

Ορισμός

Κάθε στατιστική συνάρτηση $u(X_1, \dots, X_n)$ της οποίας η μέση τιμή ισούται με την παράμετρο θ ονομάζεται αμερόληπτη (unbiased) εκτιμήτρια του θ .

$$\text{δηλ. } E(u(X_1, \dots, X_n)) = \theta$$

Είναι μια ιδιότητα που θα θέλαμε να έχουν οι εκτιμήτριες, έτσι ώστε 'περιμένοντας' να μας δώσουν θ την παράμετρο που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Παράδειγμα

(α) Η εκτιμήτρια \bar{X} είναι αμερόληπτη για το μ (μέση τιμή των X_1, \dots, X_n).

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu =$$

$$\frac{1}{n} n \cdot \mu = \mu.$$

(β) Η εκτιμήτρια S^2 είναι αμερόληπτη για το σ^2 (διασπορά των X_1, \dots, X_n).

Ασκηση

Άσκηση

Έστω τ.δ. X_1, \dots, X_n από κάποια κατανομή με μέσο μ και διασπορά σ^2 . Να βρεθεί η σταθερά c έτσι ώστε η τ.μ.

$$Y = c \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \quad \text{να είναι αμερόληπτη}$$

εκτιμήτρια του σ^2 .

$$\boxed{E(S^2) = \sigma^2}$$

σ^2

$$E\left(\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} E(\sum X_i^2 - n \bar{X}^2)$$

↑
από τύπο που είδαμε

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - n E(\bar{X}^2) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (Var(X_i) + E(X_i)^2) - n (Var(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + (\mu)^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + (\mu)^2 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} (n-1)\sigma^2 = \sigma^2$$

Η εκτιμήτρια $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$ δεν είναι αμερόληπτη.

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}\right) = E\left(\frac{n-1}{n} \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right) =$$

$$E\left(\frac{n-1}{n} S^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Είναι όμως ασυμπτωτικά αμερόληπτη.

$$\text{Όταν } n \rightarrow \infty \quad E(\hat{\sigma}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \quad \left(\frac{n-1}{n} \rightarrow 1\right)$$

Αμεροληψία Δοκιμής

X_1, \dots, X_n με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . (Τυχαίο δείγμα)

$$E(Y) = \sigma^2 \Rightarrow E\left(c \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right) = \sigma^2 \Rightarrow$$

$$c \cdot E\left(\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1}^2 + X_i^2 - 2X_i X_{i+1})\right) =$$

$$c \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (E(X_{i+1}^2) + E(X_i^2) - 2E(X_i X_{i+1})) = \text{ανεξαρτησία}$$

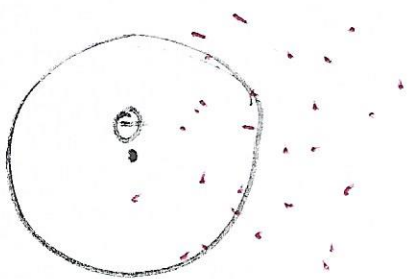
$$c \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ (\sigma^2 + \mu^2) + (\sigma^2 + \mu^2) - 2E(X_i)E(X_{i+1}) \right\} =$$

$$c \cdot (n-1) (2\sigma^2 + \cancel{2\mu^2} - \cancel{2\mu^2}) = c \cdot (n-1) 2\sigma^2 \equiv \sigma^2 \Rightarrow$$

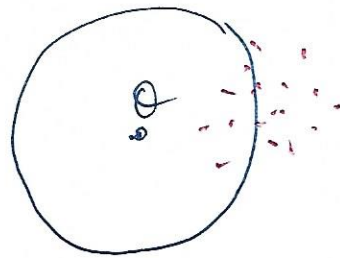
$$c = \frac{1}{2(n-1)}$$

Επιθυμητές ιδιότητες εκχυμύζων

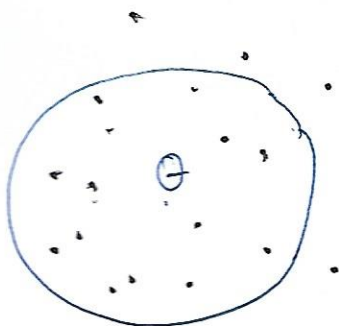
- Αμερομυψία (για το Θ)
- Μικρή διασπορά (ελάχιστη είναι επιθυμητό)



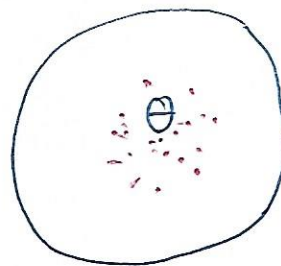
Εκχυμύζια με μέση τιμή $\Theta+2$ και μεγάλη διασπορά



Εκχυμύζια με μέση τιμή $\Theta+2$ και μικρή διασπορά



Εκχυμύζια με μέση τιμή Θ και μεγάλη διασπορά



Εκχυμύζια με μέση τιμή Θ και μικρή διασπορά