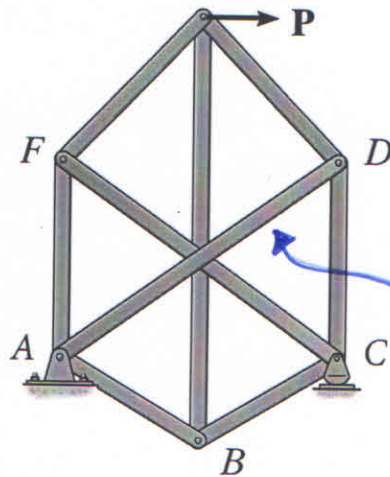


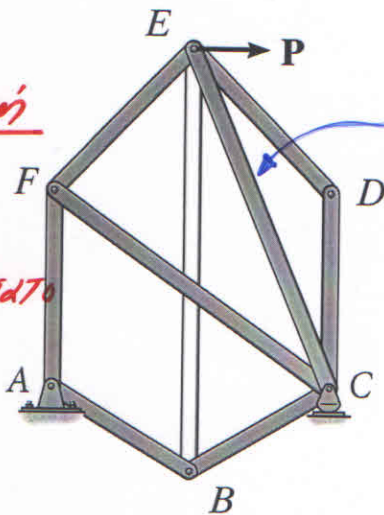
# Μέθοδος Henneberg εναλλαγής των ράβδων :



πραγματικό πρόβλημα  
(αρχικός φορέας)

ράβδος που θα αφαιρεθεί

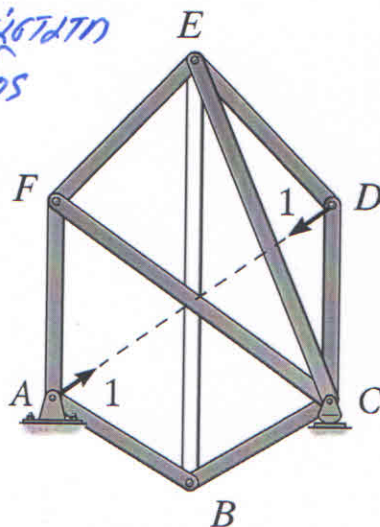
(α)



Εξωτερική  
φόρτιση  
στον  
υποκατάστατο  
φορέα

υποκατάστατη  
ράβδος

(β)



μοναδιαία  
φόρτιση κατά  
την διεύθυνση  
της αφαιρούμενης  
ράβδου

(γ)

Βασικό πρόβλημα (0) -  
- δυνάμεις ράβδων  $S_i^{(0)}$

Βασικό πρόβλημα (1) -  
- δυνάμεις ράβδων  $S_i^{(1)}$

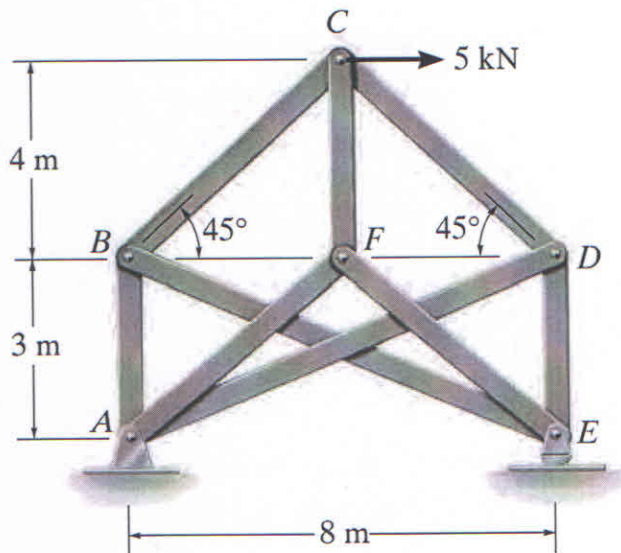
Υπόθεση λύσης β' και γ' :  $S_i = S_i^{(0)} + S_i^{(1)} \cdot X$  . (1)

Επειδή  $S_{EC}^{(0)} + S_{EC}^{(1)} \cdot X = 0 \Rightarrow X = \frac{-S_{EC}^{(0)}}{S_{EC}^{(1)}}$  . (2)

