

Σιδηροπαγές σκυρόδεμα

του 7^{ου} εξ. ΠΑ 25-10-2019, 3^ο Μάθημα: Βάλη κάμψεως¹

Παλαιότερα, όταν οι ποιότητες των υλικών ήταν χαμηλές (σκυρόδεμα με $f_{ck}=8\text{MPa}$ και χάλυβας με $f_{yk}=220\text{MPa}$), η διαστασιολόγηση των κατασκευών οδηγούσε σε διατομές σχετικά ογκώδεις και σε τάσεις σκυροδέματος χαμηλές, ενώ η ρηγματώση ήταν πολύ σπάνια στην φάση λειτουργίας. Συνέπεια αυτού ήταν, στις συνήθεις κατασκευές, να μην παρουσιάζονται προβλήματα από υπερβολικές παραμορφώσεις στην φάση λειτουργίας. Σήμερα όμως, η χρήση υλικών υψηλότερης ποιότητας και οι μεγαλύτερες απαιτήσεις αρχιτεκτονικής και οικονομίας, επιτρέπουν την μείωση των διατομών και την ανάπτυξη υψηλών τάσεων στο σκυρόδεμα που τώρα πια ενδέχεται να ρηγματώνεται ακόμη περισσότερο στην φάση λειτουργίας. Αποτέλεσμα τούτου είναι η αύξηση των βελών. Είμαστε υποχρεωμένοι λοιπόν να ελέγξουμε και να περιορίσουμε τις παραμορφώσεις. Οι παραμορφώσεις μπορούν να είναι βέλη κάμψεως, μετατοπίσεις, αλλαγές κλίσεως, γωνιακές παραμορφώσεις κ.λπ.

Οι καταστάσεις κατά τις οποίες οι υπερβολικές παραμορφώσεις μπορούν να επηρεάσουν την ασφάλεια της κατασκευής δεν θα εξετασθούν εδώ μιας και αφορούν τις οριακές καταστάσεις αστοχίας.

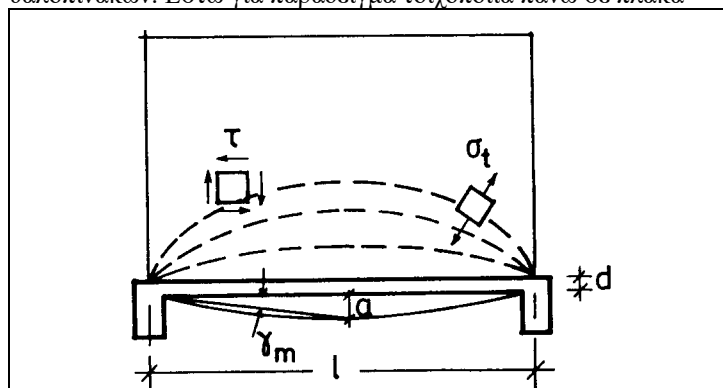
Τα προβλήματα που προκαλούνται από τις παραμορφώσεις και που αφορούν τις οριακές καταστάσεις λειτουργικότητας σχετίζονται με τις εξής τρεις παραμέτρους

- Εμφάνιση
- Βλάβες μη φερόντων στοιχείων
- Μείωση της λειτουργικότητας, χρηστικότητας και ωφελιμότητας της κατασκευής

Ειδικότερα :

α) Εμφάνιση: Σημαντικά βέλη κάμψεως προκαλούν ενόχληση και ανησυχία στους χρήστες. Το ανθρώπινο μάτι δεν είναι πολύ ευαίσθητο στα βέλη και έτσι αρκετά μεγάλες τιμές θα μπορούσαν να είναι ανεκτές. Γενικώς, τιμές του συνολικού βέλους κάμψεως $a < l/250$ είναι ανεκτές.

β) Βλάβες σε μη φέροντα δομικά στοιχεία: Είναι ίσως η σημαντικότερη συνέπεια των υπερβολικών βελών. Εκδηλώνεται με ρωγμές στους διαχωριστικούς τοίχους και με θραύση των υαλοπινάκων. Εστω για παράδειγμα τοιχοποιία πάνω σε πλάκα



Σχήμα 1: Παραμόρφωση πλάκας η οποία στηρίζει τοιχοποιία: το βέλος a συνοδεύεται από μια μέση γωνιακή παραμόρφωση, γ_m , η οποία συνεπάγεται διατμητικές τάσεις, τ , στην τοιχοποιία και κατ'επέκταση κύριες εφελκυστικές τάσεις, σ_i .

Για να μην ρηγματωθεί ο τοίχος πρέπει η εφελκυστική τάση, σ_i , να είναι μικρότερη από την εφελκυστική αντοχή της τοιχοποιίας: $\sigma_i = \tau \leq f_i$ ή $\tau = \gamma G \leq f_i$ ή $\gamma \leq f_i/G$.

Δηλαδή για μια συνηθισμένη τοιχοποιία με (έστω) $f_i=1\text{MPa}$ και $G=150\text{MPa}$, η ανεκτή γωνιακή παραμόρφωση πρέπει να είναι $\gamma \leq 1/150$. Αλλά $\gamma \approx \gamma_m \approx a/(l/2) = 1/150$ άρα $a/l \leq 1/300$

Το όριο αυτό μπορεί να κυμαίνεται από 1/250 για πατώματα που φέρουν μη ευαίσθητα διαχωριστικά (συνολικό βέλος) έως 1/500 για πατώματα που φέρουν ευαίσθητα διαχωριστικά (βέλος μετά την τοποθέτηση των διαχωριστικών). Τα βέλη αυτά υπολογίζονται για τις οιονεί-μόνιμες δράσεις.

γ) Μείωση της λειτουργικότητας της κατασκευής

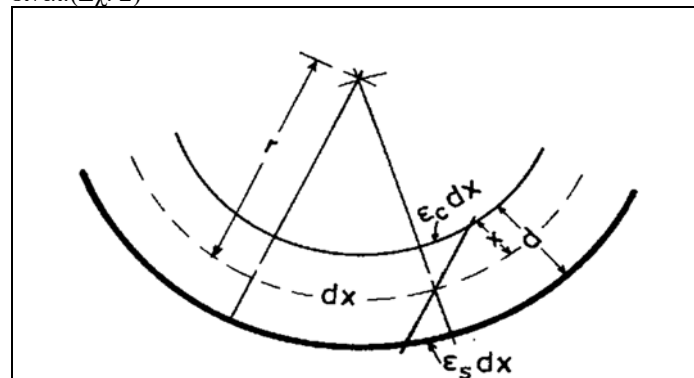
Παραδείγματα τέτοιων καταστάσεων είναι :

- Σχηματισμός θυλάκων ύδατος σ' επίπεδες στέγες
- Δυσλειτουργία θυρών και παραθύρων (φρακάρισμα)
- Κακή λειτουργία μηχανημάτων
- Δονήσεις και κραδασμοί

ΑΠΑΛΛΑΓΕΣ

Για τον έλεγχο των παραμορφώσεων δεν είναι απαραίτητος πάντα ο αναλυτικός υπολογισμός τους. Τις περισσότερες φορές είναι ικανοποιητικοί απλοί κανόνες, όπως οριακές τιμές του λόγου ανοίγματος προς το στατικό ύψος (l/d). Ας δούμε πώς μπορούν να προκύψουν, τελείως προσεγγιστικά, αριθμητικές τιμές του λόγου l/d :

Εστω για παράδειγμα αμφιέρειστος φορέας με ομοιόμορφο φορτίο. Μετά την παραμόρφωσή του έχουμε ότι η καμπυλότητα είναι: (Σχ. 2)



Σχήμα 2: Παραμορφωμένος φορέας: σχέση της καμπυλότητας ($1/r$) με τις ακραίες παραμορφώσεις ϵ_c και ϵ_s .

