

Ερώτηση: Έστω X τ.μ. (διακριτή ή συνεχής).

και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ποια η κατανομή της $Y = g(X)$.

Απάντηση (I): Έστω X διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών

$C_X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Τότε η $Y := g(X)$ είναι επίσης

διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών $C_Y = g(C_X) = \{y_1, y_2, \dots\}$.

Η βμη της τ.μ. Y :

$$\mathbb{P}[Y = y_j] = \mathbb{P}[g(X) = y_j] = \mathbb{P}[X \in A_j], \text{ όπου}$$

$$A_j = \{x_j : g(x_j) = y_j\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\text{Όμως } \mathbb{P}[X \in A_j] = \sum_{g(x_i) = y_j} \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\text{Άρα } \mathbb{P}[Y = y_j] = \sum_{g(x_i) = y_j} \mathbb{P}(X = x_i), \quad j = 1, 2, \dots$$

Παράδειγμα

X : διακριτή τμ με $C_X = \{-n, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, n\}$ (2)

και βμπ $f_X = \mathbb{P}[X=k] = \frac{1}{2n}$, $k \in C_X$.

Η τμ $Y := X^2$ είναι διακριτή με $C_Y = \{1, 4, \dots, n^2\}$.

και έχει βμπ:

$$\mathbb{P}[Y=k] = \sum_{m: m^2=k} \mathbb{P}[X=m] =$$

$$= \mathbb{P}[X = -\sqrt{k}] + \mathbb{P}[X = +\sqrt{k}]$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}, \quad k \in \{1, 4, \dots, n^2\}.$$

(II) Εάν X : συνεχής τμ με βμπ. $f_X(x)$
(συνεχής, εντός ίσως από πεπερασμένα το πλάτος σημεία), υποθέτουμε ότι $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, και ότι g είναι "1-1" στο σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ με g^{-1} με συνεχή παράγωγο στο $T = g(S)$. Τότε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, & y \in T \\ 0, & y \notin T. \end{cases}$$

Παραδείγματα

(3)

1) X : τ.μ. με $f_X(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

και $\boxed{Y = X^2}$

Τότε $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$

$S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = (0, +\infty)$

$T = g(S) = (0, +\infty)$

g : συνεχής, συνεχώς παραγωγίσιμη, "1-1" στο S .

Ακόμα: $g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \underline{y \in T}$ και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Αρα, $f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y} \cdot \exp\left\{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}\right\} \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

δηλ: $\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}}$

δηλ $Y \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{matrix} E[Y] \dots \dots \dots \\ V[Y] \dots \dots \end{matrix}$

2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = ???$ (4)

δηλ: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$

Εστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \mathbb{R}$.

$T = g(S) = \mathbb{R}$, $g^{-1}(z) = \sigma z + \mu$, $\frac{d}{dz} g^{-1}(z) = \sigma$.

Άρα $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, $z \in \mathbb{R}$, δηλ $\boxed{Z \sim N(0, 1)}$

Παρατήρηση Τι δίνεται σχετικά με την F_Y , $Y = g(X)$

Απάντηση Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και θα αναζητήσουμε μόνο
για τη περίπτωση όπου $g: \nearrow$. Τότε:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[g(X) \leq y] =$$

$$= \mathbb{P}[X \leq g^{-1}(y)] \stackrel{F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]}{=} \underline{\underline{F_X(g^{-1}(y))}}$$

$$= F_X(g^{-1}(y))$$

Εφαρμογή: Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Y = y(X) = e^X$ (5)

ενυδα $g(x) = x^*$: $\int_{\mathbb{R}}$ έχω ε : $S = \mathbb{R}$
 $T = (y, \infty)$

