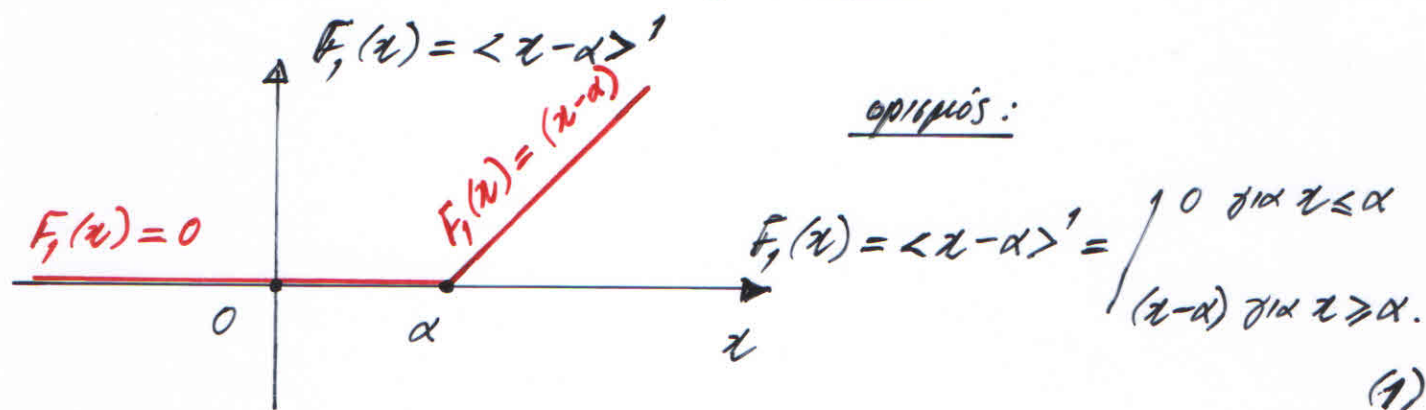


## Συναρτήσεις Macaulay-Föppl και Ιδιότητες (Γενικευμένες) Συναρτήσεις:

- Οι συναρτήσεις Macaulay-Föppl έχουν εισαχθεί για την αναπαράσταση συναρτήσεων που "εκκινούν" από κάποιο συγκεντρωμένο σημείο (έστω  $x = \alpha$ ), ενώ λαμβάνουν την τιμή μηδέν για τιμές του  $x$  μικρότερες από το  $\alpha$ . Οι ιδιότητες συναρτήσεων έχουν εισαχθεί για την αναπαράσταση συγκεντρωμένων φορτίων και ροπών, φορτίσεις που προσεγγίζουν "διεισρομούς" σε ορισμένα επιτακτικά μεγέθη.
- Οι ανωτέρω συναρτήσεις δενεωλύουν σημαντικά τον προσδιορισμό των εσωτερικών επιτακτικών μεγεθών σε περιπτώσεις αδυναμειών και "αλμάτων" στην φόρτιση.

### Παράδειγμα συνάρτησης Macaulay-Föppl



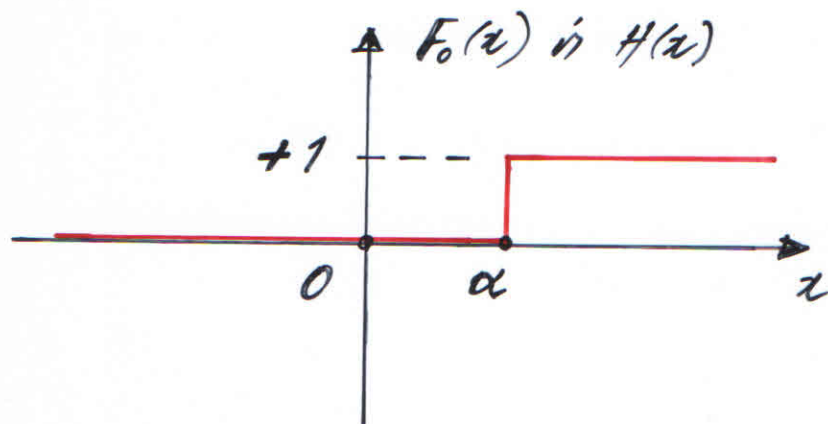
Γενικεύοντας, έχουμε τον ορισμό

$$F_n(x) = \langle x - \alpha \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{για } x \leq \alpha \\ (x - \alpha)^n & \text{για } x \geq \alpha, \text{ με } n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Στην περίπτωση  $n=0$ , λαμβάνουμε την λεγόμενη μοναδιαία βηματική συνάρτηση (γνωστή στην βιβλιογραφία και ως συνάρτηση Heaviside)

$$F_0(x) = \langle x - \alpha \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{για } x \leq \alpha \\ 1 & \text{για } x \geq \alpha \end{cases}, \quad (3)$$