Από τα τρία όμοια τρίγωνα έχουμε ότι:

$$\frac{dx}{r} = \frac{\epsilon_s dx}{d-x} = \frac{\epsilon_c dx}{x} = \frac{\epsilon_s + \epsilon_c}{d} dx \text{ από όπου προκύπτει: } \frac{1}{r} = \frac{\epsilon_s + \epsilon_c}{d}$$

Στην οριακή κατάσταση λειτουργικότητας (χαμηλές τάσεις χάλυβα και σκυροδέματος), μπορούμε να δεχτούμε ότι :

$\epsilon_s = \sigma_s/E_s$ και $\epsilon_c = \sigma_c/E_c$ (βρισκόμαστε στον ελαστικό κλάδο) οπότε:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{\sigma_c}{E_c}}{d}$$

Δεχόμενοι ότι η μεταβολή της καμπυλότητας είναι παραβολική κατά μήκος του φορέα (είναι όμοια με το διάγραμμα ροπών

¹ Το κείμενο αυτό προσαρμόζει το κεφάλαιο 13 του βιβλίου «Ωπλισμένο σκυρόδεμα» του 6^{ου} εξαμήνου στις απαιτήσεις του Ευρωκώδικα 2 Κ. Γ. Τρέζος, 3^ο Μάθημα, Βέλη κάμψεως, 25/10/2019 σελ. 1

κάμψεως) και εφαρμόζοντας το θεώρημα Mohr (conjugate beam method)², έχουμε:

$$a = \frac{5}{48} \frac{E_s + E_c}{E_s} \frac{1}{d} l^2 \quad \text{ή} \quad \frac{d}{l} \geq \frac{5}{48} \frac{E_s + E_c}{E_s} \frac{a}{l}$$

Δηλαδή, προκειμένου το ανηγμένο βέλος, a/l , να είναι μικρότερο από μια τιμή πρέπει το στατικό ύψος να είναι μεγαλύτερο από ένα ποσοστό του μήκους του φορέα. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι τιμές του λόγου l/d συναρτήσει των τάσεων σκυροδέματος και χάλυβα (στην οριακή κατάσταση λειτουργικότητας, όχι της αστοχίας) για $a \leq l/250$ και $E_c = 28000 \text{ MPa}$ (για $a \leq l/500$ προφανώς το στατικό ύψος προκύπτει διπλάσιο).

Πίνακας 1: Τιμές του λόγου l/d για τις οποίες $a \leq l/250$, $E_c = 28 \text{ GPa}$.

σ_c (MPa)	σ_s (MPa)						
	120	160	200	240	280	320	360
4	52	41	34	29	25	22	20
6	47	38	32	27	24	21	19
8	43	35	30	26	23	20	18
10	40	33	28	25	22	20	18
12	37	31	27	24	21	19	17
14	35	30	26	23	20	18	17

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι :

- παλαιότερα, με χαμηλές ποιότητες υλικών (π.χ. $\sigma_s = 140 \text{ MPa}$ και $\sigma_c = 6 \text{ MPa}$), ήταν αρκετό ένα στατικό ύψος $d = l/42$ ώστε να μην απαιτείται έλεγχος βέλους.
- τώρα, όπου στην φάση λειτουργίας είναι π.χ. $\sigma_s = 320 \text{ MPa}$ και $\sigma_c = 8 \text{ MPa}$, απαιτείται ένα στατικό ύψος $d = l/20$.

Βέβαια οι παραπάνω τιμές είναι προσεγγιστικές και δεν λαβαίνουν υπόψη τους και άλλες μεταβλητές οι οποίες επηρεάζουν τα βέλη κάμψεως. Τέτοιες μεταβλητές είναι το γεωμετρικό ποσοστό του εφελκυσμένου οπλισμού, ρ , το γεωμετρικό ποσοστό του θλιβόμενου οπλισμού, ρ' και το είδος του δομικού συστήματος.

Κατά τον Ευρωκώδικα, επιτρέπεται να μην γίνεται έλεγχος του βέλους κάμψεως όταν ο λόγος άνοιγμα/ύψος υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις (7.16.a) και (7.16.b) και διορθώνεται με συντελεστές που λαμβάνουν υπόψη τον τύπο των οπλισμών και άλλες μεταβλητές. Στην εξαγωγή αυτών των σχέσεων δεν έχει ληφθεί υπόψη οποιαδήποτε υπερύψωση του ξυλοτύπου (αρνητικό βέλος).

$$\frac{1}{d} = K \left[11 + 1,5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \sqrt{f_{ck}} \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] \quad \text{εάν } \rho \leq \rho_0 \quad (7.16.a)$$

$$\frac{1}{d} = K \left[11 + 1,5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \sqrt{f_{ck}} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \quad \text{εάν } \rho > \rho_0 \quad (7.16.b)$$

όπου:

l/d είναι ο επιτρεπόμενος λόγος άνοιγμα (μήκος)/στατικό ύψος

² Για να υπολογίσουμε το βέλος κάμψεως, «φορτίζουμε» την συζυγή δοκό με «φορτίο» το δ/μα καμπυλότητας κατά μήκος της δοκού (σε μονάδες m^{-1}) και υπολογίζουμε το «δ/μα ροπών» για την φόρτιση αυτή (διπλό ολοκλήρωμα του φορτίου). Η «ροπή» (σε μονάδες m) είναι το ζητούμενο βέλος. (Σημ.: Εκεί όπου η πραγματική δοκός έχει μηδενική ροπή, η συζυγής δοκός πρέπει να έχει μηδενική βύθιση, και εκεί όπου η πραγματική δοκός έχει μηδενική τέμνουσα, η συζυγής δοκός έχει μηδενική στροφή και αντιστροφή).

K είναι συντελεστής που εξαρτάται από το δομικό σύστημα (βλ. επόμενο πίνακα)

ρ_0 είναι το ποσοστό οπλισμού αναφοράς $= \sqrt{f_{ck}} \cdot 10^{-3}$

ρ είναι το **απαιτούμενο** ποσοστό (Προσοχή: όχι το τελικώς τοποθετηθέν ποσοστό οπλισμού) εφελκυσμένου οπλισμού για την παραλαβή της ροπής λόγω φορτίων σχεδιασμού στην οριακή κατάσταση αστοχίας στο κέντρο του ανοίγματος (για προβόλους, στη στήριξη) (ανηγμένο στο $b_w d$)

