

β) Αντιστοίχως, για σταθερό κατανεμημένο φορτίο ( $q = q_0$ : σταθ.) οι τέμνουσες μεταβάλλονται γραμμικά και οι ροπές παραβολικά:

$$Q = Q_0 - q_0 x$$

$$M = M_0 + Q_0 x - \frac{1}{2} q_0 x^2$$

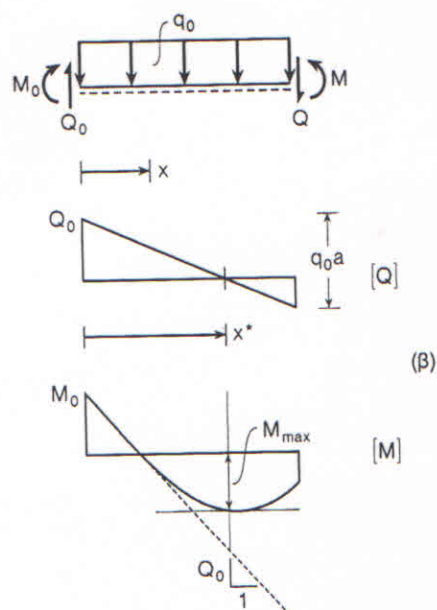
Παρατηρούμε ότι:

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=0} = Q_0$$

Επίσης, εκεί που μηδενίζονται οι τέμνουσες, οι ροπές κάμψης έχουν (αναλυτικό) ακρότατο:

$$Q|_{x=x^*} = 0 \Rightarrow M|_{x=x^*} = \text{Extr!}$$

**Προσοχή:** Τα αναλυτικά ακρότατα δεν συνεπάγονται απολύτως μέγιστες ή ελάχιστες τιμές



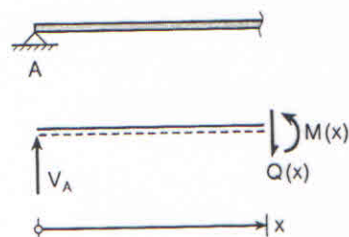
#### 4.4.4 Συνοριακές Συνθήκες

Κατά την ολοκλήρωση των εξισώσεων ισορροπίας προκύπτουν δύο σταθερές ολοκλήρωσης,  $Q_0 = Q(0)$  και  $M_0 = M(0)$ , που με τη σειρά τους πρέπει να προσδιοριστούν από αντίστοιχες **συνοριακές συνθήκες**. Θεωρούμε τις εξής τυπικές στηρίξεις:

- Άρθρωση: Για  $x = 0$ :

$$Q(0) = V_A$$

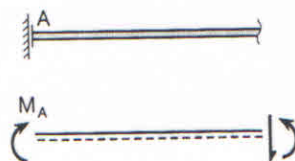
$$M(0) = 0$$



- Εγκάρσιος Οδηγός:

$$Q(0) = 0$$

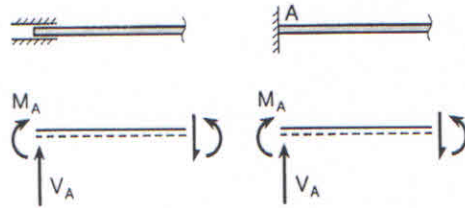
$$M(0) = M_A$$



[από το βιβλίο των Ι. Βαρδουλάκη και Α. Γιαννακόπουλου]

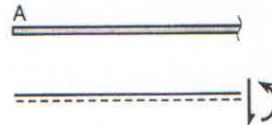
• Διαμήκης Οδηγός ή Πάκτωση:

$$Q(0) = V_A, \quad M(0) = M_A$$



• Ελεύθερο Σύνορο:

$$Q(0) = 0, \quad M(0) = 0$$



4.4.5 Εφαρμογές

1) Αμφιέριστη δοκός υπό σταθερό φορτίο

• Αντιδράσεις:

$$V_A = V_B = \frac{q_0 \ell}{2},$$

$$M_A = M_B = 0$$

• Διάγραμμα τεμνουσών:

