

• Έστω  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  : ακολουθία τυ. ιεόντων και ανεξάρτητων με πεπερασμένη τυμή  $\mu = E[X_n]$  και διασπορά  $\sigma^2 = V(X_n)$ .

Θέτουμε  $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Τότε:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0, 1) \quad (\text{εξίστην για κατανομή})$$

impl:  $\lim_n \mathbb{P}\left[a < \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right] = \Phi(b) - \Phi(a)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

$\forall$  διαστήματα  $[a, b]$  της πραγματικής ευθείας.  
 $(a, b)$   
 $[a, b)$

• Το CLT ισχύει <sup>για</sup> οποιαδήποτε κατανομή των  $X_i$  και να έχουμε (διακριτή ή συνεχή) απεί όλες οι  $X_i$  να ακολουθούν την ίδια κατανομή (ιεόντες) και  $n \rightarrow +\infty$  (πραγματικά  $n > 20$  απεί για ηφελήρα κατανομών).

• Είναι πολύ σημαντικό να κανονικοποιηθεί σωστά το άθροισμα  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  και να διαφευγεί ότι  $n$  π.χ  $\mathbb{P}\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \in (a, b)\right]$

είναι προσεγγιστικά  $(\Phi(b) - \Phi(a))$ .

## Παράδειγμα

(6ε ύρες)

24

Η διασπορά μιας Εξαρτήσας είναι  $\sigma^2$  με  $\sigma = 50$ .

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{200} \exp\left\{-\frac{1}{200}(x-50)\right\}, & x > 50 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(οι 50 πρώτες ύρες είναι δωρεάν).

Διαθέτουμε 20 τέτοια εξαρτήματα για τη λειτουργία ενός συστήματος. Πόσα προσεγγιστικά η πιθανότητα να ελαττωθεί για τη λειτουργία του συστήματος (το σύστημα να υπερβεί τις 6.000 ύρες).

Λύση

$X_i$  : η (απ.) διασπορά μιας 6ε ύρες του συστήματος  $i$  ( $i=1, \dots, 20$ )

Ζητάει  $\sum_{i=1}^n X_i$  : η συνολική διασπορά μιας.

$$E[X] = \int_{50}^{\infty} x \cdot \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}(x-50)} dx \stackrel{x-50=u}{=} \int_0^{\infty} (u+50) \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}u} du$$

$$= \int_0^{\infty} u \cdot \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}u} du + 50 \int_0^{\infty} \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}u} du = 200 + 50 \cdot 1 = 250$$

ή έστω  $u$  ή  $u+50$  με  $\frac{1}{200}$

πυκνότητα εκθετικής με παράμετρο  $\frac{1}{200}$

• Εφαρμόζουμε  $E[X]$  υπολογίζοντας με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

•  $E[X^2] = \dots$  και  $V[X] = 200$ . (δίνεται). Hint: Προσέχουμε τις ορίσσεις μελλοντικές αναφορές.

Εφαρμογή:  $\mathbb{P} \left[ \sum_{i=1}^{20} X_i > 6000 \right] = \mathbb{P} \left[ \frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 20 \cdot 250}{\sqrt{20 \cdot 200}} > \frac{6000 - 20 \cdot 250}{\sqrt{20 \cdot 200}} \right]$

$= \mathbb{P} [ Z > 1.12 ] \approx 1 - \Phi(1.12) = \dots$

Annotations:   
 -  $\swarrow$  να αναφερθεί αναλυτικά 20   
 - K.O.B.   
 -  $\nearrow$  ίσον προσεγγιστικά   
 - 25 (circled)

Παράδειγμα Ρουλέτα με 38 δείκτες ναίτερα  $\{00, 0, 1, 2, \dots, 38\}$

Annotations:   
 - green green   
 - red black   
 - 18 (circled)

Παίχτης παίζει 1 € στο κόκκινο (υπάρχουν 18 κόκκινα ναίτερα).

Έστω  $X_1, X_2, \dots$  αποτελέσματα 21 του τέρματος του παίχτη.

i)  $E[X_i], V[X_i]$

ii)  $E[S_n], V[S_n], S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , Extra

Έστω  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$   
 $E[\bar{X}], V[\bar{X}] = ?$   
Λόγος

i)  $X_i: \text{ακέρ.} \in \{0, 1\}$  &  $10 \text{ πόντοι}$  με  $X_i = \begin{cases} +1, & p = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \\ -1, & q = \frac{10}{19} \end{cases}$

$E[X_i] = 1 \cdot \frac{9}{19} + (-1) \cdot \frac{10}{19} = \frac{-1}{19} \approx -0.05263$

$E[X_i^2] = 1, V[X_i] = 1 - \left(\frac{-1}{19}\right)^2 \approx 0.9972$

ii)  $E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{-n}{19}$

$V[S_n] = V\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \stackrel{\text{ακέρ.}}{=} \sum_{i=1}^n V[X_i] = n \cdot 0.9972 \approx 0.9972 n$

iii) Ποια η πιθανότητα μετά από 100 παιχνίδια ο παίχτης μετ να μην έχει μείνει χωρίς χρήματα???

Answer

$$P[S_{100} > 0] = P\left[\sum_{i=1}^{100} X_i > 0\right] \cdot \frac{E[X_i] = \mu}{V[X_i] = \sigma}$$

26

$$= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot \mu}{\sigma \sqrt{100}} > \frac{0 - 100 \mu}{\sigma \sqrt{100}}\right]$$

$$= P\left[Z > \frac{-10\mu}{\sigma}\right] \approx 1 - \Phi\left(\frac{-10\mu}{\sigma}\right) = \dots$$