ρ' είναι το **απαιτούμενο** ποσοστό θλιβόμενου οπλισμού για την παραλαβή της ροπής λόγω φορτίων σχεδιασμού, στην οριακή κατάσταση αστοχίας, στο κέντρο του ανοίγματος (για προβόλους, στη στήριξη)

f_{ck} σε MPa

Οι σχέσεις (7.16.a) και (7.16.b) έχουν εξαχθεί με την παραδοχή ότι, υπό τα κατάλληλα φορτία σχεδιασμού για την ΟΚΛ, η τάση του χάλυβα σε μια ρηγματωμένη διατομή στο κέντρο του ανοίγματος μιας δοκού ή πλάκας, ή στη στήριξη ενός προβόλου, είναι 310 MPa ³. Η τιμή αυτή είναι αρκετά συντηρητική και ένας ακριβέστερος υπολογισμός θα δώσει μικρότερες τάσεις. Όταν οι τάσεις του χάλυβα είναι μικρότερες από 310 MPa , οι τιμές που προκύπτουν από τις Σχέσεις (7.16) πρέπει να πολλαπλασιάζονται επί $310/\sigma_s$. Αν δεν γίνεται ακριβέστερος υπολογισμός της τάσεως του χάλυβα υπό τα φορτία λειτουργίας μια αρκετά καλή εκτίμηση είναι:

$$\sigma_s = f_{yd} (A_{s,req} / A_{s,prov}) (\rho_{ser} / \rho_{ult})$$

όπου:

σ_s είναι η εφελκυστική τάση του χάλυβα στο μέσον του ανοίγματος (για προβόλους: στη στήριξη) υπό το φορτίο σχεδιασμού της οριακής κατάστασης λειτουργικότητας που εξετάζεται

$A_{s,prov}$ είναι το εμβαδόν του οπλισμού που τοποθετείται στην ανωτέρω διατομή

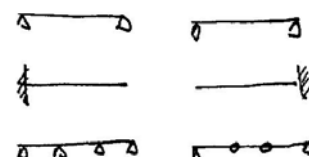
$A_{s,req}$ είναι το εμβαδόν του οπλισμού που απαιτείται στη διατομή για την ΟΚ αστοχίας

ρ_{ser} το φορτίο σχεδιασμού της οριακής κατάστασης λειτουργικότητας που εξετάζεται

ρ_{ult} το φορτίο σχεδιασμού της οριακής κατάστασης αστοχίας με το οποίο υπολογίστηκε ο απαιτούμενος οπλισμός $A_{s,req}$

Ο Ευρωκώδικας προβλέπει επίσης τους εξής διορθωτικούς συντελεστές:

- Σε διατομές με πέλματα, όπου ο λόγος του πλάτους του πέλματος προς το πάχος του κορμού υπερβαίνει το 3, οι τιμές του l/d που προκύπτουν από τη Σχέση (7.16) πρέπει να πολλαπλασιάζονται επί 0,8 (δηλαδή η πλακοδοκός απαιτεί μεγαλύτερο στατικό ύψος από την αντίστοιχη ορθογωνική).
- Σε δοκούς ή πλάκες, πλην των μυκητοειδών πλακών, με ανοίγματα πάνω από 7m, που φέρουν διαχωριστικά ευαίσθητα σε βλάβες από υπερβολική βύθιση, οι τιμές του l/d



Αρχικός φορέας Συζυγής φορέας

³ Η τιμή αυτή είναι μια χοντρική εκτίμηση της τάσεως που θα έχει στην φάση λειτουργίας ο χάλυβας: αν δεχθούμε ότι στην φάση αστοχίας η τάση του χάλυβα είναι 435 MPa και ότι στην φάση λειτουργίας τα φορτία είναι το $\sim 70\%$ των φορτίων αστοχίας ($\approx [g+q]/[1.35g+1.5q]$). Η εκτίμηση αυτή είναι συντηρητική, μιας και το φορτίο σχεδιασμού στην φάση λειτουργίας είναι ακόμη μικρότερο ($g+q$)

Πίνακας 2 (Πίνακας 7.4N του Ευρωκώδικα): Βασικοί λόγοι ανοίγματος προς στατικό ύψος για στοιχεία από οπλισμένο σκυρόδεμα χωρίς αξονική σύνθλιψη			
Δομικό σύστημα	K	Σκυρόδεμα υπό υψηλή τάση $\rho = 1,5\%$ συνήθως οι δοκοί	Σκυρόδεμα υπό χαμηλή τάση $\rho = 0,5\%$ Συνήθως οι πλάκες
Αμφίερεστη δοκός ή πλάκα κατά μία ή δύο διευθύνσεις	1.0	14	20
Ακράιο άνοιγμα συνεχούς δοκού ή πλάκας κατά μία διεύθυνση, ή πλάκας κατά δύο διευθύνσεις συνεχούς κατά μήκος μιας επιμήκους πλευράς	1.3	18	26
Μεσαίο άνοιγμα δοκού ή πλάκας κατά μία ή δύο διευθύνσεις	1.5	20	30
Πλάκα επί υποστυλώματων χωρίς δοκούς (μυκητοειδής) (έλεγχος βάσει του μεγαλύτερου ανοίγματος)	1.2	17	24
Πρόβολος	0.4	6	8

Σημείωση 1: Οι τιμές που δίνονται έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να είναι εν γένει συντηρητικές, και ο υπολογισμός μπορεί συχνά να δείχνει ότι είναι δυνατή η χρήση μικρότερου πάχους στοιχείου.

Σημείωση 2: Σε πλάκες κατά δύο διευθύνσεις ο έλεγχος γίνεται βάσει του μικρότερου ανοίγματος. Σε μυκητοειδείς πλάκες, βάσει του μεγαλύτερου ανοίγματος.

Σημείωση 3: Τα όρια που δίνονται για μυκητοειδείς πλάκες αντιστοιχούν σε περιορισμό λιγότερο αυστηρό από εκείνον της βύθισης κατά 1/250 του ανοίγματος σε σχέση με τα υποστυλώματα. Η εμπειρία δείχνει ότι αυτό είναι ικανοποιητικό.

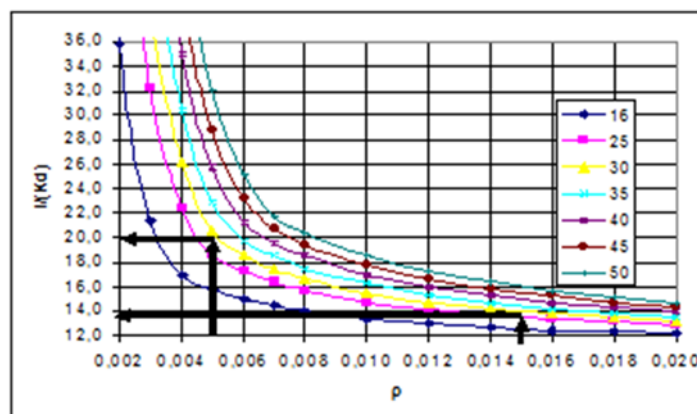
που προκύπτουν από τις Σχέσεις (7.16) πρέπει να πολλαπλασιάζονται επί $7/l_{eff}$ (όπου l_{eff} το θεωρητικό άνοιγμα σε μέτρα, βλέπε 5.3.2.2 (1)).

- Σε μυκητοειδείς πλάκες, των οποίων το άνοιγμα υπερβαίνει τα 8,5 m, και οι οποίες φέρουν διαχωριστικά ευαίσθητα σε βλάβες από υπερβολική βύθιση, οι τιμές του l/d που προκύπτουν από τη Σχέση (7.16) πρέπει να πολλαπλασιάζονται επί $8,5/l_{eff}$ (l_{eff} σε μέτρα).