$$Q = Q(0) - \int_0^x q_0 d\xi \Rightarrow$$

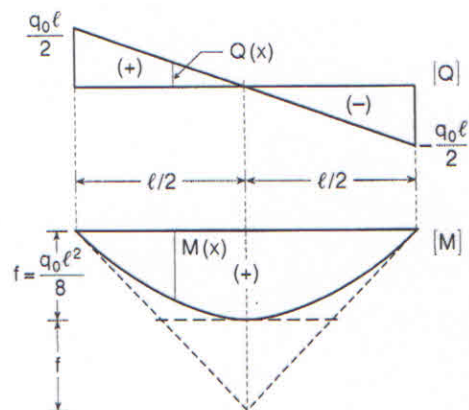
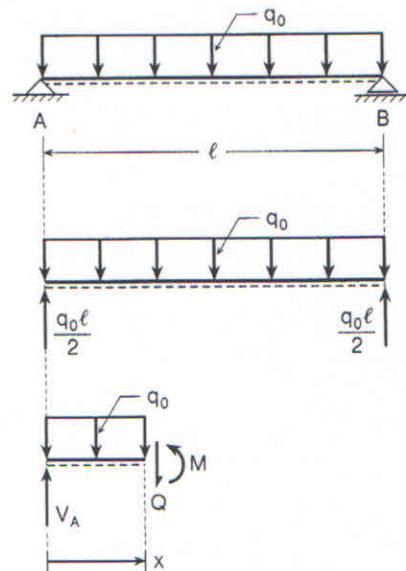
$$Q = V_A - q_0 x = \frac{q_0 \ell}{2} \left( 1 - 2 \frac{x}{\ell} \right)$$

$$\text{Για } x = \frac{\ell}{2} \Rightarrow Q = 0.$$

• Διάγραμμα ροπών κάμψης:

$$M = M(0) + \int_0^x \frac{q_0 \ell}{2} \left( 1 - 2 \frac{\xi}{\ell} \right) d\xi \Rightarrow$$

$$M = \frac{q_0 \ell^2}{2} \left\{ \left( \frac{x}{\ell} \right) - \left( \frac{x}{\ell} \right)^2 \right\}$$



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της αμφιέριστης δοκού κάτω από σταθερό φορτίο η μέγιστη ροπή κάμψης εμφανίζεται στο μέσον της και έχει ένταση:

$$\underline{M_{\max} = \frac{q_0 \ell^2}{8}} \quad (\text{για } x = \frac{\ell}{2}, Q = 0)$$

*(εξελώνονται οι κάτω ίνες της δοκού)*

## 2) Πρόβολος υπό σταθερό φορτίο

- Αντιδράσεις:

$$V_A = q_0 \ell, \quad M_A = \frac{1}{2} q_0 \ell^2$$

- Τέμνουσες:

$$Q = Q(0) - \int_0^x q_0 d\xi = V_A - q_0 x \Rightarrow$$

$$Q = q_0 \ell \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right)$$

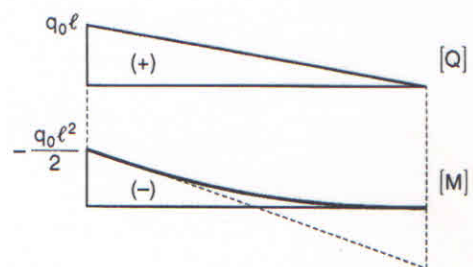
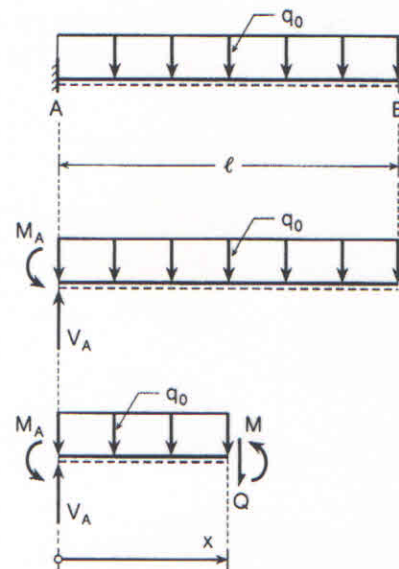
- Ροπές κάμψης:

$$M = M(0) + \int_0^x Q d\xi$$

$$= -M_A + \int_0^x q_0 \ell \left( 1 - \frac{\xi}{\ell} \right) d\xi$$

$$M = -\frac{1}{2} q_0 \ell^2 + q_0 \ell \left( x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell} \right) \Rightarrow$$

$$M = -q_0 \ell^2 \left\{ \frac{1}{2} - \left( \frac{x}{\ell} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\ell} \right)^2 \right\}$$



Παρατηρούμε ότι η μέγιστη ροπή κάμψης εμφανίζεται στην πάκτωση και έχει αρνητικό πρόσημο.