### Διαδικασία επίλυσης:

- 1) Αγαιρείται μία ράβδος έτσι ώστε σε συγκεντρωμένο κόμβο να συντρέχουν μίνον δύο ράβδοι. Η ράβδος που αφαιρέθηκε τοποθετείται σε άλλη θέση του διυτύωματος συνδέοντας πλέον δύο άλλους κόμβους.
- 2) Το νέο διυτύωμα (που θα πρέπει να είναι ευσταδές) επιλύεται εύκολα με την μέθοδο των κόμβων. Η γόρτική του είναι η γόρτικη στον αρχικό γράφο (πραγματική γόρτικη).
- 3) Το νέο διυτύωμα επιλύεται επίσης για μοναδικά αυτο-ισοπο-  
τούμενη γόρτικη που δίνεται στην διεύθυνση της αφαιρούμενης  
ράβδου και εφαρμόζεται στους αντίστοιχους κόμβους (κόμβους  
A και D). Δεν προκύπτουν αντιφάσεις στηρίξεων στην  
περίπτωση αυτή.
- 4) Εφαρμόζεται επαληθευτικά (υπέρβαση των επιμέρους λύσεων).
- 5) Ο άγνωστος  $\chi$  προσδιορίζεται από την απαίτηση να μηδε-  
νίζεται η δύναμη στην υποκατάσταση (εναλλαξιμότητα)  
ράβδο (η οποία δεν υφίσταται στον αρχικό γράφο).

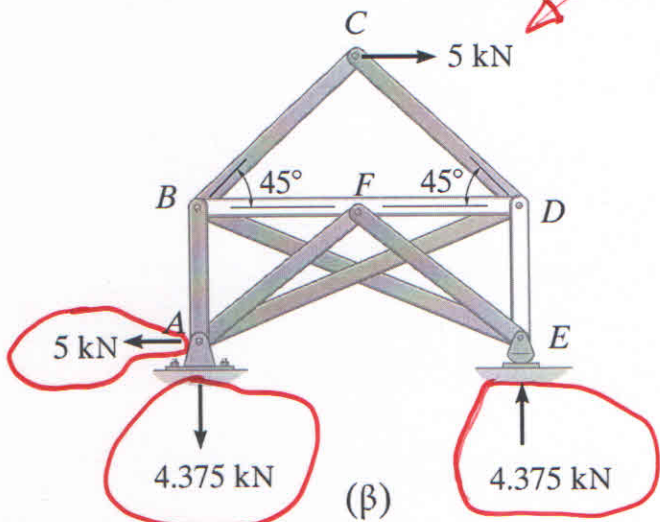
Άσκηση: Να προσδιοριστούν με την μέθοδο Henneberg οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στις ράβδους του δικτυώματος.



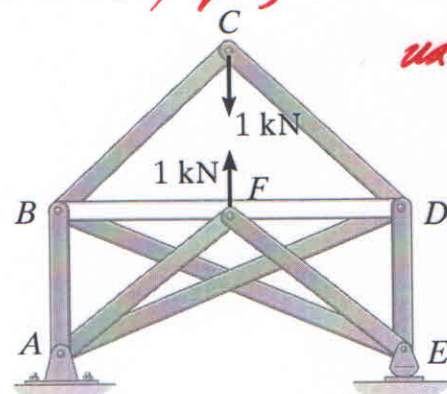
(α)

Επίλυση:

αφαιρείται η ράβδος CF και προστίθεται ράβδος που ενώνει τα B και D



(β)



(γ)

αναπτύσσεται (βασανιστικός) φορτίς υπό φόρτιση ίδια με την πραγματική.

αναπτύσσεται φορτίς υπό μοναδιαία φόρτιση. (αυτό - ισορροπία).



$$S_{DB} = S_{DB}^{(0)} + X \cdot S_{DB}^{(1)} = 0 \leadsto -2.50 + X(1.167) = 0 \leadsto \\ \leadsto X = 2.143.$$

Τιτλάδες τιμών:

Πάβδος	$S_i^{(0)}$	$S_i^{(1)}$	$X S_i^{(1)}$	$S_i$
CB	3.54	-0.707	-1.52	2.02 (€)
CD	-3.54	-0.707	-1.52	5.05 (€)
FA	0	0.833	1.79	1.79 (€)
FE	0	0.833	1.79	1.79 (€)
EB	0	-0.712	-1.53	1.53 (€)
ED	-4.38	-0.250	-0.536	4.91 (€)
DA	5.34	-0.712	-1.53	3.81 (€)
DB	-2.50	1.167	2.50	0
BA	2.50	-0.250	-0.536	1.96 (€)
<b>CF</b>				<b>2.14 (€)</b>