Στον πίνακα (7.4N), δίνονται επίσης οι τιμές που προκύπτουν από τις Σχέσεις (7.16) για την περίπτωση σκυροδέματος C30/37, για τάση χάλυβα υπό τα φορτία λειτουργίας $\sigma_s=310\text{MPa}$, διαφορετικά δομικά συστήματα (K από 0.4 έως 1.5), και για ποσοστά οπλισμού $\rho=0,5\%$ (πλάκες) και $\rho=1,5\%$ (δοκοί).

Από την σύγκριση των τιμών του Πίνακα και των σχέσεων (7.16) (ή του σχήματος 3) φαίνεται ότι οι σχέσεις (7.16) δίνουν ευνοϊκότερα αποτελέσματα, έχουν όμως το μειονέκτημα ότι πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τον οπλισμό που απαιτείται. Επειδή, τα στατικά ύψη που προκύπτουν από τον Πίνακα 7.4N είναι συνήθως μεγάλα και άρα τα ποσοστά οπλισμού που θα προκύψουν θα είναι μικρά (μικρότερα από τις τιμές 0.5% και 1.5% που λήφθηκαν υπόψη για την σύνταξη του πίνακα), συνιστάται επαναληπτική διαδικασία: υπολογισμός του d από τον πίνακα,

εύρεση της ροπής, υπολογισμός του οπλισμού ρ , εκ νέου υπολογισμός του d από τις σχέσεις 7.16 (συνήθως θα προκύψει μικρότερο), νέος υπολογισμός της ροπής, νέος υπολογισμός του οπλισμού ρ κ.ο.κ.



Σχήμα 3: Τιμές του επιτρεπόμενου λόγου $l/(Kd)$ για απαλλαγή από τον αναλυτικό έλεγχο των βελών κάμψης (σχέσεις 7.16) (με τα βέλη σημειώνονται οι τιμές που προτείνονται στον Πίνακα 7.4N)

Άλλοι τρόποι για τον περιορισμό των βελών κάμψης, εκτός από τον παραπάνω τρόπο (με τον καθορισμό του λόγου l/d), είναι και οι εξής :

- υπερστατικά συστήματα (μείωση των στροφών στις στηρίξεις)
- μεγάλη αντοχή σκυροδέματος
- μικρός λόγος νερού προς τσιμέντο (w/c)
- ποσοστιαία μείωση τσιμέντου
- πρόσθετος θλιβόμενος οπλισμός (για υψηλές σ_c)
- πρόσθετος εφελκόμενος οπλισμός
- προένταση
- αρνητικό βέλος στον ξυλότυπο (πάντως $\leq L/250$)
- αναβολή φορτίσεως (μείωση ερπυσμού, αύξηση E_c)

Αναλυτικός υπολογισμός των βελών με την απλοποιημένη μέθοδο του CEB - καθαρή κάμψη.

Επειδή στις περισσότερες περιπτώσεις της πράξης και ιδιαίτερα σε προμελέτες, ο Μηχανικός ενδιαφέρεται κυρίως για μια εκτίμηση του πιθανού βέλους (με ακρίβεια $\pm 30\%$), γι' αυτό ας δούμε πώς απλοποιείται ακόμη περισσότερο η διγραμμική μέθοδος (βλ. βιβλίο 7^{ου} παρ. §13.3.4).

Για την περίπτωση της καθαρής κάμψης και αμελώντας την συστολή ξηράνσεως έχουμε :

Για το στιγμιαίο βέλος ($\phi = 0$):

$$a_0 = a_c k_0$$

όπου:

a_c = το ελαστικό βέλος (βλ. ενδεικτικό Πίνακα 4)

k_0 διορθωτικός συντελεστής, για τα στιγμιαία βέλη, με τον οποίον λαμβάνεται υπόψη ο βαθμός καταπόνησεως (με τον λόγο M_{ED}/M_D) και ο εφελκόμενος οπλισμός (με το γινόμενο a_r , $a_r = E_s/E_c$, $\rho = A_s/A_c$) (βλ. Σχ. 4.α ή 4.β). Η επίδραση του θλιβόμενου οπλισμού είναι μικρή και γι' αυτό λαβαίνεται υπόψη υιοθετώντας ένα λόγο ρ'/ρ σταθερό ίσο με 0.25.

$$M_{ED} \text{ η ροπή ρηγματώσεως } = W_c [f_{ctm} - N/A]$$

M_D η ροπή σχεδιασμού στην «χαρακτηριστική διατομή» είναι η διατομή της μέγιστης ροπής ασχέτως που αναζητούμε το βέλος: για αμφίερεστη δοκό είναι η ροπή στο μέσον (εκεί όπου αναζητούμε και το βέλος), για πρόβολο είναι η ροπή στηρίζεως (ενώ αναζητούμε το βέλος στην άκρη του προβόλου)

Για το μακροχρόνιο βέλος ($\phi \neq 0$) έχουμε:

$$a_i = a_c k_i \eta$$

όπου :

k_i διορθωτικός συντελεστής για τα μακροχρόνια βέλη, με τον οποίο λαβαίνεται υπόψη ο βαθμός καταπονήσεως (με τον λόγο M_{ED}/M_D), ο εφελκυσμένος οπλισμός (αρ) και ο ερπυσμός (ερπυστικός συντελεστής ϕ^4) (βλ. Σχ. 6)

η : διορθωτικός συντελεστής με τον οποίο λαβαίνεται υπόψη η επίδραση του θλιβόμενου οπλισμού (ρ'/ρ) (βλ. Σχ. 5)

Οι τιμές των k_o , k_i και “ η ” που δίνονται στα Σχήματα έχουν υπολογισθεί με βάση τις εξής παραδοχές :

- ορθογωνική διατομή
- $\rho'/\rho = 0.25$ για τον υπολογισμό του k_o
- $\rho'/\rho = 0$ για τον υπολογισμό του k_i
- $\beta_1 = 1$ ράβδοι υψηλής συνάφειας

Για μη ορθογωνική διατομή: βρίσκεται το πλάτος b_i της ισοδύναμης ορθογωνικής διατομής με την ίδια ροπή αδρανείας και το ίδιο ύψος h . Στην συνέχεια εργαζόμαστε ως να είχαμε ορθογωνική διατομή $b_i \cdot h$.

ΣΥΝΟΨΗ

1. Ο έλεγχος βελών γίνεται στην οριακή κατάσταση **λειτουργικότητας** ($\gamma_g = \gamma_q = \gamma_c = \gamma_s = 1.0$) για τον **οιονεί μόνιμο** συνδυασμό (συντελεστής συνδυασμού: ψ_2). Δηλαδή φορτίο σχεδιασμού: $q_d = g + \psi_2 q$. Οι τιμές των συντελεστών συνδυασμού ψ_2 δίνονται στον επόμενο Πίνακα 3.