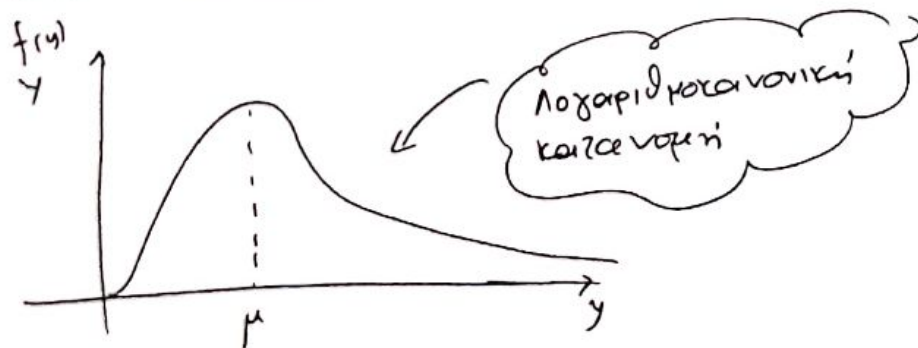
$$F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[e^X \leq y] \stackrel{y > 0}{=} \mathbb{P}[X \leq \ln y] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = F_X(\ln y) \quad (*)$$

δυναμότητα: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Παραγωγίζοντας $\ln y$ έχουμε: $-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}$
 εν log-normal distribution:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$



Παρατήρηση (1) $X = \ln Y$ προφανώς ο μεταβ. αυτός

οδηγεί στην κανονική κατανομή

(2) Από την (*) έχουμε

$$\mathbb{P}(0 < Y \leq b) = \Phi\left(\frac{\ln b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - \mu}{\sigma}\right), \quad a, b > 0.$$

Άσκηση: Εάν $X \sim U(0, 1)$ να βρείτε την κατανομή της $Y = -\ln X$

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ Τ.Μ

©

X, Y από ίδιο πείραμα (οι ισχυρισμοί επεξεργάζονται για > 2)

π.χ (i) ρίψη 2 κίδων X : αποτέλεσμα του 1^{ου}
 Y : \rightarrow του 2^{ου}

(ii) ζάρια 52 χαρτιών. Εξάχως 3

X : # σταθίων $\mathbb{P}(X=2, Y=1) = ???$
 Y : # καρδ και

$\vec{X} = (X, Y)$ ονομάζεται ζεύγος διάνυσμα $\leadsto X, Y: \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = F_{\vec{X}}(x, y) = F(x, y) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y]$.

ονομάζεται από κοινού συνάρτηση κατανομής του ζεύγους (X, Y) .

Ιδιότητες (i) $0 \leq F(x, y) \leq 1, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(ii) F : μη-φθίνουσα και δεξιά συνεχής \forall μεταβλητή

(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$

$F(+\infty, +\infty) = 1$.

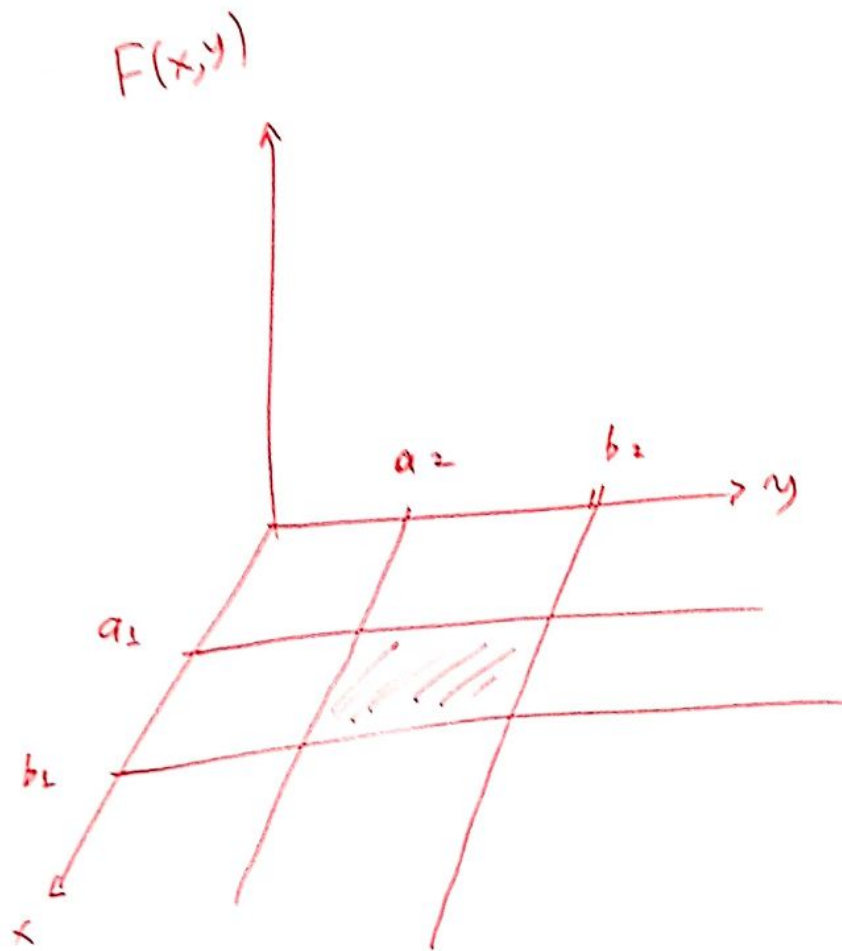
(iv) $\mathbb{P}(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) =$

