώρημα 4 εδωμε $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_n$

Παρόμοια, $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$

Οποτε μια παράμετρος (εδω το μ) αντικαθίσταται με μία στατιστική συνάρτηση, (εδω το \bar{X}) χανουμε ένα βαθμο ελευθερίας (απο n πήραμε $n-1$).

Στη συνέχεια, $(n-1) \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{(n-1) \cdot \sigma^2} = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Θεώρημα 7

Για την κανονική κατανομή οι ζ.μ. \bar{X} και S^2 είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα 8

(Χρησιμοποιείται και σαν ορισμός της t_n)

Έστω $Z \sim N(0,1)$ και $W \sim \chi_n^2$ ανεξάρτητες τ.μ.

Τότε η τ.μ. $T = \frac{Z}{\sqrt{W/n}} \sim t_n$.

Η σ.η.π. της τ.μ. T δίνεται από

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Εφαρμογή (πολύ χρησιμη στην επόμενη ενότητα)

Έστω X_1, \dots, X_n τ.δ. από την $N(\mu, \sigma^2)$. Να δείχθεί

ότι η τ.μ. $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ όπου S η δειγματική

τυτική απόκλιση.

Απόδειξη

$$\text{Η τ.μ. } \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{S/\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}/\sqrt{n-1}} =$$

$$\frac{Z}{\sqrt{\chi_{n-1}^2/n-1}} \sim t_{n-1} \text{ από το προηγούμενο Θεώρημα 8}$$

και από θεωρήματα 5, 6, 7

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

\bar{X} και S^2 ανεξάρτητα

Άλλη χρήση κατανομής F_{n_1, n_2}

Θεώρημα 9

Έστω δύο ανεξάρτητες τ.μ. U και V οι οποίες ακολουθούν $\chi^2_{n_1}$ και $\chi^2_{n_2}$ αντίστοιχα. Τότε

η τ.μ. $F = \frac{U/n_1}{V/n_2} \sim F_{n_1, n_2}$ (F με βαθμούς ελευθερίας n_1 για τον αριθμητή και n_2 για τον παρονομαστή)

Υπάρχουν πίνακες για την F -κατανομή

Εφαρμογή

Έστω X_1, \dots, X_{n_1} και Y_1, \dots, Y_{n_2} ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κατανομές $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ αντίστοιχα. Να δείχθει ότι η τ.μ.

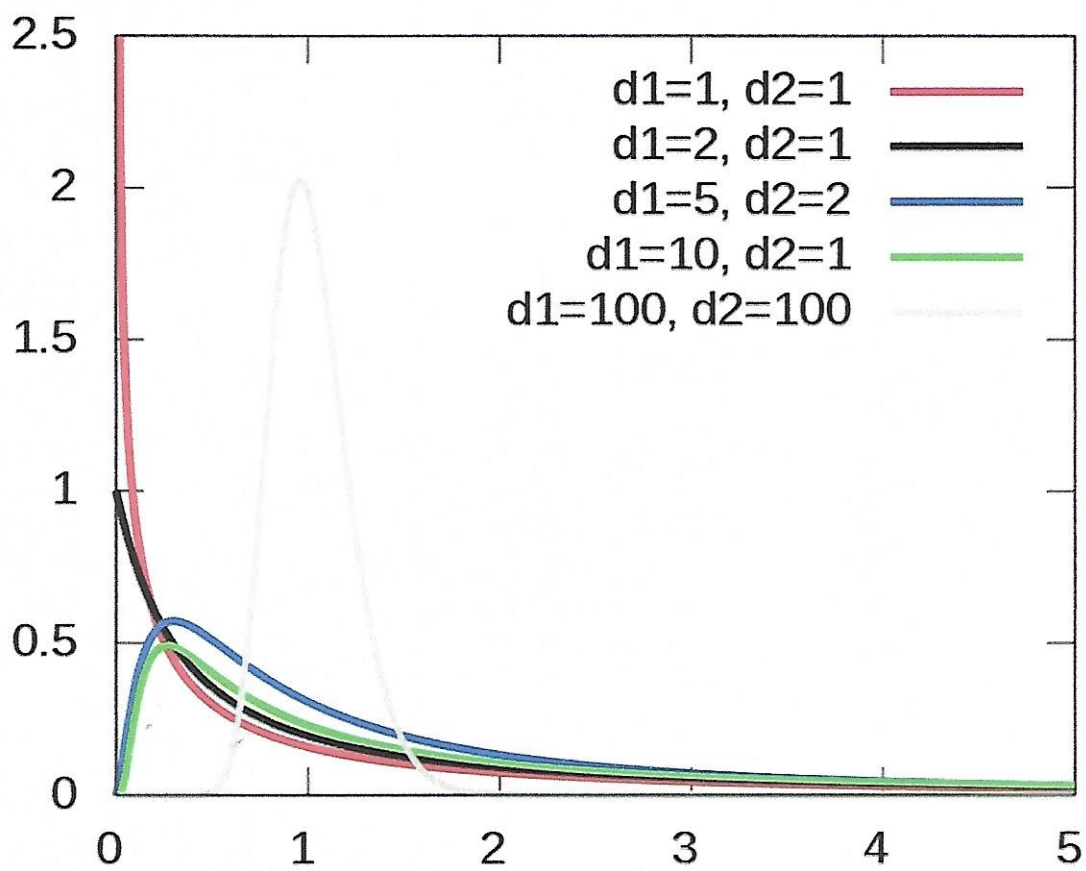
$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}.$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 6, $(n_1-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2_{n_1-1}$ και

