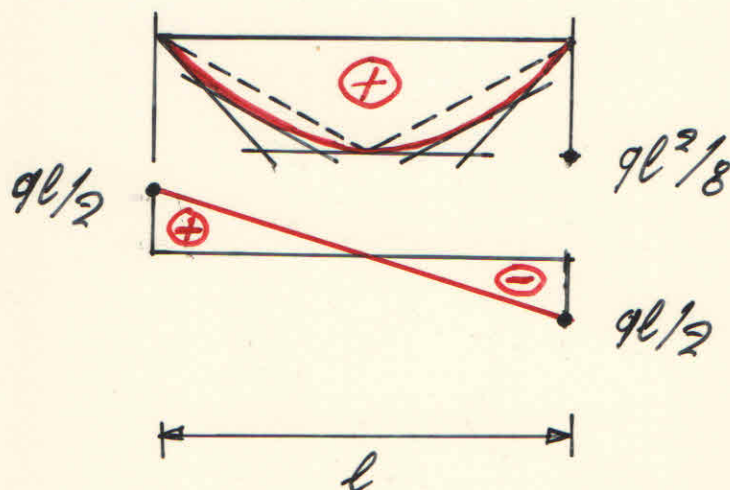
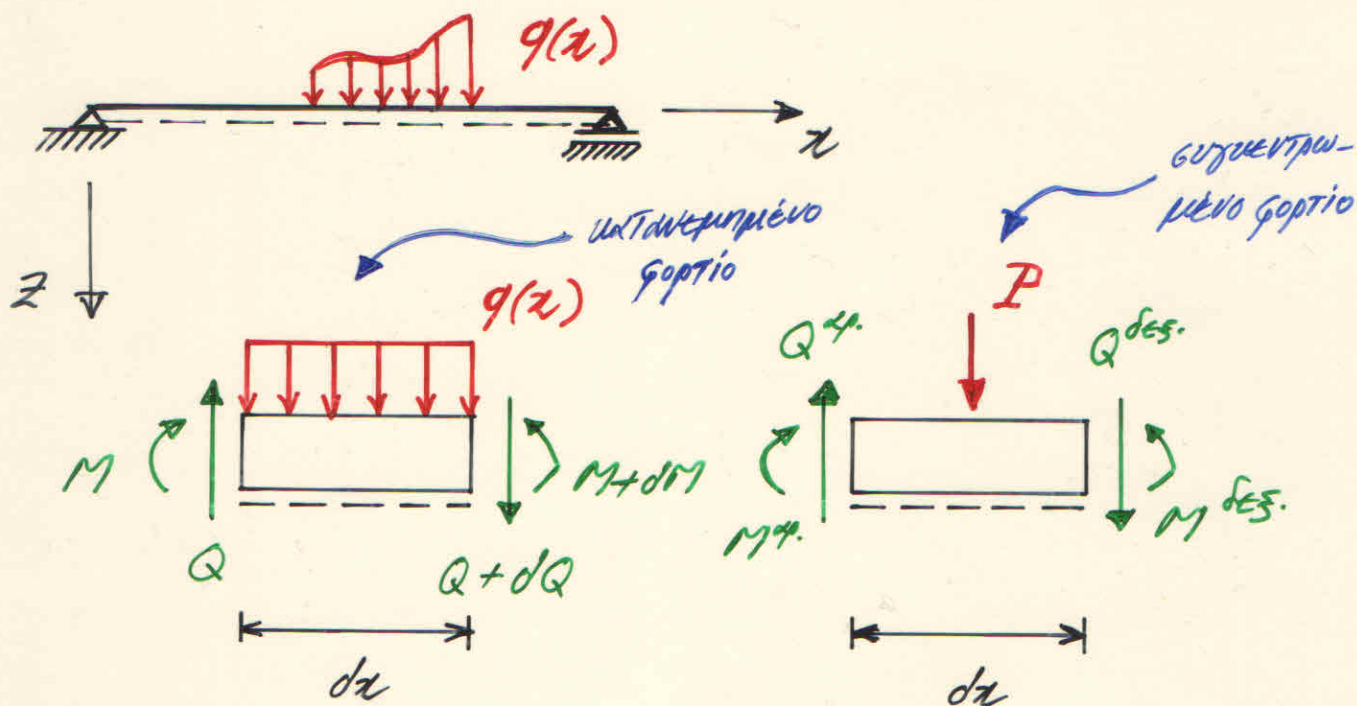


[M]

[Q]



Κατασκευασμένο γοπτίο - Σχέση μεταξύ των M, Q και q :



• Ισορροπία δυνάμεων: $\downarrow \sum F_z = 0 \rightarrow -Q + qdx + Q + dQ = 0$
 $\rightarrow \frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (1)$