*(αυτό σημαίνει ότι εξελώνονται οι άνω ίνες της διατομής)*

### 6) Καταναμημένο τριγωνικό φορτίο

$$q = q_0 - q_0 \frac{|x|}{\ell/2}$$

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} q_0 \frac{\ell}{2} = \frac{q_0 \ell}{4}$$

$$Q = Q(0) - q_0 x \pm \frac{q_0}{\ell/2} \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Για: } x = -\frac{\ell}{2}, Q = V_A \Rightarrow$$

$$Q(0) + q_0 \frac{\ell}{2} - \frac{q_0}{\ell/2} \frac{1}{2} \left(-\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{q_0 \ell}{4}$$

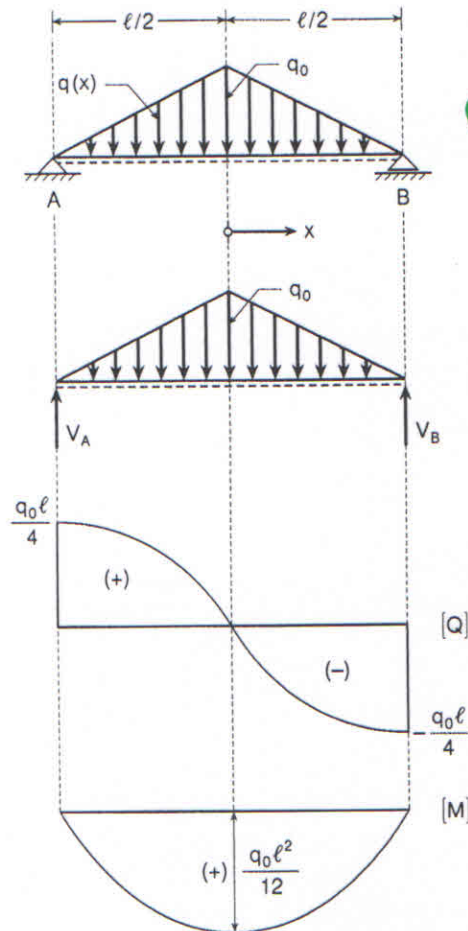
$$\Rightarrow Q(0) = 0,$$

$$Q = -q_0 x \pm q_0 \frac{x^2}{\ell}$$

$$M = M(0) - \frac{1}{2} q_0 x^2 \pm \frac{1}{3} q_0 \frac{x^3}{\ell}$$

$$\text{Για: } x = -\frac{\ell}{2}, M = 0 \Rightarrow M(0) = \frac{q_0 \ell^2}{12}$$

$$M = \frac{q_0 \ell^2}{12} - \frac{q_0 x^2}{2} \pm \frac{q_0 x^3}{3\ell}$$



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το καταναμημένο φορτίο είναι γραμμικό ως προς  $x$  τότε το διάγραμμα τεμνουσών είναι παραβολικό και το διάγραμμα ροπών κάμψης είναι κυβικό. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή για το σχεδιασμό των διαγραμμάτων θα χρειαστεί, κάνοντας χρήση των διάφορων σχέσεων συμμετρίας, να υπολογιστούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις  $Q = Q(x)$  και  $M = M(x)$  για μία σχετικά πυκνή διαμέριση του διαστήματος  $0 \leq x \leq \ell/2$ . Για τέτοιους υπολογισμούς ενδείκνυται η χρήση λογισμικού χάρτου (π.χ. Excel). Για εξάσκηση θα ήταν χρήσιμο στο σημείο αυτό να σχεδιαστούν τα παραπάνω διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης κάνοντας χρήση λογισμικού χάρτου.



#### 4.5 Δοκός Gerber

Ο φορέας χωρίζεται σε δύο τμήματα (I) και (II), η δε διαχωριστική γραμμή διέρχεται από το σημείο στήριξης B. Αντίστοιχα εισάγουμε δύο συντεταγμένες  $x_1$  και  $x_2$ , οπότε

$$(I): q_I = q_0$$

$$Q_I = -q_0 x_1 + c_1$$

$$M_I = -\frac{1}{2} q_0 x_1^2 + c_1 x_1 + c_2$$

$$(II): q_{II} = 0$$

$$Q_{II} = c_3$$

$$M_{II} = c_3 x_2 + c_4$$

Στις παραπάνω εκφράσεις εμφανίζονται 4 σταθερές ολοκλήρωσης  $c_1, \dots, c_4$ , οι οποίες καθορίζονται από αντίστοιχες συνοριακές και μεταβατικές συνθήκες:

- **Συνοριακές συνθήκες:**

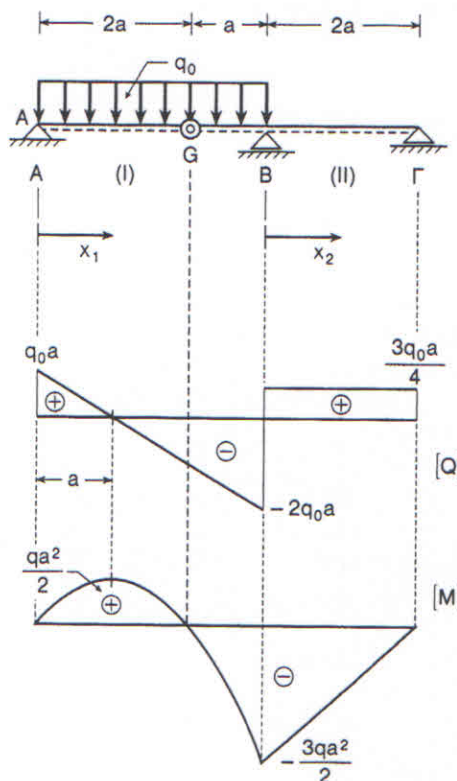
$$x_1 = 0 \quad M_I = 0, \quad x_2 = 2a \quad M_{II} = 0.$$

- **Συνθήκη στην άρθρωση G:**

$$x_1 = 2a \quad M_I = 0$$

- **Συνθήκη ισορροπίας:**

$$M_I(x_1 = 3a) = M_{II}(x_2 = 0)$$

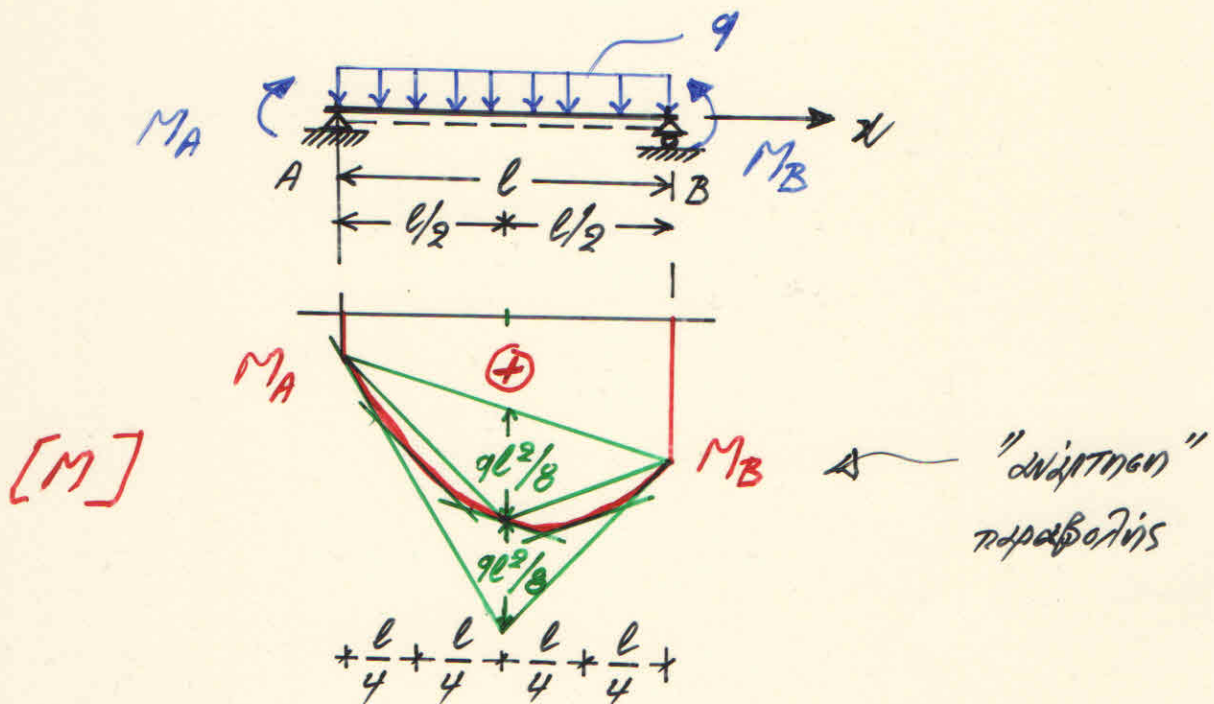


μεταβατικές  
συνθήκες

Από τις παραπάνω συνθήκες προκύπτουν τελικά οι τιμές για τις σταθερές ολοκλήρωσης και στη συνέχεια τα διαγράμματα Q και M,

$$c_1 = q_0 a, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{3}{4} q_0 a, \quad c_4 = -\frac{3}{2} q_0 \ell^2$$