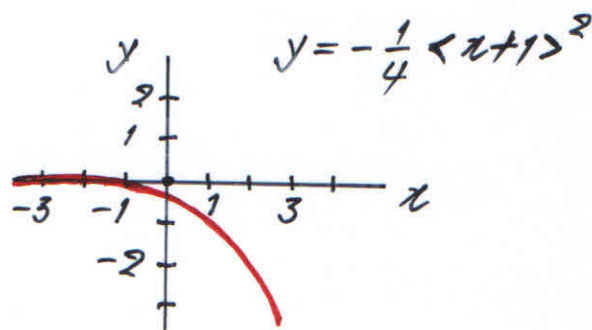
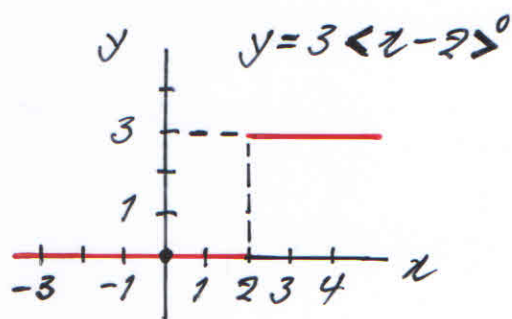
η οποία παρουσιάζει συνέχεια στην θέση  $x = \alpha$

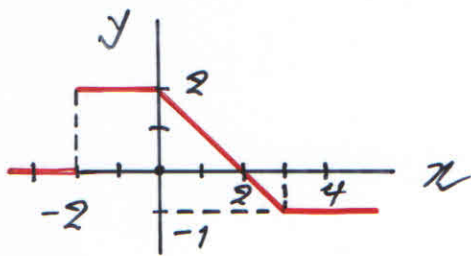


Οι συναρτήσεις Maclay-Föppel αντίστοιχες τάξεως ( $n \geq 1$ ) μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια της βηματικής συνάρτησης ( $n=0$ ) ως εξής

$$F_n(x) = \langle x - \alpha \rangle^n = (x - \alpha)^n \langle x - \alpha \rangle^0 = (x - \alpha)^n H(x - \alpha). \quad (4)$$

Παραδείγματα:





$$y = 2 \langle x+2 \rangle^0 - \langle x \rangle^1 + \langle x-3 \rangle^1$$

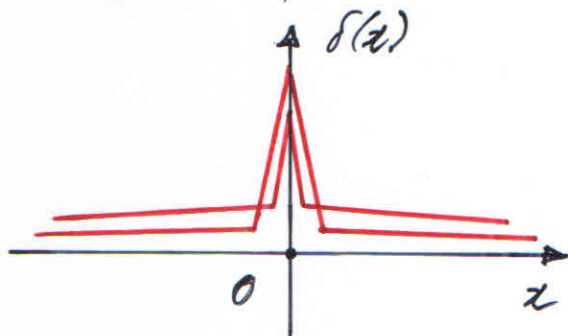
Ιδιότητες συναρτήσεων (singular functions):

ορισμός

$$F_n(x) = \langle x-\alpha \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{για } x \neq \alpha \\ \pm \infty & \text{για } x = \alpha \end{cases} \quad \text{με } n = -1, -2, -3, \dots \quad (5)$$

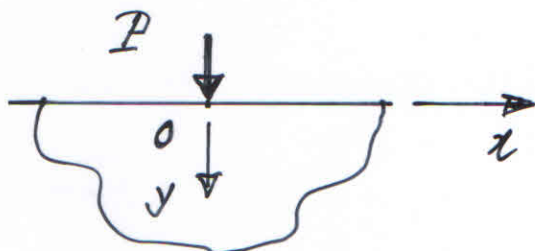
παράδειγμα

Ιδιότητα συναρτήσεων δύναµη Dirac  $\delta(x) = \langle x \rangle^{-1}$



$$\delta(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

Τάση στην επιφάνεια ηµι-χώρου από συγκεντρωµένη δύναµη



$$\begin{aligned} \text{υάδην Τάση} &= - \frac{\text{φόρτιο}}{\text{επιφάνεια επιρροής}} \rightarrow - \frac{P}{0} = \\ &= -P \cdot \delta(x) \quad \text{για } -\infty < x < \infty, y=0 \end{aligned}$$

(η δύναµη  $P$  έχει διαστάσεις [δύναµη][µήκος] $^{-1}$ ,  
η συνάρτηση  $\delta$  έχει διαστάσεις [µήκος] $^{-1}$ ).