• Ισορροπία ροπών: $\curvearrowright \sum M_{συνιστ(χ+dx)} = 0 \rightarrow -M - Qdx + M + dM = 0$
 (ο όρος $(qdx) \frac{dx}{2}$ παραλείπεται ως πολύ μικρότερος) $= 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{dM}{dx} = Q. \quad (2)$$

$$\text{Εξισώσεις (1) και (2)} \rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x). \quad (3)$$

Οι Εξ. (1) και (2) μπορούν να ολοκληρωθούν δίνοντας

$$Q(x) = Q(0) - \int_0^x q(\xi) d\xi, \quad (4)$$

$$M(x) = M(0) + \int_0^x Q(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Από τις Εξ. (4) και (5) μπορούμε επίσης να έχουμε

$$\Delta Q = -\int q(x) dx, \text{ δηλ. (αλλαγή στην τέμνουσα) = -}$$

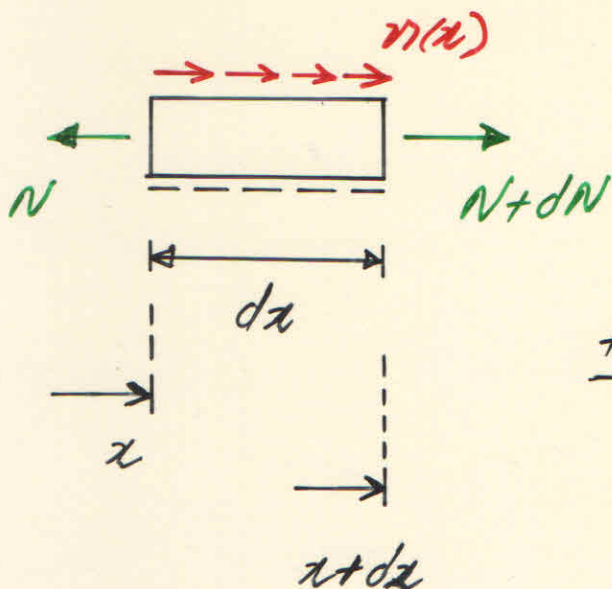
$$- (\text{εμβαδόν περιοχής κάτω από το κατανεμημένο φορτίο}),$$

και

$$\Delta M = \int Q(x) dx, \text{ δηλ. (αλλαγή στην ροπή κάμψης) =}$$

$$= (\text{εμβαδόν περιοχής κάτω από το διάγραμμα της τέμνουσας δύναμης}).$$

Περίπτωση κεντρίμενου υδατοσυμπιεμένου φορτίου $n(x)$:



$n(x)$: εφαιπόμεννη γόρτικη
(υδρά του άξονα του γόρδα)

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0 \leadsto -N + n dx + (N + dN) = \\ &= 0 \leadsto \frac{dN}{dx} = -n(x). \end{aligned} \quad (6)$$

- Όλες οι προηγούμενες διαδομικές εφισώρες θα γανούν πολύ χρίσιμες στην υδατομενί και του έλεγχου των διαγράμμάτων M, Q, N .

Περίπτωση συγκεντρωμένου φορτίου:

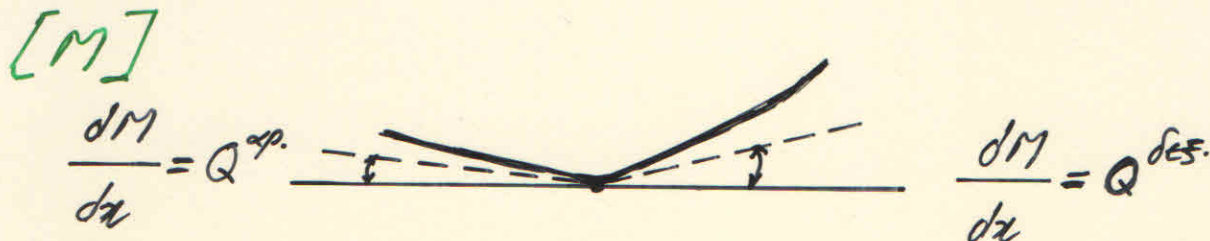
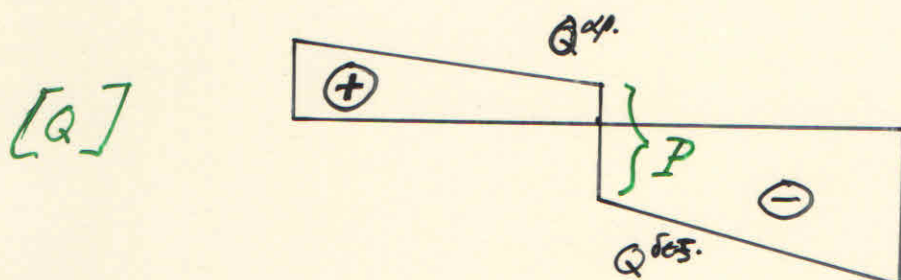
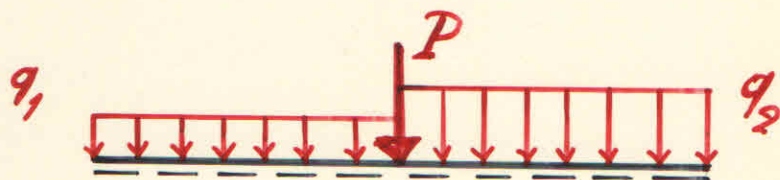
Αναγερόμενοι σε προηγούμενο σχήμα, λαμβάνουμε

