

4.7 Απλά Ισοστατικά Πλαίσια

Ας θεωρήσουμε τον φορέα του σχήματος, που έχει μορφή πλαισίου και που στηρίζεται στο σημείο A με άρθρωση και στο σημείο Δ με κύλιση.

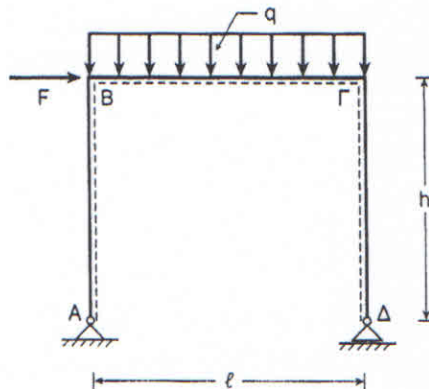
Οι αντιδράσεις προκύπτουν από την ισορροπία στο ελεύθερο σώμα:

$$+\uparrow (\Sigma F) = 0: V_A + V_\Delta - q\ell = 0$$

$$\rightarrow (\Sigma F) = 0: -H_A + F = 0$$

$$\curvearrowright (\Sigma M)^A = 0:$$

$$V_\Delta \cdot \ell - q\ell \frac{\ell}{2} - Fh = 0$$



[από το βιβλίο των Ι. Βαρδαλάκη και Α. Γιαννακόπουλου]

Άρα:

$$V_A = \frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

$$V_D = \frac{q\ell}{2} + F \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

$$H_A = F$$

Για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών στα διάφορα τμήματα του πλαισίου, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι αυτό μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των τομών: Αποχωρίζοντας τις γωνίες B και Γ αντικαθιστούμε τον φορέα από τρεις ευθύγραμμους φορείς, τους οποίους αναλύουμε ξεχωριστά.

• Ορθοστάτης AB

Για την ισορροπία του στελέχους αυτού, και για κάθε θέση σε απόσταση s_1 ($0 \leq s_1 \leq h$) από το άκρο A πέραν της τέμνουσας Q και της ροπής κάμψης M πρέπει να ασκείται και μία αξονική δύναμη N:

$$N = -V_A, \quad Q = H_A,$$

$$M = Q \cdot s_1 = H_A \cdot s_1$$

• Γωνία B:

Ισορροπία δυνάμεων και ροπών στη γωνία B δίνει:

$$+\downarrow (\Sigma F) = 0: N_{B'} + Q_{B''} = 0 \Rightarrow$$

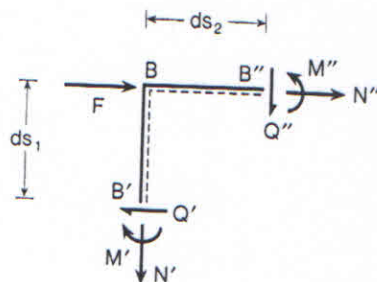
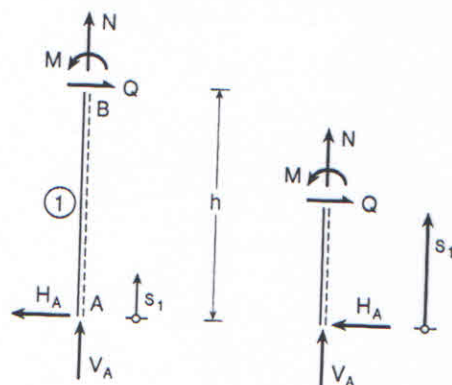
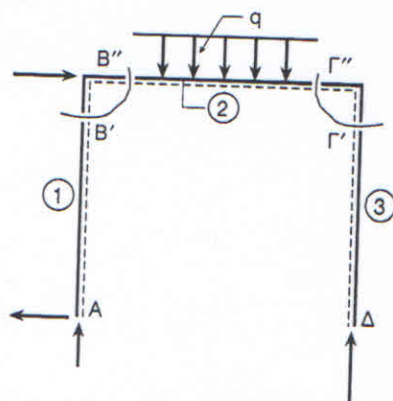
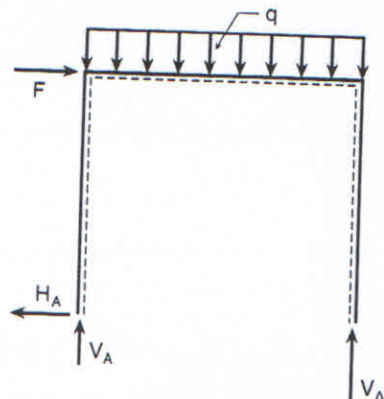
$$\underline{Q_{B''} = -N_{B'} = -(-V_A) = V_A}$$

