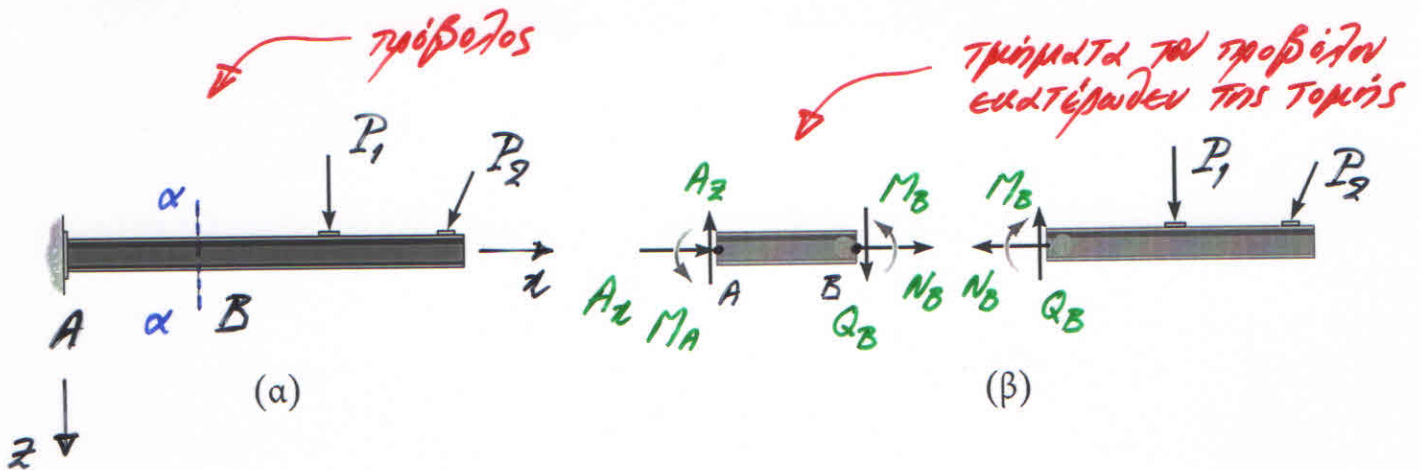


Εσωτερικά Εντατικά Μεγέθη (Δυνάμεις και Ροπές) σε Ομόωπους Φορείς (Δοκούς και Πλάγια):

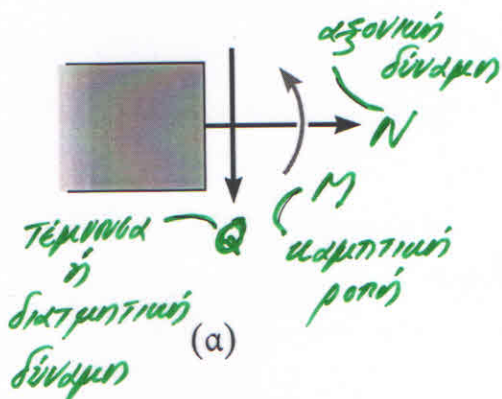


ισορροπία των τμημάτων της τομής:

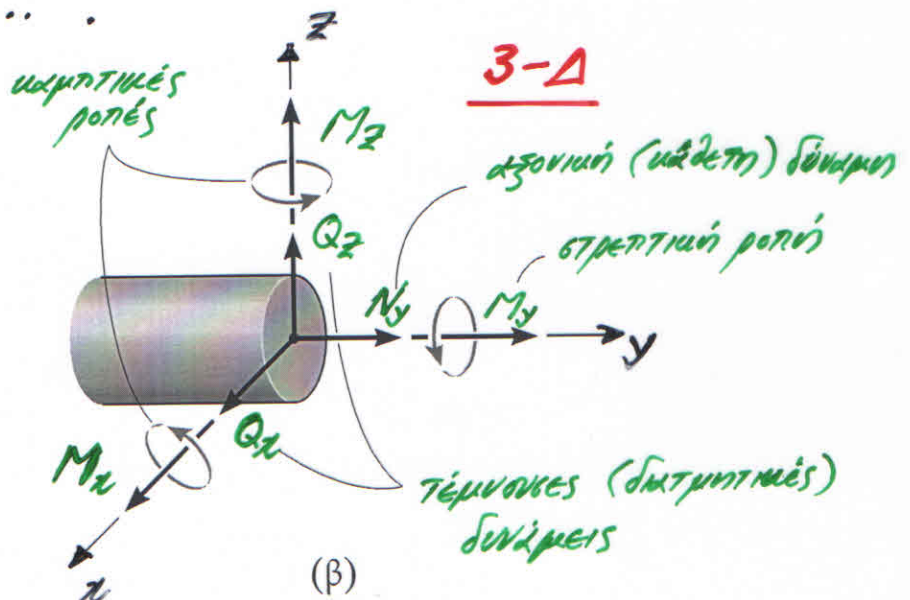
$$\sum F_x = 0 \leadsto N_B = \dots, \quad \sum F_z = 0 \leadsto Q_B = \dots,$$