- Ολοκλήρωση συναρτήσεων Macaulay-Föppl

$$\int_{-\infty}^x \langle \tau - \alpha \rangle^n d\tau = \frac{\langle x - \alpha \rangle^{n+1}}{n+1} \quad \text{για } n \geq 0. \quad (7)$$

- Ολοκλήρωση ιδιόμορφων συναρτήσεων

$$\int_{-\infty}^x \langle \tau - \alpha \rangle^n d\tau = \langle x - \alpha \rangle^{n+1} \quad \text{με } n = -1, -2, -3, \dots, \quad (8)$$

δηλ.  $\int_{-\infty}^x F_n d\tau = F_{n+1} \quad \text{με } n = -1, -2, -3, \dots$

παραδείγματα :

$$\int_{-\infty}^x \langle \tau - \alpha \rangle^{-2} d\tau = \langle x - \alpha \rangle^{-1}, \quad \int_{-\infty}^x \langle \tau - \alpha \rangle^{-1} d\tau = \langle x - \alpha \rangle^0,$$

ή  $\int \langle x - \alpha \rangle^{-2} dx = \langle x - \alpha \rangle^{-1} + \text{σταθ.}, \quad \int \langle x - \alpha \rangle^{-1} dx = \langle x - \alpha \rangle^0 + \text{σταθ.},$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1, \quad \text{ενώ} \quad \delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$$

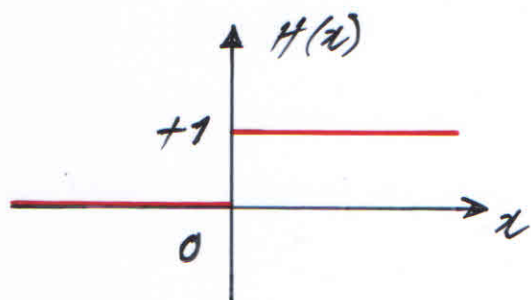
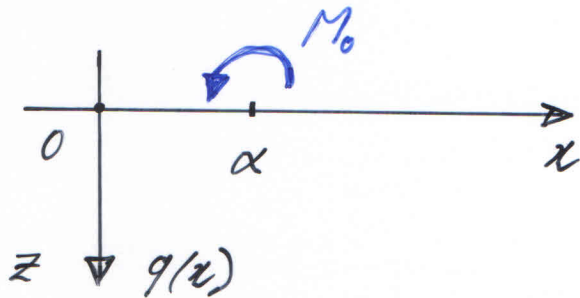




Table 7-1 Discontinuity functions

|                       | Name                        | Definition  | Graph | Derivative and integral   |
|-----------------------|-----------------------------|---|-------|---|
| Singularity functions | Unit doublet function       | $F_{-2} = \langle x - a \rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \pm \infty & x = a \end{cases}$                        |       | $\int_{-\infty}^x F_{-2} dx = F_{-1}$   |
|                       | Unit impulse function       | $F_{-1} = \langle x - a \rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ +\infty & x = a \end{cases}$                           |       | $\int_{-\infty}^x F_{-1} dx = F_0$  |
| Macaulay functions    | Unit step function          | $F_0 = \langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$                                    |       | $\int_{-\infty}^x F_0 dx = F_1$   |
|                       | Unit ramp function          | $F_1 = \langle x - a \rangle^1 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ x - a & x \geq a \end{cases}$                                |       | $\frac{d}{dx} F_1 = F_0$<br>$\int_{-\infty}^x F_1 dx = \frac{F_2}{2}$   |
|                       | Unit second-degree function | $F_2 = \langle x - a \rangle^2 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x - a)^2 & x \geq a \end{cases}$                            |       | $\frac{d}{dx} F_2 = 2F_1$<br>$\int_{-\infty}^x F_2 dx = \frac{F_3}{3}$  |
|                       | General Macaulay function   | $F_n = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x - a)^n & x \geq a \end{cases}$<br>$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ |       | $\frac{d}{dx} F_n = nF_{n-1}$<br>$n = 1, 2, 3, \dots$<br>$\int_{-\infty}^x F_n dx = \frac{F_{n+1}}{n+1}$<br>$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ |

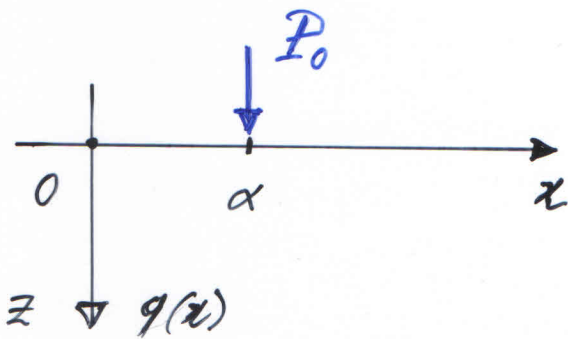
Φορτία σε Δομείς - Χρήση Ισοδύναμων Συνφορτίσεων  
και Συνφορτίσεων Macaulay-Föppl:



εστιασμένη ροπή

$$q(x) = M_0 \langle x - \alpha \rangle^{-2}$$

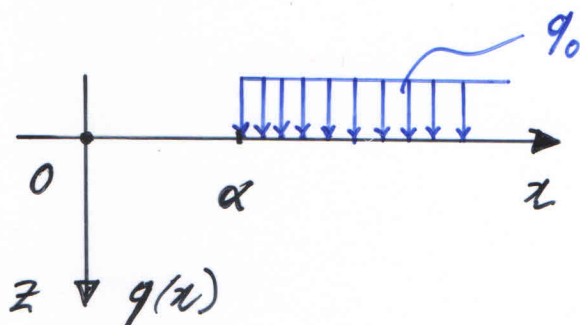
$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= -M_0 \langle x - \alpha \rangle^{-1}, \\ M(x) &= -M_0 \langle x - \alpha \rangle^0. \end{aligned} \right\}$$



εστιασμένη δύναμη

$$q(x) = P_0 \langle x - \alpha \rangle^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= -P_0 \langle x - \alpha \rangle^0, \\ M(x) &= -P_0 \langle x - \alpha \rangle^1. \end{aligned} \right\}$$

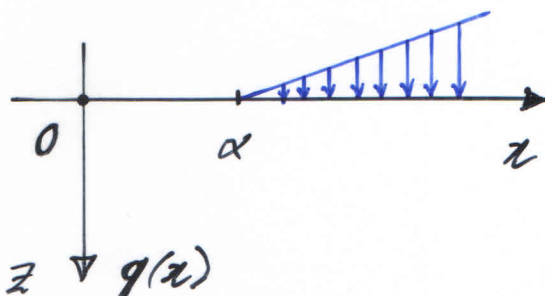


ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο

$$q(x) = q_0 \langle x - \alpha \rangle^0$$

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= -q_0 \langle x - \alpha \rangle^1, \\ M(x) &= -q_0 \frac{\langle x - \alpha \rangle^2}{2}. \end{aligned} \right\}$$

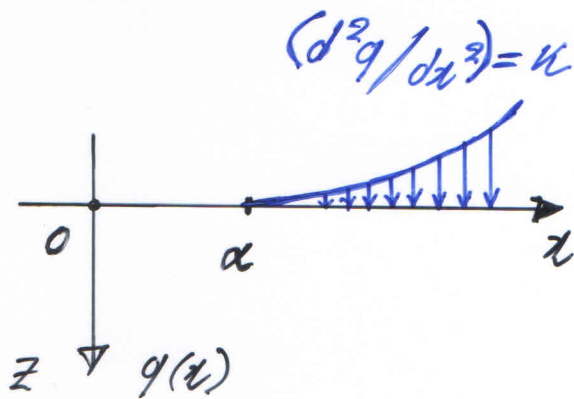
$$(dq/dx) = \lambda$$



τριγωνικό (χαρμυνικό) κατανεμημένο φορτίο

$$q(x) = \lambda \langle x - \alpha \rangle^1$$

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= \frac{-\lambda}{2} \langle x - \alpha \rangle^2, \\ M(x) &= -\frac{\lambda}{6} \langle x - \alpha \rangle^3. \end{aligned} \right\}$$



Παραβολική κατανεμημένη φόρτιση

$$q(x) = \frac{\kappa}{2} \langle x - \alpha \rangle^2$$

$$Q(x) = \frac{-\kappa}{6} \langle x - \alpha \rangle^3,$$

$$M(x) = -\frac{\kappa}{24} \langle x - \alpha \rangle^4.$$

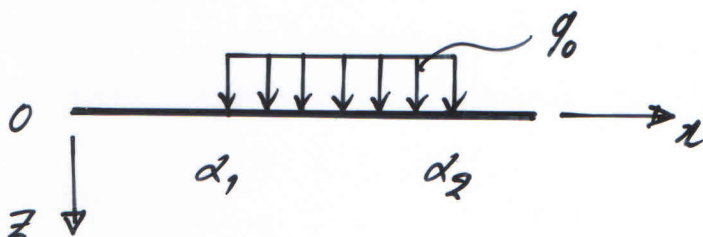
- Για τον συχαιτισμό των  $q(x)$ ,  $Q(x)$  και  $M(x)$  χρησιμοποιούνται οι εξής γενικές σχέσεις

$$Q(x_2) = Q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} q(\tau) d\tau,$$