Πίνακας 3: Συντελεστές ψ			
Δράσεις	Τιμή		
	συνδυασμού ψ_0	συχνή ψ_1	οιονεί μόνιμη ψ_2
A κατοικίες	0.7	0.5	0.3
B γραφεία,	0.7	0.5	0.3
C συνάθροιση κοινού	0.7	0.7	0.6
D καταστήματα	0.7	0.7	0.6
E αποθήκες	1.0	0.9	0.8
Ανεμος	0.6	0.2	0.0
Χιόνι	0.5-0.7	0.2-0.5	0.0-0.2
Θερμοκρασία	0.6	0.5	0.0

2. Τα βέλη, υπό τον οιονεί μόνιμο συνδυασμό, δεν πρέπει να υπερβαίνουν τις εξής **οριακές τιμές**:

- 1/250 (συνολικό βέλος συμπεριλαμβανομένου και του ερπυσμού)
- 1/500 (βέλος μετά την τοποθέτηση των διαχωριστικών: δηλαδή ερπυστικό βέλος λόγω των μόνιμων φορτίων συν το στιγμιαίο βέλος λόγω των κινητών)

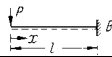
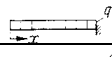
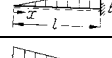
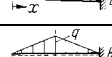
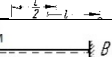
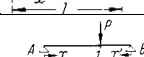
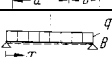
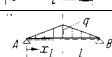
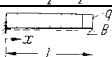
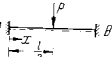
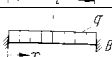
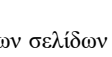
3. Ο έλεγχος μπορεί να γίνει διαζευκτικά:

- είτε μέσω **απαλλακτικών διατάξεων** (βλ. παρ. 4 παρακάτω) περιορίζοντας τον λόγο «μήκος/στατικό ύψος», l/d (ο έλεγχος αυτός δεν είναι υποχρεωτικός δηλαδή δεν απαγορεύεται να παραβιαστούν τα όρια του l/d αλλά τότε, σ' αυτήν την περίπτωση, είναι υποχρεωτικός ο αναλυτικός υπολογισμός του βέλους)
- είτε μέσω **αναλυτικού υπολογισμού** του βέλους (βλ. παρ. 5 παρακάτω) (δεν είναι απαραίτητος αν ικανοποιούνται οι απαλλακτικές διατάξεις)

4. **Απαλλακτικές διατάξεις**:

- επιλογή του στατικού ύψους από τον πίνακα 7.4N ή καλύτερα από τις σχέσεις (7.16)
- αν η επιλογή του στατικού ύψους έγινε από τον πίνακα 7.4N, τότε μετά τον υπολογισμό του απαιτούμενου οπλισμού, και την επιλογή του τελικώς τοποθετούμενου οπλισμού, ο έλεγχος μέσω των σχέσεων (7.16) πιθανώς να οδηγήσει σε μικρότερα πάχη.

5. **Αναλυτικός υπολογισμός** των βελών: βασίζεται στην «διγραμμική μέθοδο» (βλ. παρ. 13.3.4 του βιβλίου) με την οποία αφού υπολογισθούν οι καμπυλότητες κατά μήκος του φορέα στην συνέχεια ολοκληρώνονται. Η απλοποιημένη μέθοδος CEB που παρουσιάστηκε προηγουμένως βασίζεται στις Αρχές του Ευρωκώδικα και μπορεί να εφαρμόζεται (αντί της ολοκλήρωσης των καμπυλοτήτων).

Πίνακας 4: Μέγιστα ελαστικά βέλη	
Δομικό σύστημα / φόρτιση	Μέγιστο ελαστικό βέλος
Πρόβολος, φορτίο στο άκρο 	$a_c = PL^3/[3EJ]$
Πρόβολος ομοιόμορφο φορτίο 	$a_c = qL^4/[8EJ]$
Πρόβολος τριγωνικό φορτίο (max στην στήριξη) 	$a_c = qL^4/[30EJ]$
Πρόβολος τριγωνικό φορτίο (μέγιστο στο άκρο) 	$a_c = 11qL^4/[120EJ]$
Πρόβολος τριγωνικό φορτίο (μέγιστο στο μέσον) 	$a_c = 11qL^4/[192EJ]$
Πρόβολος συγκεντρωμένη ροπή στο άκρο 	$a_c = ML^2/[2EJ]$
Αμφίερεστη συγκεντρωμένο σε απόσταση a 	$a_c = Pa^2b^2/[3EJL]$
Αμφίερεστη ομοιόμορφο 	$a_c = 5qL^4/[384EJ]$
Αμφίερεστη τριγωνικό (μέγιστο στην μέση) 	$a_c = qL^4/[120EJ]$
Μονόπακτη ομοιόμορφο 	$a_c = qL^4/[184.6EJ]$
Αμφίπακτη συγκεντρωμένο στην μέση 	$a_c = PL^3/[192EJ]$
Αμφίπακτη ομοιόμορφο 	$a_c = qL^4/[384EJ]$

Με τα διαγράμματα των επομένων σελίδων μπορούν να υπολογισθούν τα στιγμιαία και μακροχρόνια βέλη κάμψης γραμμικών και επιφανειακών δομικών στοιχείων ορθογωνικής διατομής. Τα διαγράμματα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν, με κάποια μικρότερη ακρίβεια, και στις περιπτώσεις μη ορθογωνικών διατομών (υπολογίζεται η ισοδύναμη ορθογωνική διατομή) ή κάμψης με αξονική δύναμη (η επίδραση της θλιπτικής δύναμης λαβαίνεται υπόψη μόνον στην αύξηση της ροπής ρηγματώσεως)

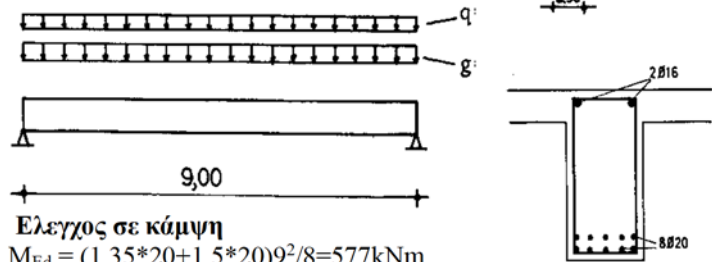
⁴ Για την εκτίμηση του ερπυστικού συντελεστή βλ. παρ. 26 του Τυπολογίου ή Σχήμα 3.1 του Ευρωκώδικα 2

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Υπολογίζεται το ελαστικό βέλος a_e (βλ. Πίνακα 4).
2. Υπολογίζεται η ροπή σχεδιασμού M_D (για τα φορτία λειτουργίας) στην θέση της χαρακτηριστικής διατομής
3. Υπολογίζεται η ροπή ρηγματώσεως M_{ED} από την σχέση $W_e[f_{ctm}-N/A]$
4. Εκτιμάται ο ερπυστικός συντελεστής «φ»
5. Λαμβάνονται οι διορθωτικοί συντελεστές k_o , k_i και «η» από τα επόμενα διαγράμματα (τα γεωμετρικά ποσοστά οπλισμού, ρ και ρ' , υπολογίζονται από τον τελικώς τοποθετηθέντα οπλισμό, σε αντιδιαστολή προς τις σχέσεις 7.16)
6. Υπολογίζεται το πιθανό (με ακρίβεια $\pm 25\%$) στιγμιαίο και μακροχρόνιο βέλος από τις σχέσεις $a_o=k_o a_e$ και $a_t=\eta k_i a_e$ αντίστοιχα.