$(n_2-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2_{n_2-1}$ και είναι και ανεξάρτητες

$$\frac{((n_1-1)S_1^2/\sigma_1^2)/(n_1-1)}{((n_2-1)S_2^2/\sigma_2^2)/(n_2-1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1} \quad \text{από Θεώρημα 9}$$

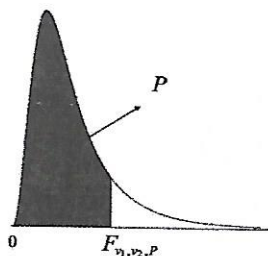


$F_{d1,d2}$ distribution

ΠΙΝΑΚΑΣ 5. ΚΑΤΑΝΟΜΗ F ΤΟΥ SNEDECOR

Τιμές του $F_{v_1, v_2, P}$ τέτοιες ώστε

$$P = \frac{1}{B(v_1/2, v_2/2)} \int_0^{v_1 \cdot F_{v_1, v_2, P} / v_2} g^{v_1/2-1} (1+g)^{-(v_1+v_2)/2} dg$$



$P = 0.995$

$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	16210.72	19999.50	21614.74	22499.58	23055.79	23437.11	23714.56	23925.40	24091.00
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2997	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676
11	12.2263	8.9122	7.6004	6.8809	6.4217	6.1016	5.8648	5.6821	5.5368
12	11.7542	8.5096	7.2258	6.5211	6.0711	5.7570	5.5245	5.3451	5.2021
13	11.3735	8.1865	6.9258	6.2335	5.7910	5.4819	5.2529	5.0761	4.9351
14	11.0603	7.9216	6.6804	5.9984	5.5623	5.2574	5.0313	4.8566	4.7173
15	10.7980	7.7008	6.4760	5.8029	5.3721	5.0708	4.8473	4.6744	4.5364
16	10.5755	7.5138	6.3034	5.6378	5.2117	4.9134	4.6920	4.5207	4.3838
17	10.3842	7.3536	6.1556	5.4967	5.0746	4.7789	4.5594	4.3894	4.2535
18	10.2181	7.2148	6.0278	5.3746	4.9560	4.6627	4.4448	4.2759	4.1410
19	10.0725	7.0935	5.9161	5.2681	4.8526	4.5614	4.3448	4.1770	4.0428
20	9.9439	6.9865	5.8177	5.1743	4.7616	4.4721	4.2569	4.0900	3.9564
21	9.8295	6.8914	5.7304	5.0911	4.6809	4.3931	4.1789	4.0128	3.8799
22	9.7271	6.8064	5.6524	5.0168	4.6088	4.3225	4.1094	3.9440	3.8116
23	9.6348	6.7300	5.5823	4.9500	4.5441	4.2591	4.0469	3.8822	3.7502
24	9.5513	6.6609	5.5190	4.8898	4.4857	4.2019	3.9905	3.8264	3.6949
25	9.4753	6.5982	5.4615	4.8351	4.4327	4.1500	3.9394	3.7758	3.6447
26	9.4059	6.5410	5.4091	4.7852	4.3844	4.1027	3.8928	3.7297	3.5989
27	9.3423	6.4885	5.3611	4.7396	4.3402	4.0594	3.8501	3.6875	3.5571
28	9.2838	6.4403	5.3170	4.6977	4.2996	4.0197	3.8110	3.6487	3.5186
29	9.2297	6.3958	5.2764	4.6591	4.2622	3.9831	3.7749	3.6131	3.4832
30	9.1797	6.3547	5.2388	4.6234	4.2276	3.9492	3.7416	3.5801	3.4505
40	8.8279	6.0664	4.9758	4.3738	3.9860	3.7129	3.5088	3.3498	3.2220
60	8.4946	5.7950	4.7290	4.1399	3.7599	3.4918	3.2911	3.1344	3.0083
120	8.1788	5.5393	4.4972	3.9207	3.5482	3.2849	3.0874	2.9330	2.8083
∞	7.8794	5.2983	4.2794	3.7151	3.3499	3.0913	2.8968	2.7444	2.6210