$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$

$\forall a_i, b_i$

(το B' μέλος είναι η πιθανότητα 2-διάστατου ορθογώνιου)

(7)



$$\mathbb{P}(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) =$$

$$= \mathbb{P}(a_1 < X \leq b_1, Y \leq b_2) - \mathbb{P}(a_1 < X \leq b_1, Y \leq a_2)$$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - (F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2))$$

Το ζευγος διάνυσμα $\vec{X} = (X, Y)$ ονομάζεται διακριτό $\Leftrightarrow X, Y$: διακριτές

Αν X, Y : διακριτές τμ η από κοινά βμπ του ζεύγους (X, Y) :

$$f_{x,y}(x,y) = \mathbb{P}[X=x, Y=y]$$

\uparrow
και

(9)

Ιδιότητες (1) $f_{x,y}(x,y) \geq 0, \forall x,y$

$$(2) \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}[X=x, Y=y] = 1$$

Αύρα: $\sum_{v \leq y} \sum_{u \leq x} f_{x,y}(u,v) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] = F_{x,y}(x,y)$

Ορισ Η περιθώρια συνάρτηση μιας πιθανότητας τμς τμ (για παράδειγμα X) είναι η βμπ τμς X όταν οι τιμές τμς Y δεν λαμβάνονται υπόψιν. Τότε υπολογίζεται από την από κοινά βμπ του ζεύγους (X, Y) , εάν αθροίσουμε για έλεγχ της τιμής τμς Y

Πηληδμή $f_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} f(x,y)$

παράδειγμα ακολουθία!

από κοινά 6π7 τω (X,Y) :

9

$X \backslash Y$	0	1	2	3	f_x
0	0	$\frac{1}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{3}{42}$	$\frac{6}{42}$
1	$\frac{2}{42}$	$\frac{3}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{14}{42}$
2	$\frac{4}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{7}{42}$	$\frac{22}{42}$
f_y	$\frac{6}{42}$	$\frac{9}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{15}{42}$	1

αν αθροίσουμε μία
σραμμή τω πίνακα θα
πάραμε στο "περιθώριο"
των πιθανοτήτων με των οποίων
η εμ \sum λαμβάνει
την τιμή που αντιστοιχεί
στις σραμμές που αθροίζονται

έτσι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{42}, & x=0 \\ \frac{14}{42}, & x=1 \\ \frac{22}{42}, & x=2 \end{cases} \quad (\text{όμοια και η } f_Y(y))$$

Παρατηρήσεις: Μπορεί κανείς εύκολα τώρα να υπολογίσει
π.χ $E[X], E[Y], E[XY], F_X(x) = P[X \leq x], \dots$

η ακεραιότητα και σχετιζόμενες πιθανότητες, όπως π.χ
 $P[X=k | Y=2]$ για τις διάφορες τιμές τω $k \in \{0,1,2\}$

Ορισμός: $E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$

• Το ζεύγος διανυσμα $\vec{X} = (X, Y)$: ανεξ. $\Leftrightarrow X, Y$: ανεξ. εφ.