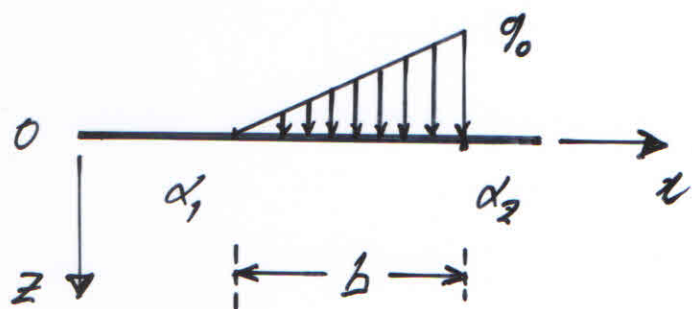
$$M(x_2) = M(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} Q(\tau) d\tau,$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM}{dx} = Q(x).$$

Παραδειγματά φορτίσεων:

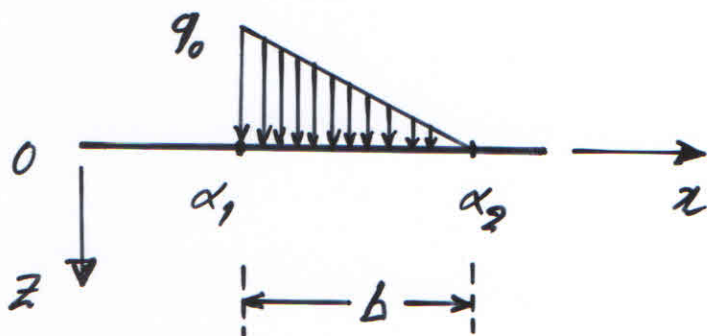


$$q(x) = q_0 \langle x - \alpha_1 \rangle^0 - q_0 \langle x - \alpha_2 \rangle^0.$$



$$\frac{q_0}{b} = \lambda$$

$$q(x) = \frac{q_0}{b} \langle x - \alpha_1 \rangle^1 - \frac{q_0}{b} \langle x - \alpha_2 \rangle^1 - q_0 \langle x - \alpha_2 \rangle^0.$$



$$q(x) = q_0 \langle x - \alpha_1 \rangle^0 - \frac{q_0}{b} \langle x - \alpha_1 \rangle^1 + \frac{q_0}{b} \langle x - \alpha_2 \rangle^1.$$



Στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα τε-  
μνουσών είναι ασυνεχές και εμφανίζει στη  
θέση  $x = a$  άλμα κατ' απόλυτη τιμή ίσο προς  
το φορτίο  $F$ :

$$Q^+ = Q^- - \langle x - a \rangle^0 F$$

Αντίστοιχα το διάγραμμα ροπών κάμψης εμ-  
φανίζει στη θέση εφαρμογής του συγκε-  
ντρωμένου φορτίου ασυνέχεια στη κλίση  
του:

$$\frac{dM}{dx} \Big|_{x^-} = Q^-, \quad \frac{dM}{dx} \Big|_{x^+} = Q^+$$

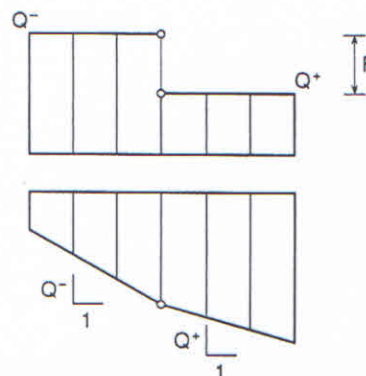
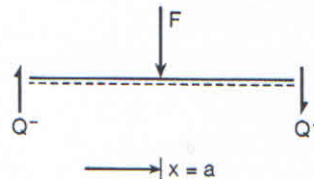
Επειδή δε,  $M = \int Q dx$ , η ροπή κάμψης στο  
σημείο  $x = a$  είναι συνεχής.