# Μέθοδος Henneberg εναλλαγής των ράβδων:

93

Στο θεωρούμενο τριαρθρωτό τόξο AGB αφαιρούμε τη δεσμική ράβδο T στην αρθρωση B και προσθέτουμε τη λεγόμενη «εναλλασόμενη» ράβδο E, οπότε και προκύπτει το αμφιέρειστο δικτύωμα (0):

$$H_A^{(0)} = F, \quad V_A^{(0)} = V_B^{(0)} = \frac{h}{\ell} F$$

$$\sum M_{(I)}^G = 0: V_B \frac{\ell}{2} - S_E^{(0)} h_2 = 0$$

$$\Rightarrow S_E^{(0)} = \frac{\ell/2}{h_2} V_B = \frac{h/2}{h_2} F$$

Στο αμφιέρειστο (εναλλακτικό) δίκτυωμα εφαρμόζουμε ένα αυτοίσοροποιούν ζεύγος συγγραμμικών δυνάμεων μοναδιαίας έντασης, που ασκούνται στους κόμβους, όπου αφαιρέθηκε η ράβδος T, οπότε

$$H_A^{(1)} = 1, \quad V_A^{(1)} = V_B^{(1)} = 0$$

$$\sum M_{(I)}^G = 0: 1 \cdot (h) - S_E^{(1)} \cdot h_2 = 0$$

$$\Rightarrow S_E^{(1)} = \frac{h}{h_2}$$

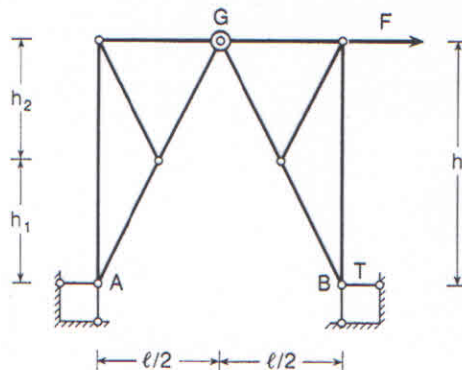
Εστω τώρα X η τιμή της τάσης στη δεσμική ράβδο T στο τριαρθρωτό τόξο AGB. Παρατηρούμε ότι οι τάσεις στον «πραγματικό» φορέα κάτω από την «πραγματική» φόρτιση προκύπτουν από την εξής επαλληλία:

$$S_i = S_i^{(0)} + S_i^{(1)} \cdot X \quad (*)$$

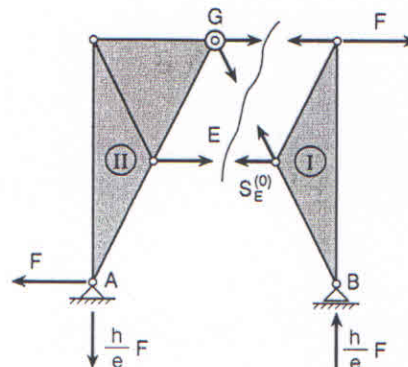
αρκεί να απαιτήσουμε όπως η τάση στην «εναλλακτική» ράβδο E να είναι τελικά μηδέν:

$$S_E = S_E^{(0)} + S_E^{(1)} \cdot X = 0$$

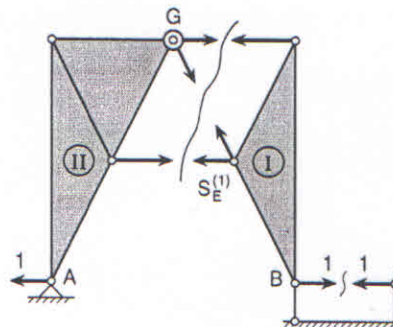
$$\Rightarrow X = - \frac{S_E^{(0)}}{S_E^{(1)}}$$



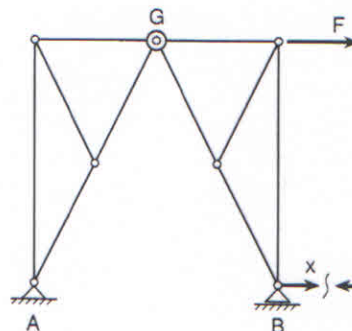
πραγματικός φορέας (πραγματικό πρόβλημα)



βοηθητικό πρόβλημα (0)



βοηθητικό πρόβλημα (1)



πραγματικό πρόβλημα με την άγνωστη δύναμη X

[από το βιβλίο των Ι. Βαρδαλάκη και Α. Γιαννακόπουλου]