Αντικείμενο Δοκίς με Συγκυρτωμένες Ροές στις Στοιζες:



- ισορροπία της δοκίς AB:

$$\sum M_{(B)} = 0 \leadsto -V_A l - M_A + \frac{q l^2}{2} + M_B = 0 \leadsto$$

$$\leadsto V_A \equiv Q_A = \frac{q l}{2} + \frac{M_B - M_A}{l}.$$

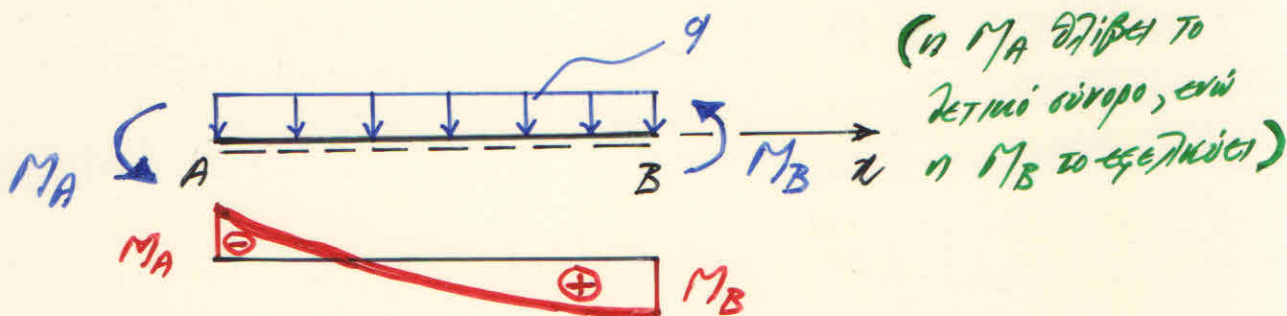
- Παράσταση τορμών για τον προσδιορισμό εσωτ. μεγεθών:

$$Q(x) = Q_A - q x \leadsto Q(x) = \frac{q l}{2} + \frac{M_B - M_A}{l} - q x,$$

$$M(x) = M_A + V_A x - \frac{q x^2}{2} \leadsto$$

$$M(x) = \left( M_A + \frac{M_B - M_A}{l} x \right) + \left( \frac{q l}{2} x - \frac{q x^2}{2} \right).$$

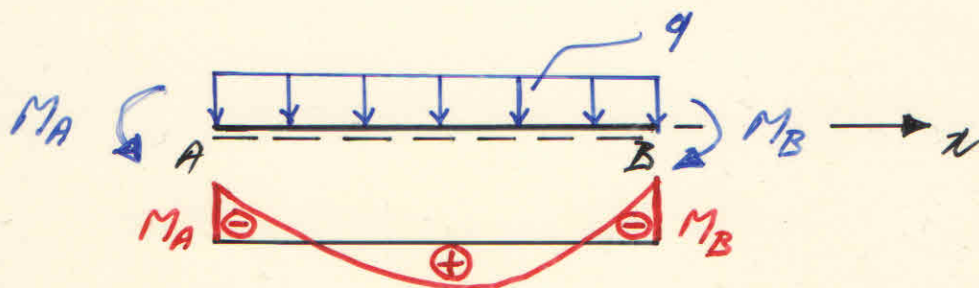
- Δικαίνηση - Απεντικές (αριθμούς το δετικό σύνορο) εξωτερικές Ροές :



Όταν η ροή  $M_A$  (ή η  $M_B$ ) αριθμεί το δετικό σύνορο της δομής, τότε η ροή κάμψης θα μυδενίζεται σε κάποιο σημείο της δομής. Ο προσδιορισμός του σημείου αυτού γίνεται από την εξίσωση

$$M(x) = 0 \rightarrow (-M_A + \frac{M_B + M_A}{l} x) + (\frac{q}{2} x - \frac{qx^2}{2}) = 0$$

$\rightarrow x = \dots$  με  $x \leq l$ .



Στην περίπτωση που και οι δύο εξωτερικές ροές  $M_A$  και  $M_B$  αριθμούν το δετικό σύνορο της δομής, τότε υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα:

(α) εμφάνιση δύο σημείων μυδενισμού της ροής κάμψης, (β) εμφάνιση ενός μόνου σημείου μυδενισμού (το διαχωριστικό  $[M]$  θα εξισωθεί τότε σε ένα σημείο του άξονα της δομής), και (γ) καμία σημείο μυδενισμού της ροής κάμψης.