(10)

• $\exists f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

και
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) dv du$$

• Η $f_{X,Y}(x,y)$: ανήκει στην πυκνότητα (X,Y)

• Προφανώς
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Ιδιότητες

(1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1.$$

Φυβικά $\mathbb{P}(X=x_0, Y=y_0) = 0$

$\mathbb{P}(a < X < b, Y=y_0) = 0$

$\mathbb{P}(X=x_0, a < Y < b) = 0$

(11)

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[X \leq x, Y < \infty] = F(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

$$F_X(x) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^{\infty} f(u, v) dv du$$

και $F_Y(y) = P[Y \leq y] = \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^y f(u, v) dv du$

παράγωγοι :: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, v) dv$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(u, y) du$$

περιθώρια 6. πουν. πιθαν. πυ. ζ.τ. X, Y .

Δηλ. ολοκληρώνουμε
ως προς την μεταβλητή
που θέλουμε να
βρούμε

Παράδειγμα Έστω X, Y τμ βε από κοινά β.η.η:

(12)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y^2), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

1) Ποια η τιμή της σταθεράς c ?

Πρέπει (1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1.$$

$$\text{Είναι} \quad \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2) dx dy = \dots = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Άρα} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 0 + \int_0^1 \int_0^1 c(x^2+y^2) dx dy = c \frac{2}{3} \stackrel{\text{απαιτείται}}{=} 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=3/2} \quad \text{και θα να βρούμε} \quad f_{X,Y} \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

2) Ποιες οι περιθώριες β.η.η $f_X(x), f_Y(y)$?

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{-\infty}^0 + \int_0^1 + \int_1^{+\infty} = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2) dy = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{και λόγω συμμετρίας} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$3) F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u,y) dy du = \int_0^x \int_0^1 \frac{3}{2}(u^2+y^2) dy du = \int_0^x \frac{3}{2}(u^2 + \frac{1}{3}) du =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

13

Also $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^3+x}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ nach Lösung
überprüfen $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y^3+y}{2}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1. \end{cases}$

Ερώτηση Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$. Ποια η πιθανότητα:

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = ?$$

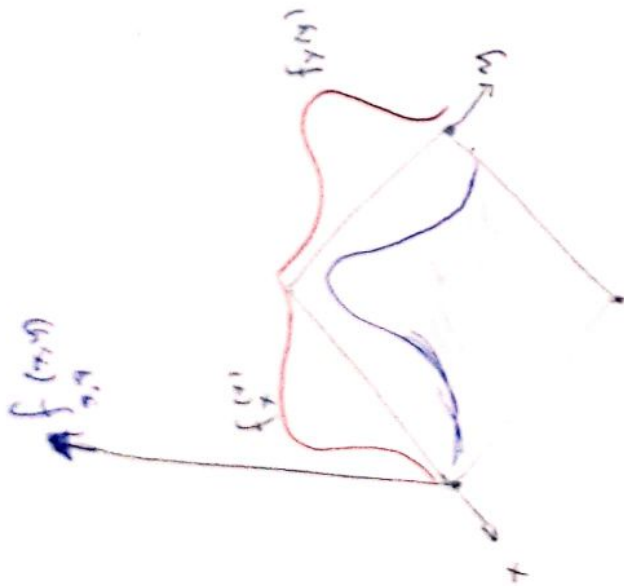
Απάντηση
η πιθανότητα: $\mathbb{P}((X, Y) \in A)$ είναι ένα διπλό ολοκλήρωμα.