$$\sum M_B = 0 \leadsto M_B = \dots$$

2-Δ



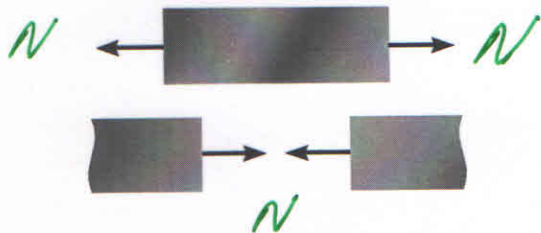
3-Δ



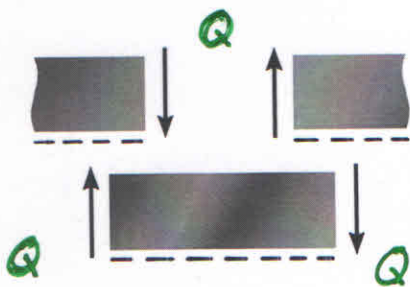
(2-διάστατη κατάσταση)

(3-διάστατη κατάσταση)

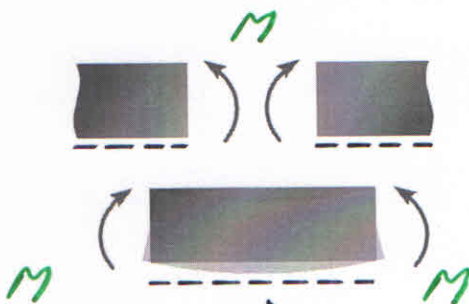
Θετική προσήμανση για εσωτερικές δυνάμεις και πορές σε δύο διατάξεις :



Θετικές εσωτερικές δυνάμεις



Θετικές τέμνουσες δυνάμεις

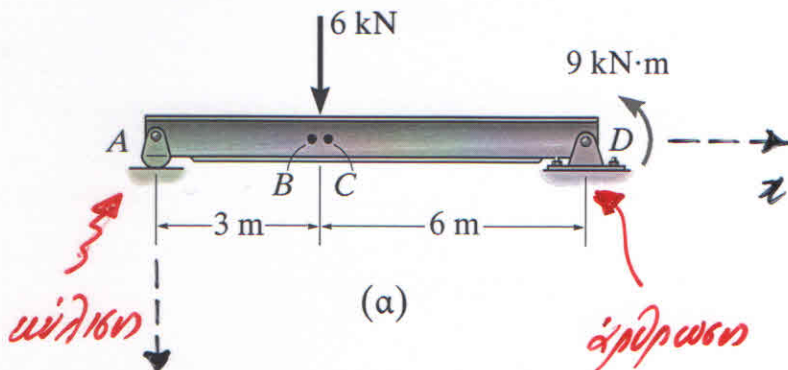


Θετικές πορές κάμψης

Θετικό σύνορο του γοφού

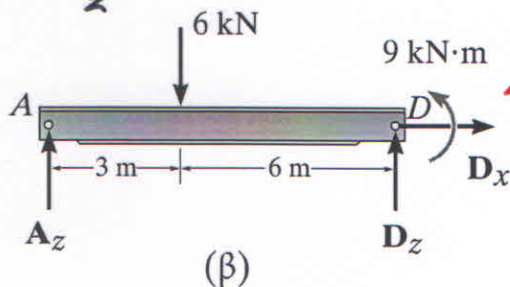
- Οι εσωτερικές δυνάμεις και πορές μεταβάλλονται κατά μέγεθος και διεύθυνση, κατά μήκος του γοφού.
- Εάν υπολογισθεί η συνισταμένη των δυνάμεων και η συνισταμένη των πορών σε κάθε διατομή του γοφού, τότε μπορεί να προσδιοριστεί (σε δεύτερη φάση) η κατάνομή των τάσεων μέσα στην διατομή.
- Η γνώση των τάσεων επιτρέπει την διαστασιολόγηση του μέλους της κατασκευής και τον έλεγχο της ακεραιότητάς του.