$$+\rightarrow (\Sigma F) = 0: -Q_{B'} + F + N_{B''} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{N_{B''} = -F + Q_{B'} = -F - H_A = -F + F = 0 (!)}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M^B = 0: -M_{B'} + M_{B''} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{M_{B''} = M_{B'} = H_A \cdot h}$$

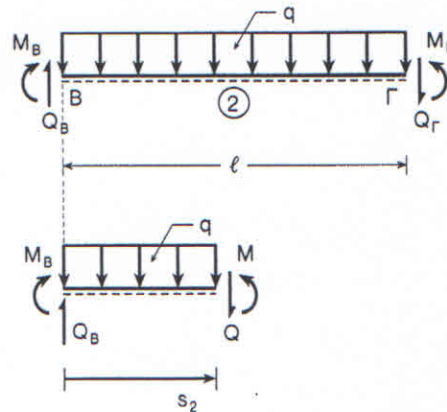


• Δοκός ΒΓ

Το οριζόντιο τμήμα ΒΓ δεν δέχεται αξονικές δυνάμεις. Οι τέμνουσες Q και ροπές κάμψης M προκύπτουν από τις γνωστές εκφράσεις:

$$Q = Q_B - \int_0^{s_2} q ds = V_A - qs_2$$

$$M = M_B + \int_0^{s_2} Q ds = H_A h + V_A s_2 - \frac{1}{2} qs_2^2$$



Στο σημείο Γ ($s_2 = \ell$) έχουμε:

$$Q_\Gamma = V_A - q\ell = \frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right) - q\ell = -\frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

$$M_\Gamma = H_A h + V_A \ell - \frac{1}{2} q\ell^2 =$$

$$Fh + \left(\frac{q\ell}{2} - F \frac{h}{\ell} \right) \ell - \frac{1}{2} q\ell^2 = 0 \quad (!)$$

• Γωνία Γ:

$$+\downarrow (\Sigma F) = 0: -Q_{\Gamma''} + N_{\Gamma'} = 0$$

$$\Rightarrow N_{\Gamma'} = Q_{\Gamma''} = -\frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

$$\rightarrow (\Sigma F) = 0:$$

$$-N_{\Gamma''} - Q_{\Gamma'} = 0 \Rightarrow Q_{\Gamma'} = -N_{\Gamma''} = 0$$

$$+\circ (\Sigma M) = 0:$$

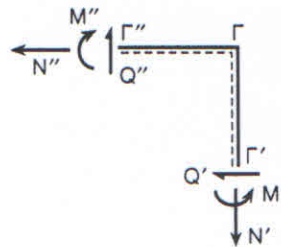
$$-M_{\Gamma''} + M_{\Gamma'} = 0 \Rightarrow M_{\Gamma'} = M_{\Gamma''} = 0.$$

• Ορθοστάτης ΓΔ:

$$N = -V_\Delta = -\frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right) \quad (!)$$