$$\rightarrow \sum F_z = 0 \leadsto -Q^{ap} + P + Q^{des} = 0 \leadsto Q^{des} = Q^{ap} - P. \quad (7)$$

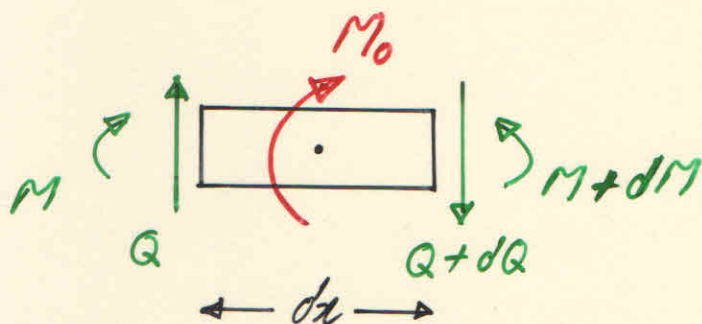
Επομένως, το διαγράμμα τεμνοτικών δυνάμεων θα παρουσιάζει δυνέχεια (άλμα) στις θέσεις συγκεντρωμένων φορτίων. Από την Εξ. (2) συνάχεται επίσης ότι και η ωλίση του διαγράμματος ρομών θα παρουσιάζει δυνέχεια στις θέσεις των συγκεντρωμένων φορτίων.

Επομένως, η παράγωγος σε αυτές τις θέσεις δεν έχει νόημα.
Ευατέρωθεν όμως του συγκεντρωμένου φορτίου θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{dM}{dx} = Q^{ap.} \quad \text{και} \quad \frac{dM}{dx} = Q^{δες.} = Q^{ap.} - P. \quad (8α, β)$$



Περίπτωση συγκεντρωμένου ροπής :



$$\sum M = 0 \rightarrow$$

$$\Delta M = M_0. \quad (9)$$

Εάν η εξωτερική, συγκεντρωμένη ροπή M_0 είναι $\Sigma \Delta^o$ τότε η αλλαγή στην ροπή κάμψης είναι θετική (με αντίστοιχο άρθρο στο σχετικό διάγραμμα). Εάν η M_0 είναι $\Delta \Delta^o$, αντίθετως.

Διερώνηση :

Από τις βασικές σχέσεις $\frac{dQ}{dx} = -q(x)$, $\frac{dM}{dx} = Q(x)$

εξάγονται τα εξής συμπεράσματα :

- Σε αξόρτιστο τμήμα δοκού ($q=0$), η τέμνουσα δύναμη δεν μεταβάλλεται, ενώ η ροπή κάμψης μεταβάλλεται γραμμικά :

$$Q = C_1, \quad M(x) = C_1 x + C_2.$$

- Όταν τμήμα της δοκού φορτίζεται με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q_0 , τότε

$$Q(x) = -q_0 x + C_1, \quad M(x) = -\frac{q_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

- Όταν η τέμνουσα ή η ροπή κάμψης είναι γνωστές στην θέση x_1 , τότε τα μεγέθη αυτά υπολογίζονται στην θέση x_2 ως ακολούθως

$$Q(x_2) = Q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx,$$

$$M(x_2) = M(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx.$$

- Όταν η τέταρτη δύναμη μικτοποιείται σε συγκεκριμένη θέση, τότε η ποσότητα ενέργειας παρουσιάζει αυξήματα στην ίδια θέση:

$$Q=0 \Rightarrow \frac{dM}{dx}=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{εάν } \frac{d^2M}{dx^2} < 0 \rightarrow \max M, \\ \text{εάν } \frac{d^2M}{dx^2} > 0 \rightarrow \min M. \end{array} \right.$$