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστούν τα εσωτερικά εντάσιμα μεγέθη (δυνάμεις και ροπές) στα σημεία B και C, διατ. αριθμός εντάσεων των σημείων εφαρμογής του φορτίου των 6 kN.

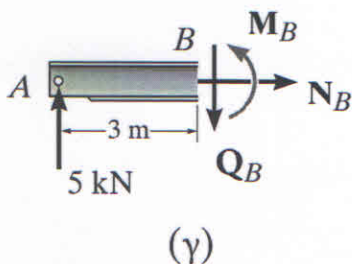


ισορροπία των όλων φορέα:

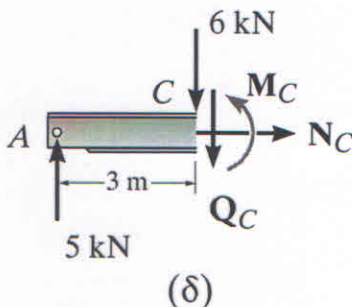
$$\begin{aligned} \circlearrowleft + \sum M_D = 0 &\leadsto 9 \text{ kN}\cdot\text{m} + \\ &+ (6 \text{ kN})(6 \text{ m}) - A_z(9 \text{ m}) = 0 \\ &\leadsto A_z = 5 \text{ kN}. \end{aligned}$$



τμήμα AB:



$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0 &\leadsto N_B = 0, \\ + \downarrow \sum F_z = 0 &\leadsto Q_B - 5 \text{ kN} = 0 \leadsto Q_B = 5 \text{ kN}, \\ \circlearrowleft + \sum M_B = 0 &\leadsto -(5 \text{ kN})(3 \text{ m}) + M_B = 0 \leadsto \\ &\leadsto M_B = 15 \text{ kN}\cdot\text{m}. \end{aligned}$$

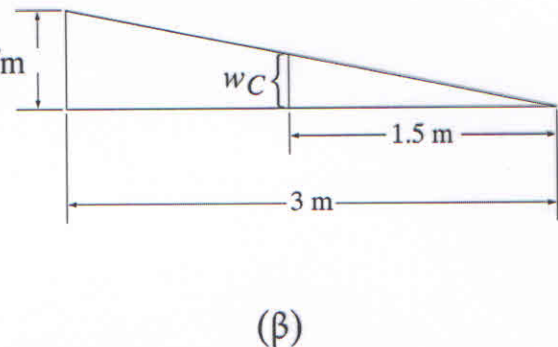
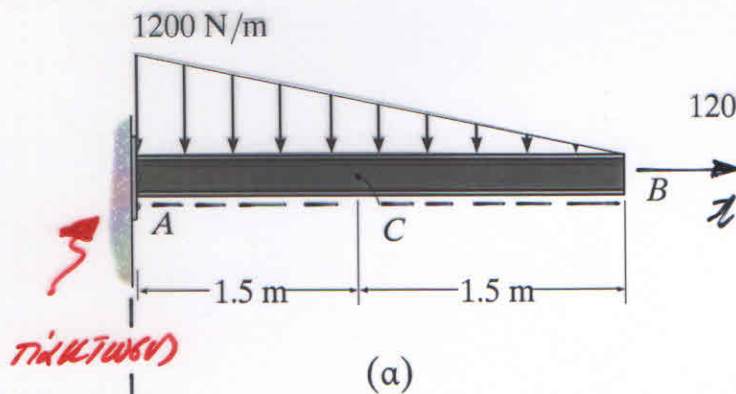


τμήμα AC:

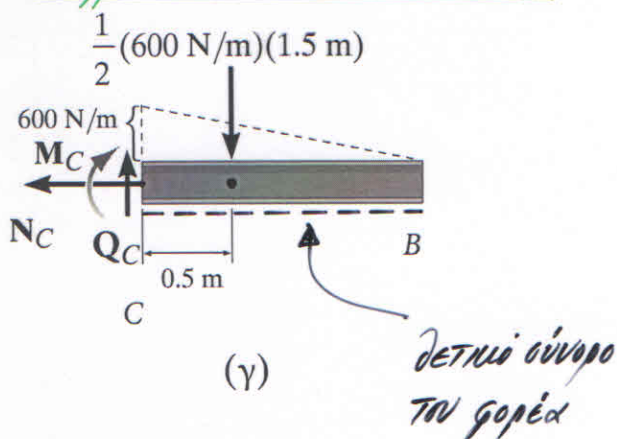
$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0 &\leadsto N_C = 0, \\ + \downarrow \sum F_z = 0 &\leadsto Q_C + 6 \text{ kN} - 5 \text{ kN} = 0 \leadsto \\ &\leadsto Q_C = -1 \text{ kN}, \\ \circlearrowleft + \sum M_C = 0 &\leadsto -(5 \text{ kN})(3 \text{ m}) + M_C = 0 \leadsto \\ &\leadsto M_C = 15 \text{ kN}\cdot\text{m}. \end{aligned}$$

Η τέμνουσα δύναμη παρουσιάζει ασυνέχεια (άλλα) στο σημείο εφαρμογής του εσωτερικού φορτίου.

Παράδειγμα 2: Να υπολογισθούν τα εσωτερικά εντάσιμα μεγέθη (δυνάμεις και ροπή) στο σημείο C των προβόλων.



Ισορροπία τμήματος BC:



Σημείωση: Δεν χρειάζεται να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως (στο A) εφόσον αρκεί να θεωρήσουμε την ισορροπία του τμήματος BC.

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow N_C = 0,$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow -Q_C + \frac{1}{2} \left(600 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (1.5 \text{ m}) = 0 \rightarrow Q_C = 450 \text{ N},$$

$$\curvearrowright + \sum M_C = 0 \rightarrow -M_C - \frac{1}{2} \left(600 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (1.5 \text{ m}) (0.5 \text{ m}) = 0 \rightarrow$$

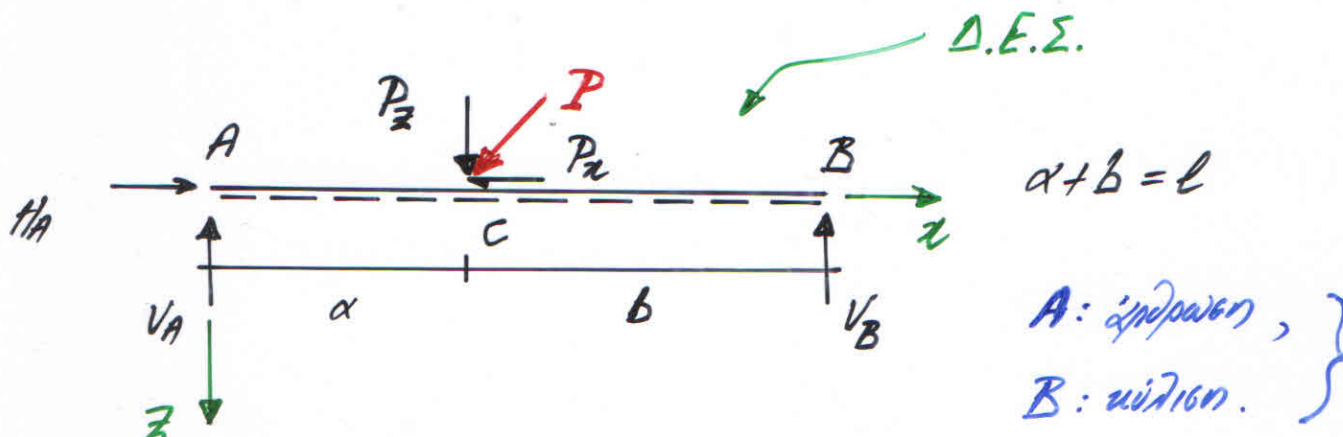
$$\rightarrow M_C = -225 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Σημείωση: Το αρνητικό πρόσημο στην τιμή της ροπής κάμψης που αναπτύσσεται στην διατομή C σημαίνει ότι αυτή θα έχει τελικά αντίθετο γορά από αυτόν που φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, το κάτω (δετικό) σύνορο του γορέα θα υλιβεται στην πραγματικότητα.