Η περίπτωση τώρα της φόρτισης του φορέα  
από μία συγκεντρωμένη ροπή έντασης  $M_0$   
στη θέση  $x = a$  προσεγγίζεται από ένα ζεύ-  
γος δυνάμεων  $\{F, -F\}$ , που ασκούνται σε μι-  
κρή απόσταση  $s$  μεταξύ τους. Στο όριο  
 $s \rightarrow 0$  (με  $M_0 = Fs = \text{σταθ.}$ ) το διάγραμμα τε-  
μνουσών εμφανίζει στη θέση  $x = a$  μία ιδιο-  
μορφία ( $Q \rightarrow -\infty$ )

$$Q = Q_0 - \delta(x - a) M_0$$

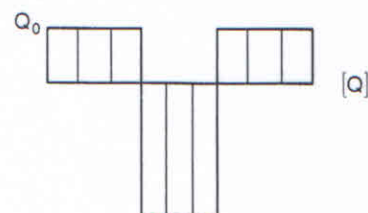
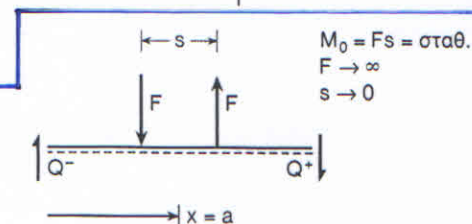
ενώ το διάγραμμα ροπών κάμψης εμφανίζει  
ένα πεπερασμένο άλμα κατ' απόλυτη τιμή  
ίσο προς το καμπτικό φορτίο  $M_0$ :

$$M^+ = M^- - \langle x - a \rangle^0 M_0$$

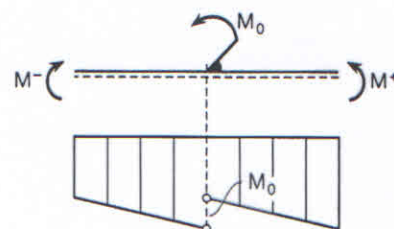


[Q]

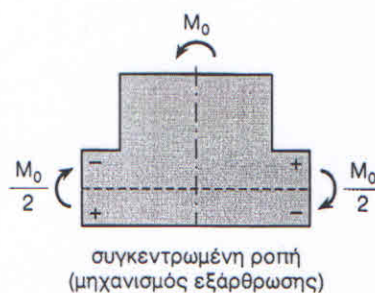
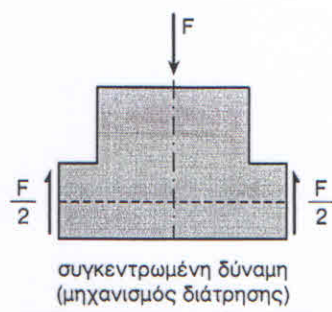
[M]



[Q]

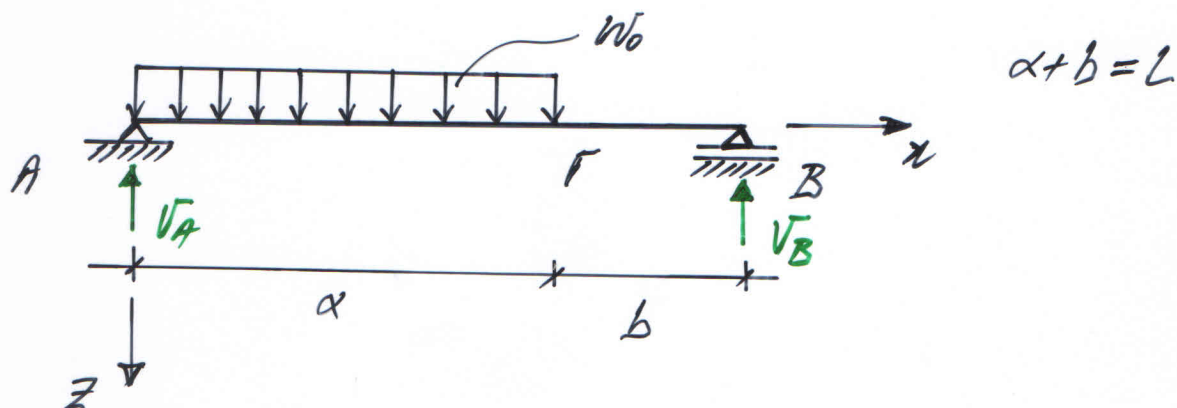


[M]



- Προβλήματα εξωτερικών ελαστικών μερμών με χρήση συνάρτησεων Maclaury - Föppl

### Άσκηση 1:



Αντιδράσεις στηρίξεων:  $V_A = \frac{w_0 \alpha (L+b)}{2L}$ ,  $V_B = \frac{w_0 \alpha^2}{2L}$ .