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε:

$$X = - \frac{\frac{h/2}{h_2} F}{\frac{h}{h_2}} = - \frac{F}{2}$$

οπότε από την παραπάνω εξίσωση επαλληλίας (\*) μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις στον πραγματικό φορέα

$$V_A = V_A^{(0)} + V_A^{(1)} \cdot X$$

$$= \frac{h}{\ell} F + 0 \cdot X = \frac{h}{\ell} F$$

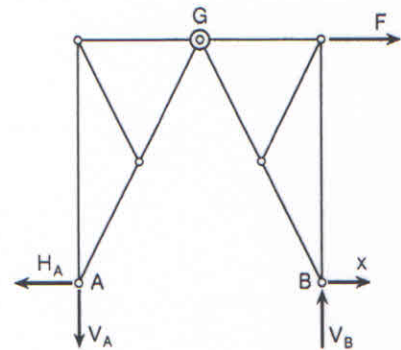
$$V_B = V_B^{(0)} + V_B^{(1)} \cdot X$$

$$= \frac{h}{\ell} F + 0 \cdot X = \frac{h}{\ell} F$$

$$H_A = H_A^{(0)} + H_A^{(1)} \cdot X$$

$$= F + 1 \cdot \left( - \frac{F}{2} \right) = \frac{F}{2}$$

$$H_B = X$$



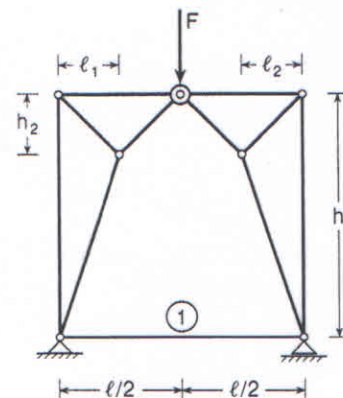
Σημειώτέον ότι το εναλλακτικό δικτύωμα πρέπει να είναι ισοστατικό. και ενστάσεις.

### Άσκηση

Με την μέθοδο της εναλλασσόμενης ράβδου να υπολογιστεί η δύναμη στη ράβδο 1 του αμφιέρειστου δικτυώματος, όπως εικονίζεται στο σχήμα

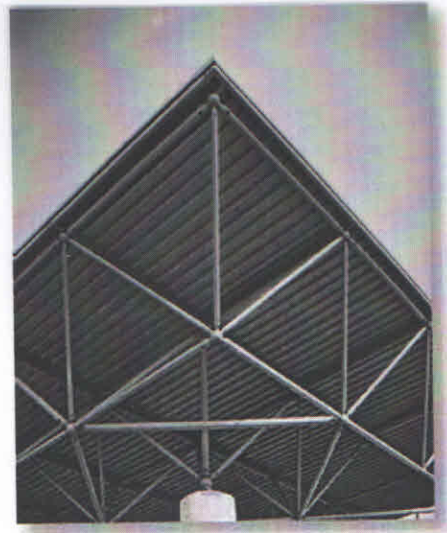
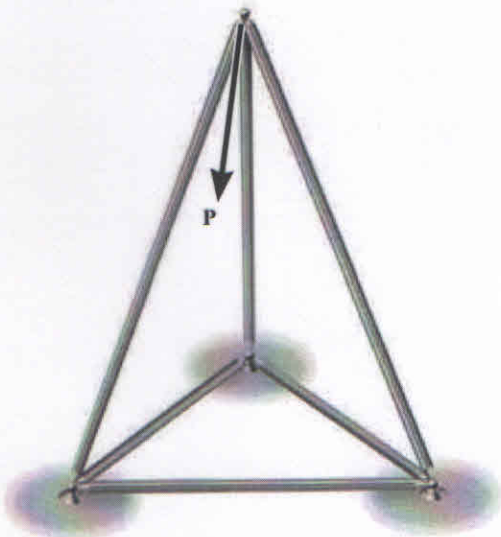
### Απάντηση

$$S_1 = F \frac{\ell}{4h}$$





## Χωρικά Δικτυώματα:



↖ απλούστερη μορφή  
χωρικού δικτυώματος (τετράεδρο)