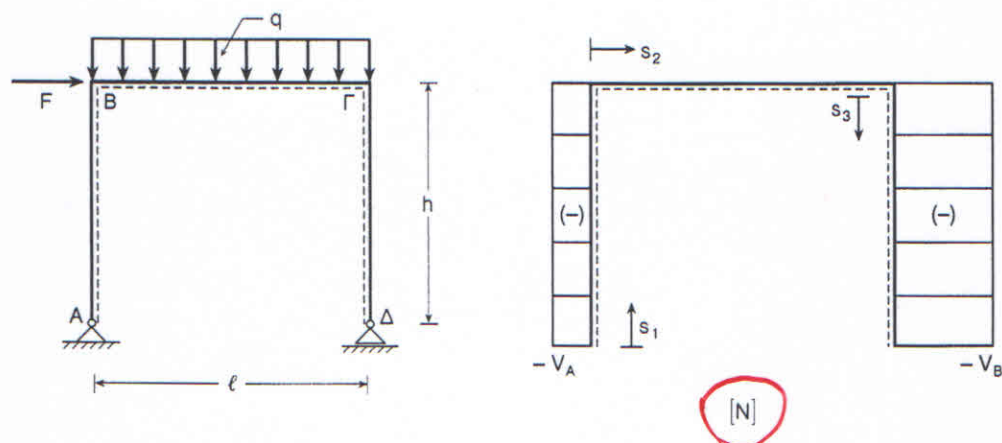
$$Q = 0 \quad (!)$$

$$M = 0. \quad (!)$$

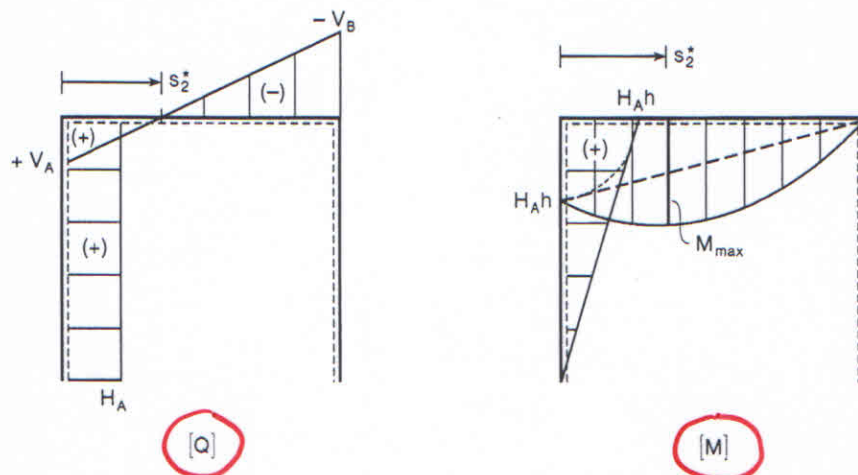


Σύνοψη αποτελεσμάτων:

1) Φόρτιση και διάγραμμα αξονικών δυνάμεων N

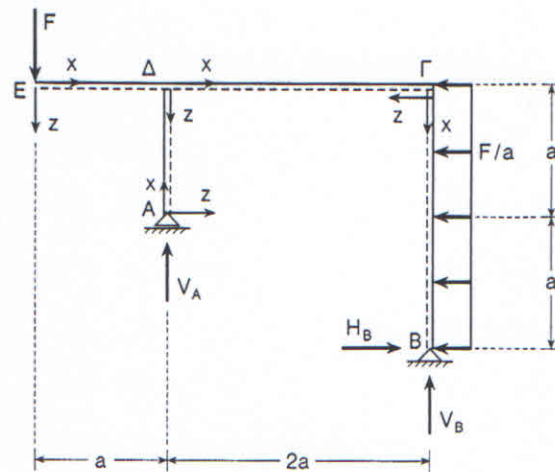


2) Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων Q και ροπών κάμψης M



Ασκήσεις

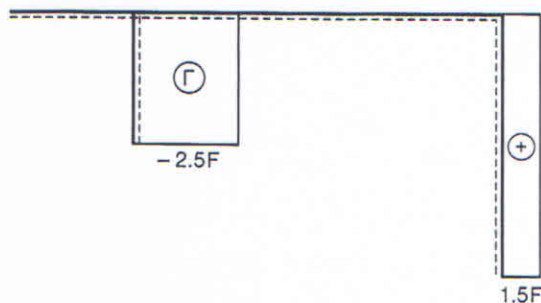
1) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα $[M]$, $[Q]$, $[N]$ στο κάτωθι πλαίσιο.