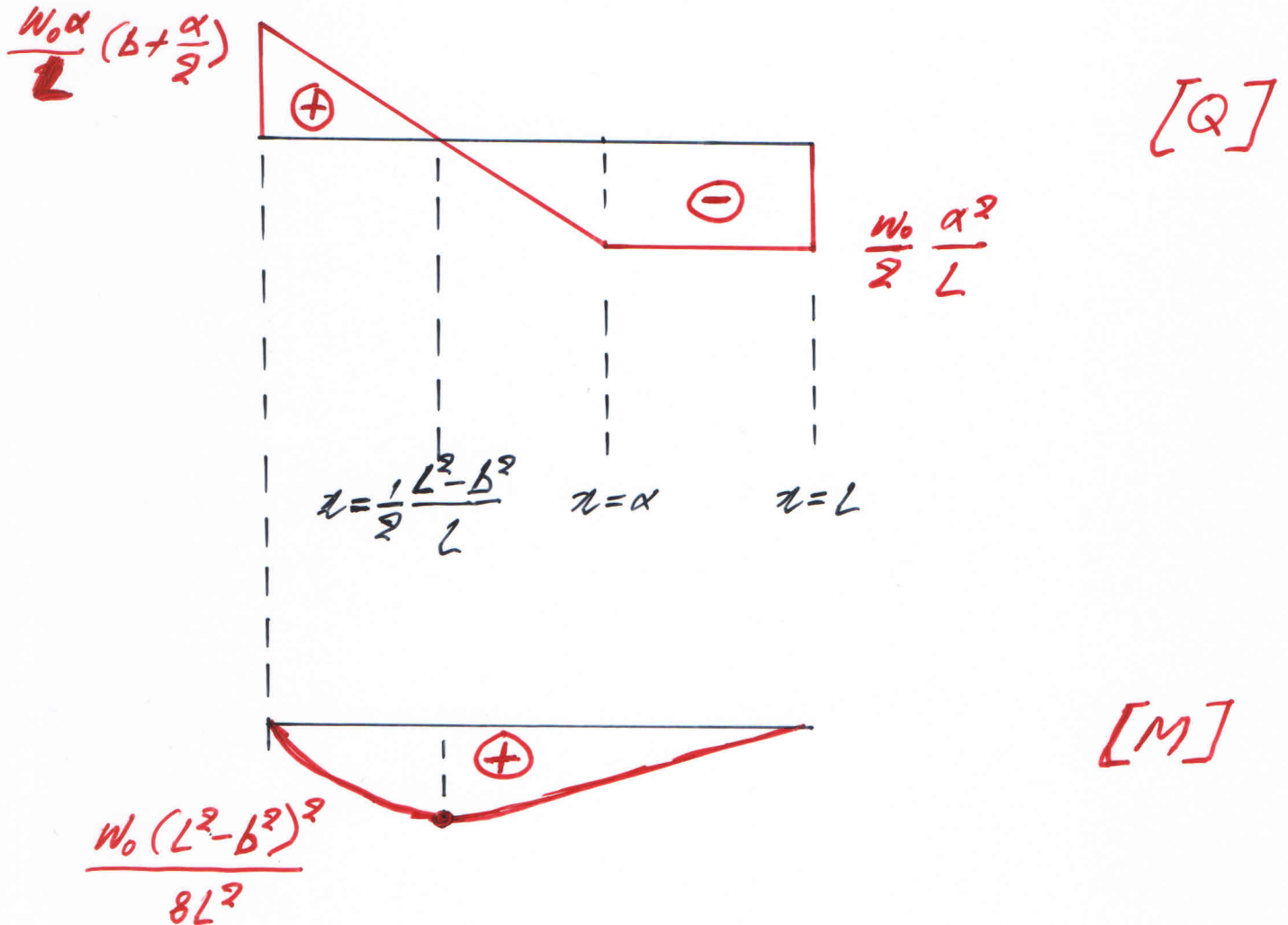
$$q(x) = w_0 - w_0 \langle x - \alpha \rangle^0, \quad \left. \begin{array}{l} \text{αντιδρ. ή ολοκλήρωση} \\ \leadsto Q(x) = -w_0 x + \\ + w_0 \langle x - \alpha \rangle' + C_1, \end{array} \right\} \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x).$$

ενώ  $Q(x=0) = C_1 = V_A = \frac{w_0 \alpha}{L} \left( b + \frac{\alpha}{2} \right).$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση, έχουμε

$$M(x) = \frac{-w_0 x^2}{2} + \frac{w_0}{2} \langle x - \alpha \rangle^2 + \frac{w_0 \alpha}{L} \left( b + \frac{\alpha}{2} \right) x + C_2,$$

ενώ  $M(x=0) = C_2 = 0$ .



### Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης

Οι αντιδράσεις (σχετιζόμενες προς το παρόν άγνωστες) περιλαμβάνονται και αυτές στην εξωτερική φόρτιση  $q(x)$ . Οπότε,

$$q(x) = -V_A \langle x \rangle^{-1} + W_0 \langle x \rangle^0 - W_0 \langle x - \alpha \rangle^0 - V_B \langle x - L \rangle^{-1},$$

$$-Q(x) = \int_{-\infty}^x q(\tau) d\tau = -V_A \langle x \rangle^0 + W_0 \langle x \rangle^1 -$$

$$-w_0 \langle x-\alpha \rangle' - V_B \langle x-L \rangle^0,$$

$$M(x) = + \int_{-\infty}^x Q(\tau) d\tau = + V_A \langle x \rangle' + \frac{w_0}{2} \langle x \rangle^2 +$$

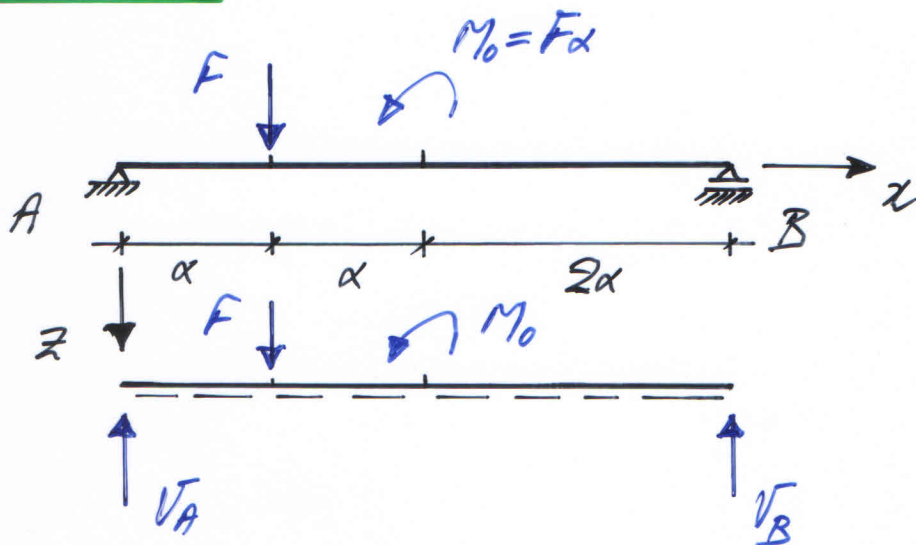
πρόσθετο  
"πλην"

$$+ \frac{w_0}{2} \langle x-\alpha \rangle^2 + V_B \langle x-L \rangle'.$$

Οι άγνωστες συνάρσεις  $V_A, V_B$  μπορούν τώρα να προσδιορισθούν από την απαίτηση η τέμνουσα και η ροπή κάμψης να μηδενίζονται όταν το  $x$  υπερβεί την τιμή  $L$  (απεροσέλιχστα), δηλ.

$$\left. \begin{aligned} -V_A + w_0 L - w_0 (L-\alpha) - V_B &= 0, \text{ και} \\ -V_A L + \frac{w_0}{2} L^2 - \frac{w_0}{2} (L-\alpha)^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \rightarrow V_A = \dots, \\ V_B = \dots$$

Άσκηση 2:



Δ.Ε.Σ.



Η (ολική) εσωτερική γόρτιση εκφράζεται ως

$$q(x) = -V_A \langle x \rangle^{-1} + F \langle x - \alpha \rangle^{-1} + M_0 \langle x - 2\alpha \rangle^{-2} - V_B \langle x - 4\alpha \rangle^{-1}.$$

Όμως, οι αντιδράσεις στηρίξεων προκύπτουν εύκολα από την ισορροπία της δομής, δηλ.  $\uparrow \sum F_z = 0 \leadsto -V_A - V_B + F = 0$ , και  $\uparrow \sum M_{(B)} = 0 \leadsto -V_A 4\alpha + F 3\alpha + M_0 = 0 \leadsto V_A = F$ ,  $V_B = 0$ .

$$\uparrow M_0 = F\alpha$$

Με ολοκληρώσεις της συνάρτησης  $q(x)$  λαμβάνουμε τελικά

$$Q(x) = \underset{\uparrow F}{V_A} - F \langle x - \alpha \rangle^0 - M_0 \underbrace{\langle x - 2\alpha \rangle^{-1}}_{\uparrow \delta(x - 2\alpha)}, \text{ και}$$

$$M(x) = Fx - F \langle x - \alpha \rangle^1 - F\alpha \langle x - 2\alpha \rangle^0.$$