Διαγράμματα των Εντατικών Μεγεθών - Μεταβολή των M, Q, N :

- Τα μεγέθη M, Q, N αναγράφονται σε συγκεκριμένη διάταξη, που απέχει π.χ. απόσταση x (δεδωμένη απόσταση) από την επιρροή προς τα αριστερά της διάταξης.
- Μπορούμε να υπολογίσουμε τα εντατικά μεγέθη σε κάθε διάταξη και να εστιάσουμε αναλυτικά τις σχέσεις που δίνουν την μεταβολή τους συνάρτηση της απόστασης x .
- Η γραμμή παράστασης των μεταβολών των μεγεθών αυτών κατά μήκος του φορέα διευκολύνει τους υπολογισμούς καθώς και παρέχει άμεση εποπτεία του τρόπου μετασχηματισμού του φορέα στο σύνολό του.
- Οι μεταβολές αυτές παρίστανται με γραμμάκια στα αντίστοιχα διαγράμματα ροπών κάμψης (Δ.Ρ.Κ.), τριγωνικών συνάρσεων (Δ.Τ.Δ.), και ζωνικών συνάρσεων (Δ.Α.Δ.). Τα διαγράμματα αυτά έχουν άξονα αναφοράς οριζώντιο παράλληλο προς τον άξονα του φορέα (άξονα τετραγώνων) και έχουν τεταγμένες κάθετες στον άξονα αναφοράς. Οι τεταγμένες παρίσταντο το αντίστοιχο εντατικό μέγεθος υπό κλίμακα.

Παράδειγμα 1: Να προσδιορισθούν οι ανώτατες ευγράβες των εσωτερικών εντατικών μεγεθών και να κατασκευασθούν τα σχετικά διαγράμματα για την περίπτωση αμφιέριστης δοκού από κεκλιμένο, συγκεντρωμένο φορτίο.



• Ισορροπία του ίδιου φορέα:

$$\sum M_A = 0 \leadsto V_B l - P_2 \alpha = 0 \leadsto V_B = \frac{\alpha}{l} P_2,$$

$$\sum F_z = 0 \leadsto -V_A - V_B + P_2 = 0 \leadsto V_A = \frac{b}{l} P_2,$$

$$\sum F_x = 0 \leadsto H_A - P_2 = 0 \leadsto H_A = P_2.$$

• Ποές ενέργειας:

Ενότητα AC, $M(x) = V_A x = \frac{b}{l} P_2 x$ (γραμμική συνάρτηση),

για $x=0 \leadsto M(x=0) = M_A = 0,$

για $x=\alpha \leadsto M(x=\alpha) = M_C = \frac{\alpha b}{l} P_2,$

τμήμα CB: $M(x) = V_A x - P_2 (x - \alpha) = \frac{P_2 \alpha}{l} (l - x)$

(χρήσιμος ενδεχόμεν),

για $x = l \rightarrow M_B = 0$, για $x = \alpha \rightarrow M_C = \frac{\alpha b}{l} P_2$.

Παρατήρηση: Η μέγιστη ποσότητα ενέργειας εφδωγεται στο σημείο εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου.

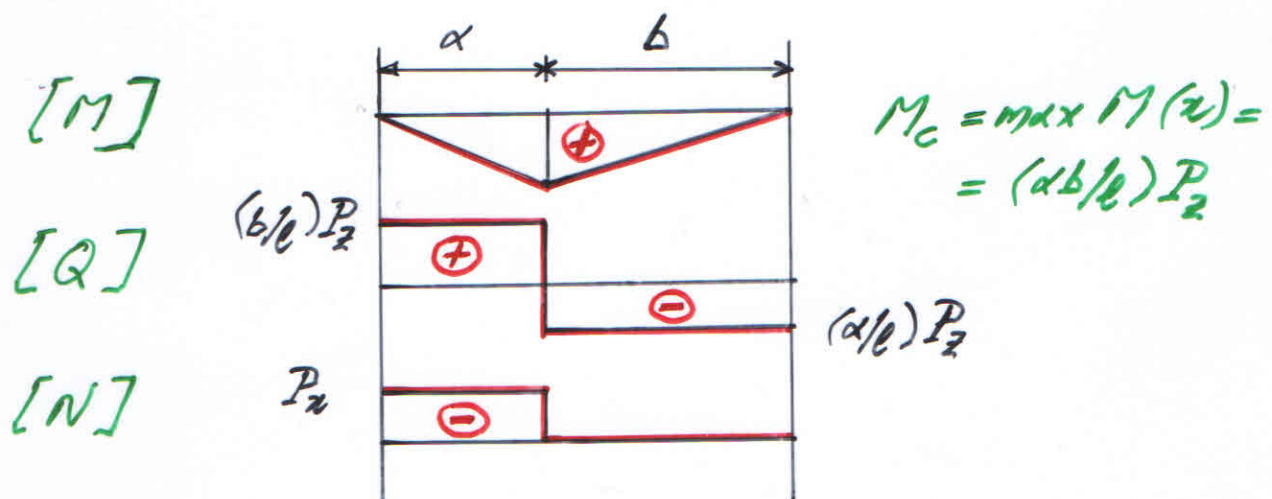
• Τέχνικες Συναρτήσεις:

Τμήμα AC, $Q(x) = V_A = \frac{b}{l} P_2 = \text{const.}$,

για $x = 0 \rightarrow Q_A = \frac{b}{l} P_2$, για $x = \alpha \rightarrow Q_C^{\text{αφ.}} = \frac{b}{l} P_2$.

τμήμα CB, $Q(x) = V_A - P_2 = -\frac{\alpha}{l} P_2 = \text{const.}^*$,

για $x = \alpha \rightarrow Q_C^{\text{αφ.}} = -\frac{\alpha}{l} P_2$, για $x = l \rightarrow Q_B = -\frac{\alpha}{l} P_2$.



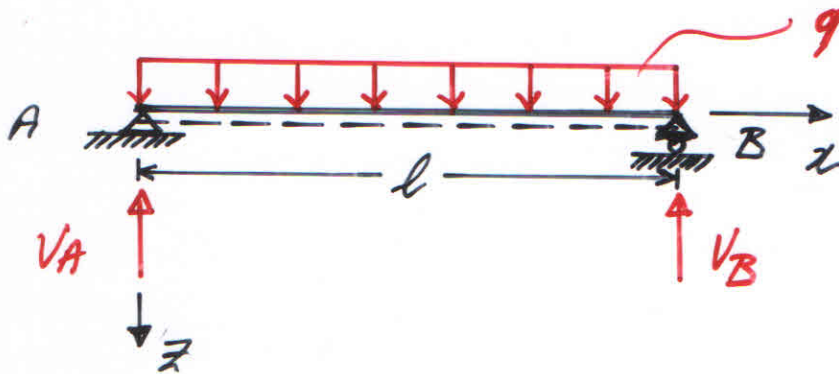
- Αξονικές δυνάμεις:

τμήμα AC, $N(x) = -H_A = -P_x = \text{const.}$,

για $x=l \rightarrow N_C^{\text{αφ.}} = -P_x$ ενώ $N_C^{\text{δεξ.}} = 0$.

τμήμα CB, $N(x) = -H_A + P_x = 0$.

Παράδειγμα 2: Να προσδιοριστούν οι αναλυτικές εκφράσεις των εσωτερικών ελαστικών μεγεθών και να υπολογιστούν τα σχετικά διαγράμματα για την περίπτωση αμεγέθυνσης δυνάμευ υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο.



- Ισορροπία των όρων φορτία:

$$\hookrightarrow + \sum M_B = 0 \rightarrow -V_A l + q l \frac{l}{2} = 0 \rightarrow V_A = \frac{q l}{2},$$

$$+ \downarrow \sum F_z = 0 \rightarrow -V_A - V_B + q l = 0 \rightarrow V_B = \frac{q l}{2}.$$

- Ποιές ενέργειες:

$$M(x) = V_A x - (qx) \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2} x (l-x)$$

(παραβολική συνάρτηση),

για $x=0 \rightarrow M_A=0$, για $x=l \rightarrow M_B=0$.

Η μέγιστη τιμή της $M(x)$ εμφανίζεται στην θέση όπου

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \rightarrow \frac{q}{2} l - qx = 0 \rightarrow x = \frac{l}{2}, \text{ ενώ}$$

$$\max M(x) = M(x = \frac{l}{2}) = \frac{ql^2}{8}.$$

- Τέμνουσες συνιστώσες:

$$Q(x) = V_A - qx = \frac{ql}{2} - qx = q \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

(γραμμική συνάρτηση),

$$\text{για } x=0 \rightarrow Q_A = \frac{ql}{2}, \text{ για } x=l \rightarrow Q_B = -\frac{ql}{2},$$

$$\text{για } x = \frac{l}{2} \rightarrow Q(l/2) = 0.$$

- Αξονικές συνιστώσες: μηδενικές σε όλα τα σημεία της δοκού.