Λύση

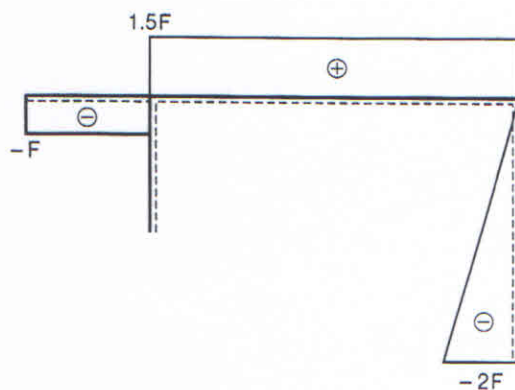
Από ισορροπία προκύπτουν οι αντιδράσεις

$$V_A = 2.5F \quad V_B = -1.5F \quad H_B = 2F$$



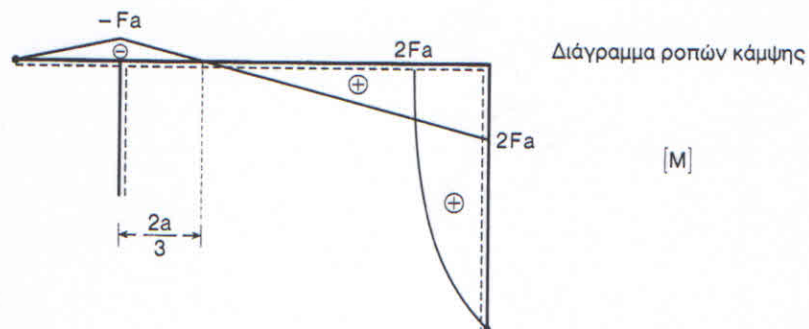
Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων

$[N]$

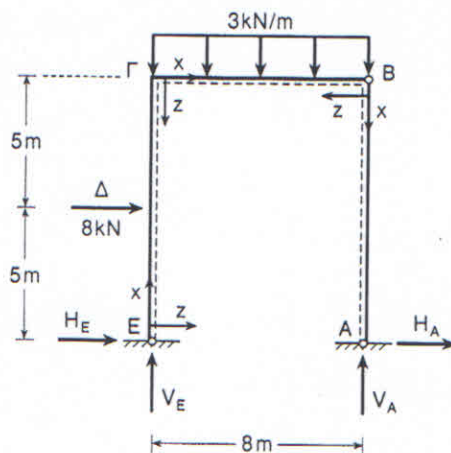


Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

$[Q]$



2) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα $[M]$, $[Q]$, $[N]$ στο κάτωθι πλαίσιο.