Αριθμητική εφαρμογή:

1ο Παράδειγμα Αμφιέριστη πλακοδοκός, C25/30, B500C, $g=20\text{kN/m}$, $q=20\text{kN/m}$, $\psi_2=0.6$



Έλεγχος σε κάμψη

$$M_{Ed} = (1.35 \cdot 20 + 1.5 \cdot 20) \cdot 9^2 / 8 = 577 \text{ kNm}$$

Είναι λεπτόκορμη πλακοδοκός ($2.1/0.3 = 7 > 5$)

Αρα: $A_{s1} = 577 / [0.60 \cdot 43.5] = 22.1 \text{ cm}^2$, Τάσεις σκυροδέματος:

$$\sigma_c = 22.1 \cdot 43.5 / [2.1 \cdot 0.15] = 3051 \text{ kPa} < f_{cd} = 0.85 \cdot 25000 / 1.5 = 14167 \text{ kPa}$$

Τίθενται 8Φ20 κάτω σε δύο στρώσεις. Montage (άνω) 2Φ16

Έλεγχος ολικού μακροχρόνιου βέλους: $a_t < 1/250$

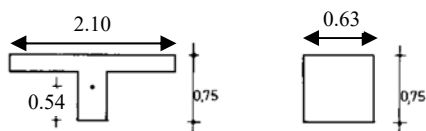
Υπολογισμός του βέλους για τα μακροχρόνια φορτία

$$q_d = \gamma_g g + \gamma_q \psi_2 q = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 0.6 \cdot 20 = 32 \text{ kN/m}$$

Πρέπει να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά (δηλαδή το πλάτος b_i) της ισοδύναμης ορθογωνικής διατομής ώστε οι δύο διατομές να έχουν την ίδια ροπή αδράνειας:

$$h_f/h = 15/75 = 0.20 \text{ και } b_w/b_{eff} = 30/210 = 0.143 \text{ άρα (από πίνακα) } i = 0.0249$$

$$J = 0.0249 b h^3 = 0.0249 \cdot 2.1 \cdot 0.75^3 = 0.22 \text{ m}^4 \text{ άρα η ισοδύναμη ορθογωνική θα έχει πλάτος:}$$



$$b_i = (12 \cdot 0.0249) \cdot 2.1 = 0.63 \text{ m}$$

Θέση Κ.Β.:

$$e_u = (2.1 \cdot 0.15 \cdot 0.675 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.3) / (2.1 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.6) = 0.266 / 0.495 = 0.54 \text{ m}$$

Ροπή αντιστάσεως κάτω πέλματος:

$$W_u = J / e_u = 0.22 / 0.54 = 0.0407 \text{ m}^3$$

Βασικό βέλος a_e :

$$a_e = (5/384) [32 \cdot 9^4 / (30.5 \cdot 10^6 \cdot 0.022)] = 0.0041 \text{ m} = 4.1 \text{ mm}$$

Ροπή στην χαρακτηριστική διατομή:

$$M_{ED} = (1/8) 32 \cdot 9^2 = 324 \text{ kNm}$$

$$\text{Ροπή ρηγματώσεως: } M_{cr} = W_e \cdot f_{ct} = 0.0407 \cdot 2600 = 105.9 \text{ kNm}$$

$$M_{cr} / M_{ED} = 105.9 / 324 = 0.33, \quad \rho = 25.12 / [67.5 \cdot 63] = 0.59\%$$

$$\alpha = E_s / E_c = 200 / 31, \quad \alpha \rho' / \rho = 4 / 25.12 = 0.16 \text{ (Σημ.: εδώ είναι ο τοποθετούμενος οπλισμός)}$$

Από το διάγραμμα του Σχ. 4.β (επαναλαμβανόμενες φορτίσεις) βρίσκουμε: $k_o = 3.3$ και άρα το στιγμιαίο βέλος είναι:

$$a_o = k_o \cdot a_e = 3.3 \cdot 4.1 = 13.5 \text{ mm}$$

Εκτιμάται ερπυστικός συντελεστής $\phi = 2.5$

Από το Σχ. 6 βρίσκουμε $k_i = 5.5$ και από το Σχ. 5 $\eta = 0.975$ άρα το μακροχρόνιο βέλος προκύπτει:

$$a_t = \eta k_i a_e = 0.975 \cdot 5.5 \cdot 4.1 = 22.0 \text{ mm}$$

Έλεγχος $a_t = 22 \text{ mm} < 9000 / 250 = 36 \text{ mm}$ άρα έχει καλώς.

Έλεγχος βέλους μετά την τοποθέτηση των διαχωριστικών: $a_t < 1/500$

$$q_d = \gamma_g g + \gamma_q \psi_2 q = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 0.6 \cdot 20 = 32 \text{ kN/m}$$

Το στιγμιαίο βέλος για $q_d = 32 \text{ kN/m}$ βρέθηκε ότι είναι: $a_o = 13.5 \text{ mm}$

Το στιγμιαίο βέλος λόγω των κινητών φορτίων μόνο είναι:

$$a_o(q) = 13.5 \cdot 12 / 32 = 5.1 \text{ mm}$$

Το ερπυστικό τμήμα του μακροχρόνιου βέλους λόγω των "μόνιμων" φορτίων (βλ. προηγούμενο παράδειγμα) είναι:

$$a_i(g) = 22.0 - 13.5 = 8.5 \text{ mm}$$

Αρα συνολικό βέλος "μετά την τοποθέτηση των διαχωριστικών":

$$a_{tot} = 5.1 + 8.5 = 13.6 \text{ mm} < 9000 / 500 = 18 \text{ mm} \text{ άρα έχει καλώς}$$

Έλεγχος μέσω των απαλλακτικών διατάξεων:

Από τον Πίνακα 7.4N για αμφιέριστη δοκό (σκυρόδεμα υπό υψηλή τάση) έχουμε: $d > 1/14 = 900/14 = 64 \text{ cm}$ άρα έχει καλώς.

Από την (ακριβέστερη) σχέση 7.16.β έχουμε για: $\rho' = 0$, $\rho = 22.1 / [30 \cdot 67.5] = 10.9\%$, (Σημ.: εδώ είναι ο απαιτούμενος οπλισμός στην κατάσταση αστοχίας

$$K = 1, \quad \rho_o = 5\%$$

$$\frac{1}{d} = K \left[11 + 1.5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_o}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \sqrt{f_{ck}} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_o}} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d} = 1 \left[11 + 1.5 \sqrt{25} \frac{5}{10.9 - 0} + \frac{1}{12} \sqrt{25} \sqrt{\frac{0}{5}} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d} = 1 [11 + 3.44 + 0] = 14.44$$

Η τιμή αυτή μπορεί να διορθωθεί για να ληφθεί υπόψη ότι ο χάλυβας στην φάση λειτουργίας βρίσκεται υπό τάση μικρότερη από 310 MPa, πράγματι:

$$\sigma_s = f_{yd} (A_{s,req} / A_{s,prov}) (p_{ser} / p_{ult}) = 435 \cdot [22.10 / 25.12] \cdot [32 / 57] = 214 \text{ MPa}$$

$$\text{Οπότε } 1/d = 14.44 \cdot [310 / 214] = 20.9$$

$$d = 900 / 20.9 = 43.1 \text{ cm. Παρατηρούμε ότι προέκυψε ευνοϊκότερη τιμή (43.1 < 64.0)}$$

2ο Παράδειγμα Δείτε την άσκηση τετραερείστων πλακών του προηγούμενου εξαμήνου: Ask62017-03TetraerPlakes.pdf, η οποία θα σας βοηθήσει στο Θέμα.