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

να δείξω $\mathbb{P}[X < Y] = \mathbb{P}[(X, Y) \in \underbrace{\{(x, y) : x < y\}}_A]$

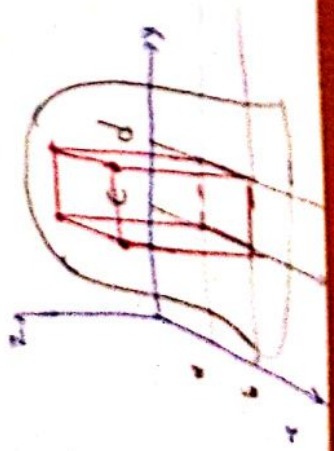
$$= \iint_A f(x, y) dx dy$$

Diphenylmethan
 1,1'-binaphthalen



- 2D graph of a function $f(x, y)$ over a domain $A \subset \mathbb{R}^2$ is a surface in \mathbb{R}^3 . The surface is defined by the equation $z = f(x, y)$. The domain A is the projection of the surface onto the xy -plane.

- If $z = f(x, y)$ is a function over a domain $A \subset \mathbb{R}^2$, then the surface $S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$ is a surface in \mathbb{R}^3 . The surface is defined by the equation $z = f(x, y)$.



- If $z = f(x, y)$ is a function over a domain $A \subset \mathbb{R}^2$, then the surface $S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$ is a surface in \mathbb{R}^3 . The surface is defined by the equation $z = f(x, y)$.

$$P[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

$$P(X < Y) = P\left((X, Y) \in \underbrace{\{(x, y) : x < y\}}_A\right) =$$

$$= \iint_A f(x, y) dx dy$$

Παράδειγμα

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(15)

(i) $P(0 < X \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq Y \leq 1) = ???$

(ii) $P(X+Y > 1) = ???$

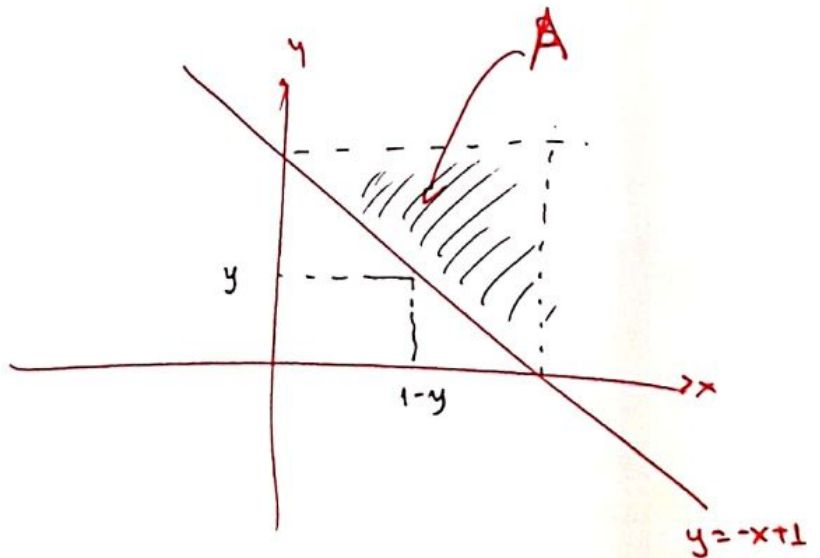
(i) $P(0 < X \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq Y \leq 1) = \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2) dx dy = \dots = \frac{1}{4}$

(ii) $P(X+Y > 1) = P\left[(X,Y) \in \underbrace{\{(x,y) : x+y > 1\}}_A\right]$

$$= \iint_A f(x,y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_{1-y}^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2) dx dy$$

$$= \dots = \frac{3}{4}$$



(iii) extra $P(0 < X \leq \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{1/2} \frac{3}{2}(x^2+y^2) dx dy = \dots = \frac{5}{16}$

(iv) $\int_0^{1/2} f_X(x) dx = \dots$