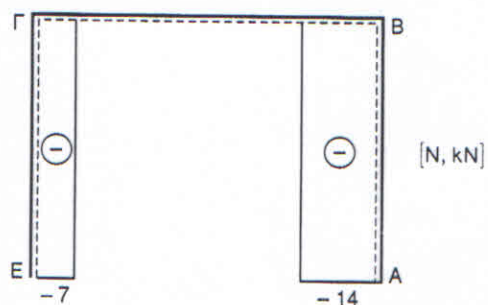


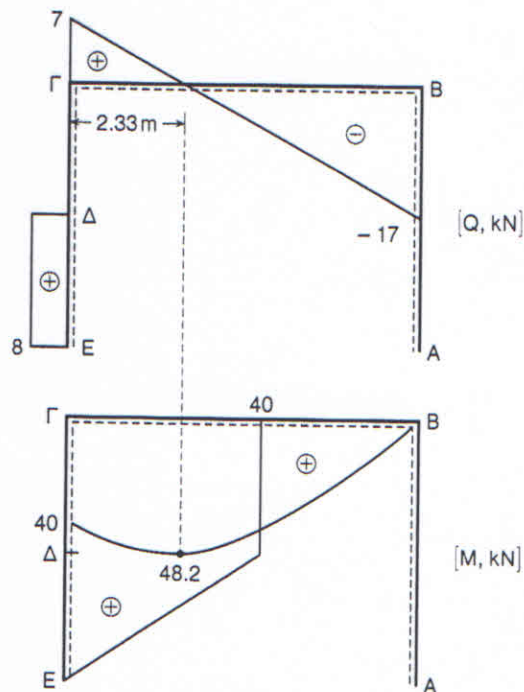
Λύση

Υπολογισμός αντιδράσεων, όπου ο φορέας είναι ουσιαστικά ένα τριαρθρωτό τόξο.

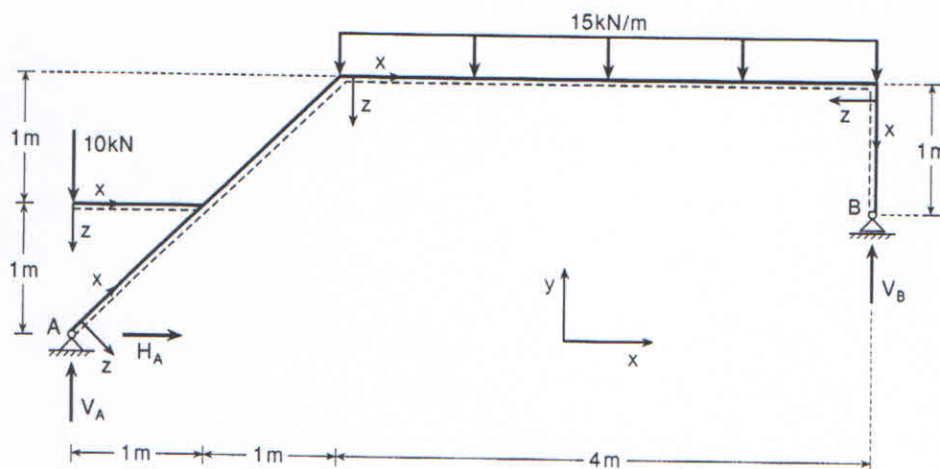
$$H_A = 0, \quad V_A = 17 \text{ kN},$$

$$H_E = -8 \text{ kN}, \quad V_E = 7 \text{ kN}$$





3) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα [M], [Q], [N] στο κάτωθι πλαίσιο.