Άσκηση: Σε μια αμφιέριστη πλάκα, μήκους $L = 7.00 \text{ m}$, η οποία φέρει ευαίσθητα διαχωριστικά, υπολογίστηκαν τα εξής βέλη κάμψης:

$$\text{Στιγμιαίο βέλος λόγω ιδίου βάρους, } 1.0 \cdot g_{tot}, \quad a_{0g,tot} = 15 \text{ mm,}$$

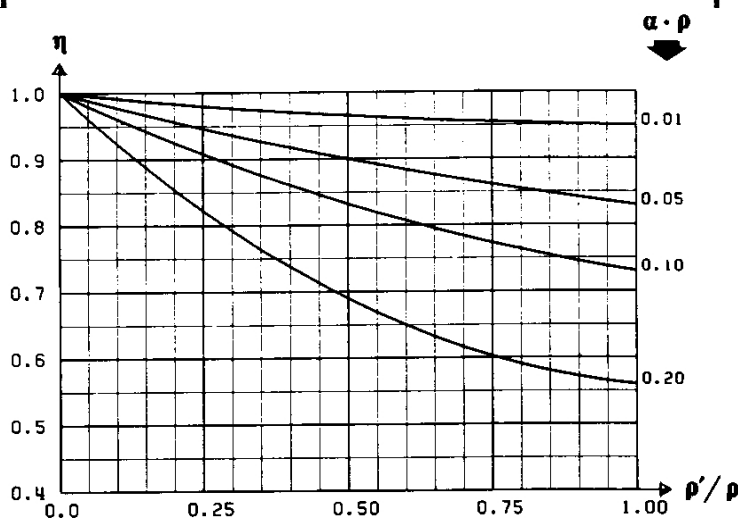
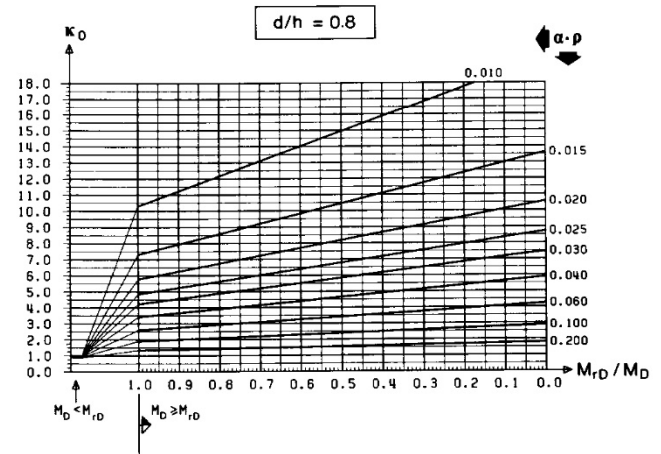
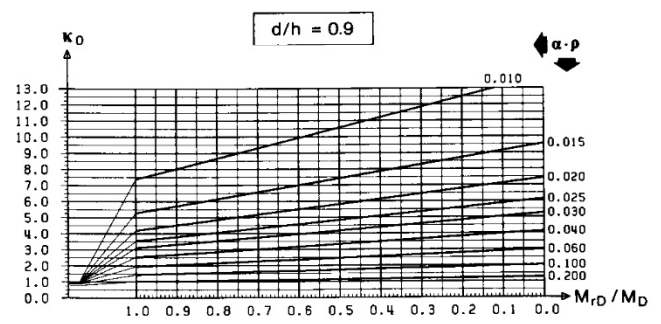
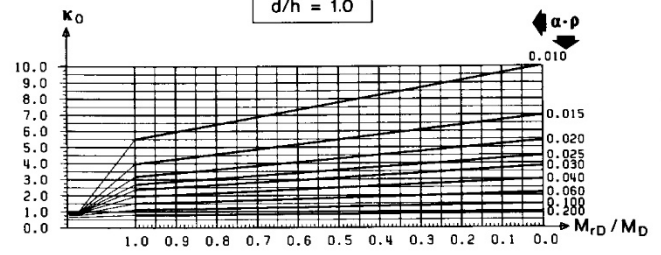
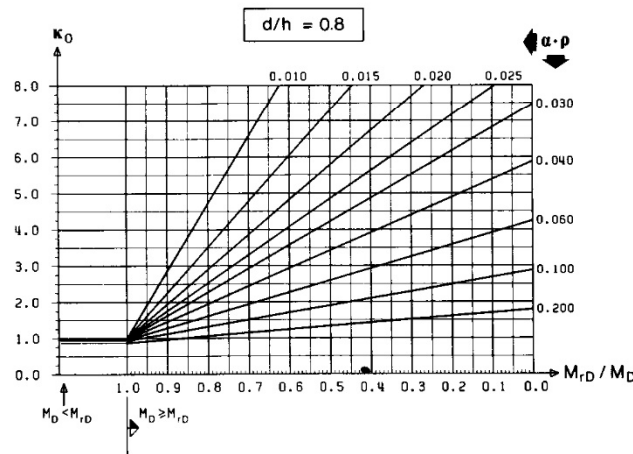
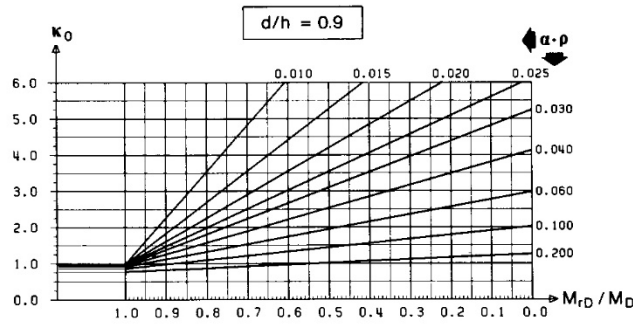
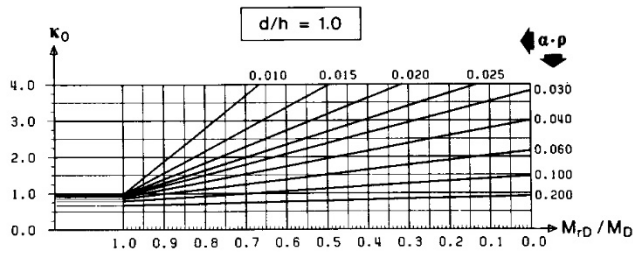
$$\text{στιγμιαίο βέλος λόγω ωφελίμου φορτίου, } 1.0 \cdot q, \quad a_{0q} = 14 \text{ mm,}$$

βέλος λόγω μόνο ερπυσμού από τα οιονεί

$$\text{μόνιμα φορτία, } g_{tot} + 0.3q,$$

$$a_{creep} = 13 \text{ mm}$$

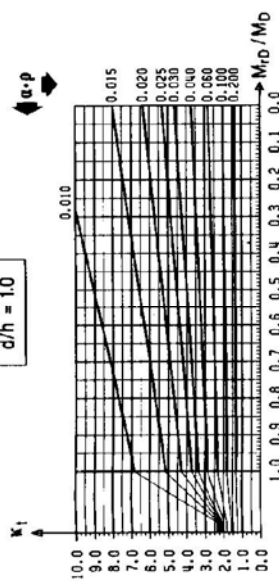
Ικανοποιείται ο έλεγχος βέλους για τα ευαίσθητα διαχωριστικά? (Υποθέσατε ότι τα διαχωριστικά θα τοποθετηθούν μετά το ξεκαλούπωμα της πλάκας χωρίς όμως να έχει εκδηλωθεί ακόμη ερπυσμός). Αν δεν ικανοποιείται ο έλεγχος, πόση υπερύψωση πρέπει αν δοθεί στον ξυλότυπο?