Λύση

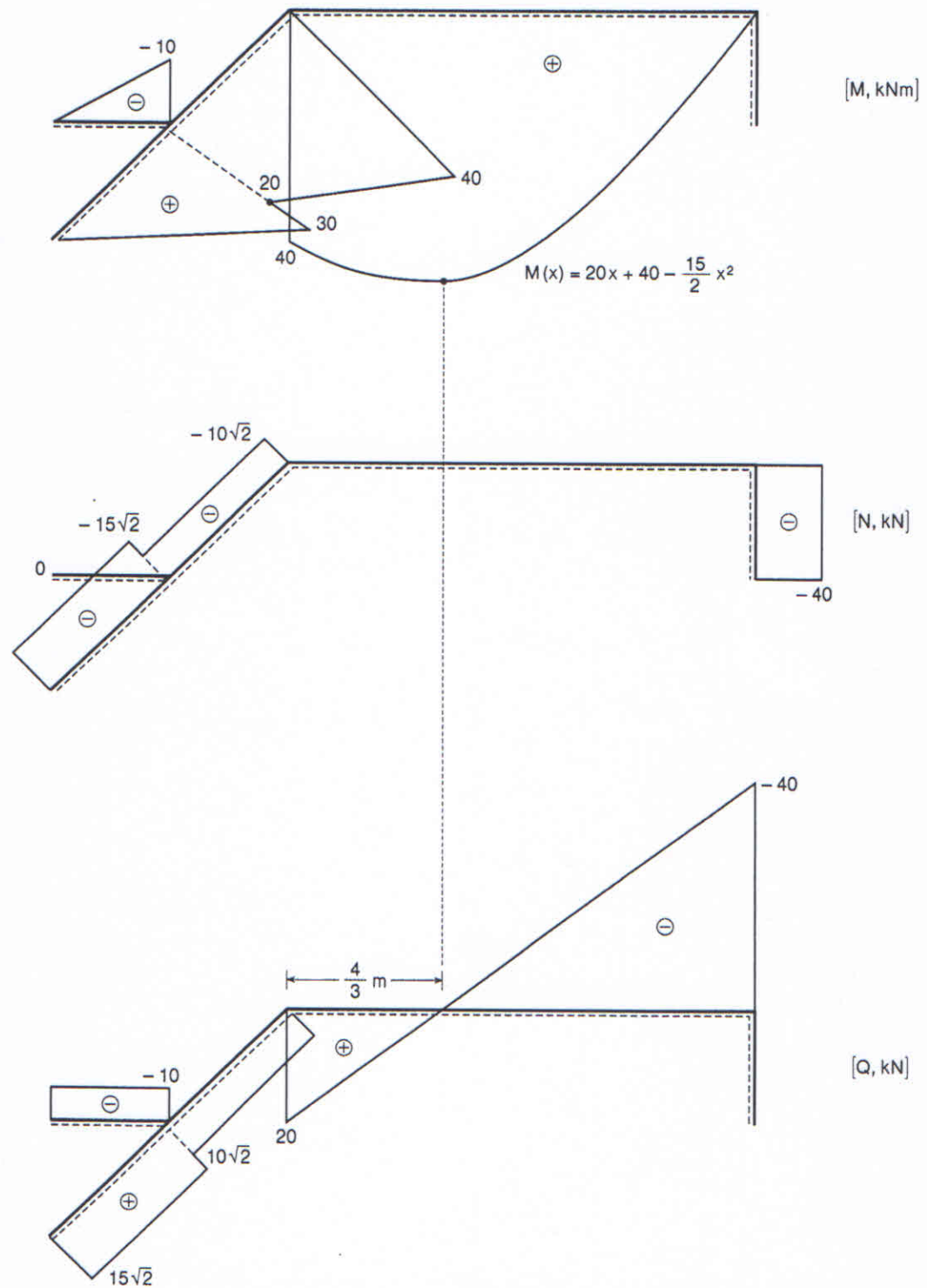
Υπολογισμός αντιδράσεων στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων (x, y):

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

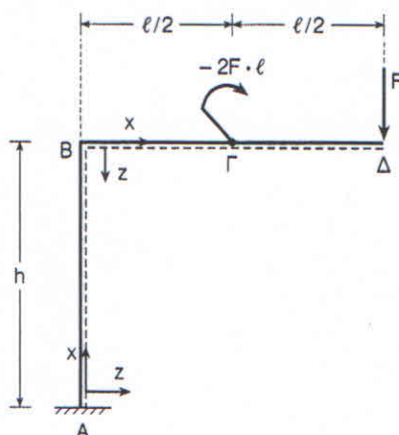
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 70 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0 \Rightarrow V_B = 40 \text{ kN}$$

Επομένως, $V_A = 30 \text{ kN}$



6) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα $[M]$, $[Q]$, $[N]$ στο πλαίσιο του κάτωθι σχήματος.



Λύση