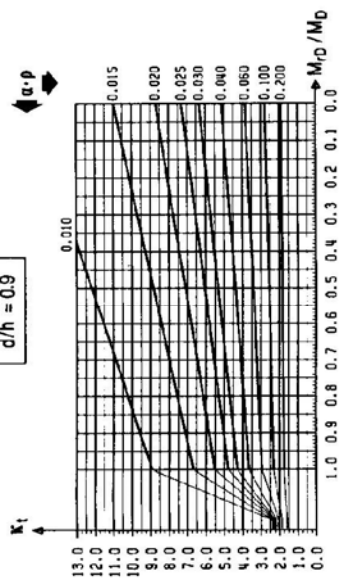
Σχ. 5 Μειωτικός συντελεστής «η» ο οποίος λαβαίνει υπόψη την επίδραση του θλιβόμενου οπλισμού

$\varphi = 1.5$

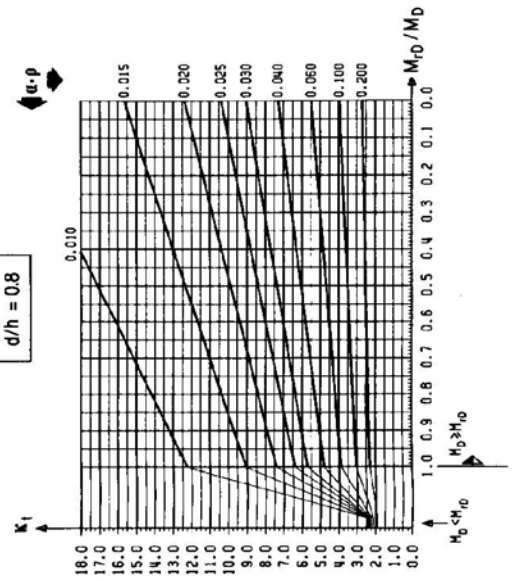
$d/h = 1.0$



$d/h = 0.9$

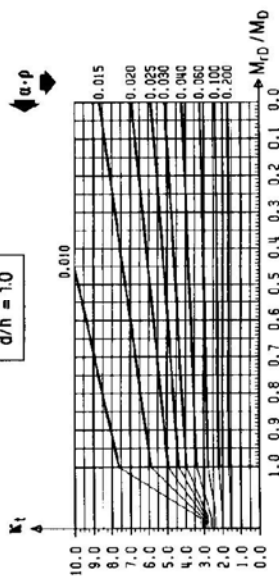


$d/h = 0.8$

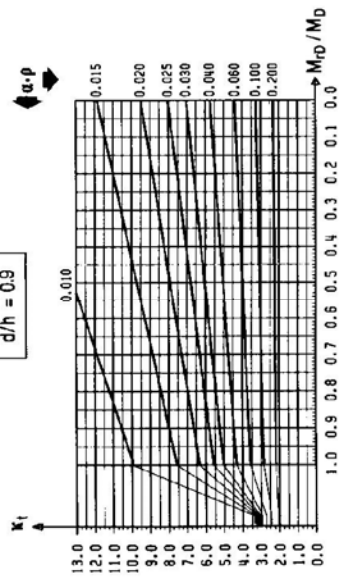


$\varphi = 2.5$

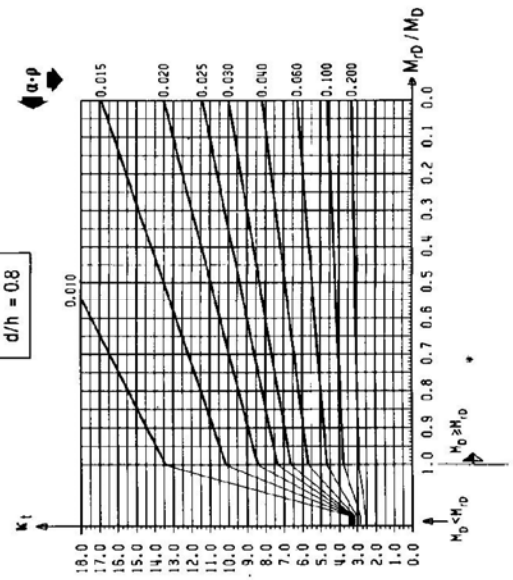
$d/h = 1.0$



$d/h = 0.9$

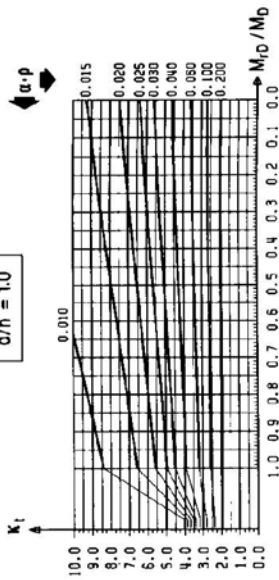


$d/h = 0.8$

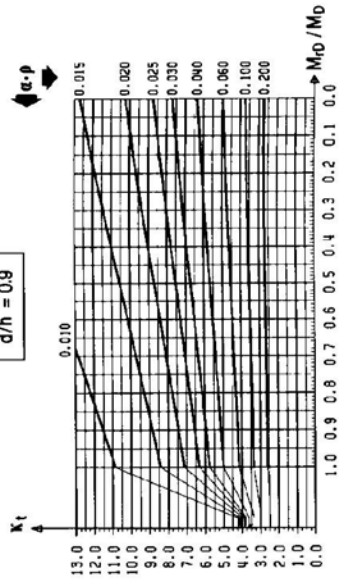


$\varphi = 3.5$

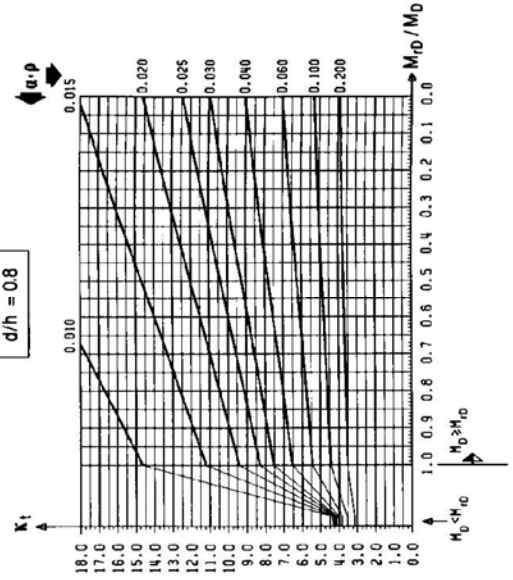
$d/h = 1.0$



$d/h = 0.9$



$d/h = 0.8$



Σχ. 6 Μακροχρόνιο βέλος, Επαναλαμβανόμενες φορτίσεις ($\beta_2=0.5$) $\alpha_t=\eta k_t$