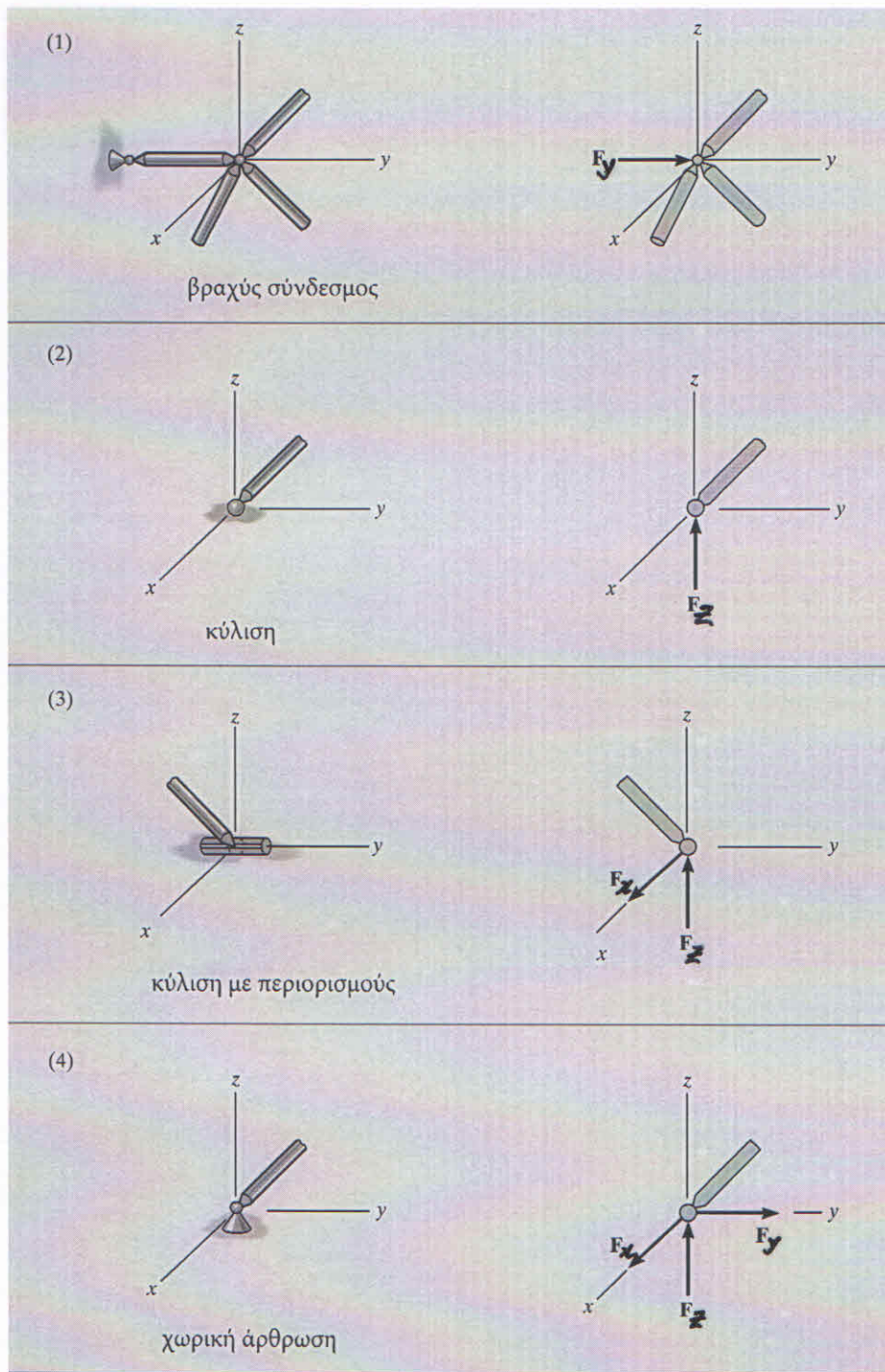
- Μέθοδος κόμβων:  $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$ .
- Μέθοδος τομών:  $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \sum M_x = 0,$   
 $\sum M_y = 0, \sum M_z = 0$ .
- Ισοστατικότητα και Ευστάθεια:

$P_{\text{εσ.}} < 3k - 6$  αετώδες δικτύωμα,

$P_{\text{εσ.}} = 3k - 6$  ισοστατικό δικτύωμα (υπό έλεγχο η ευστάθειά του),

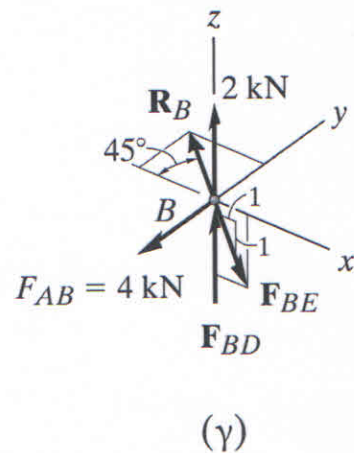
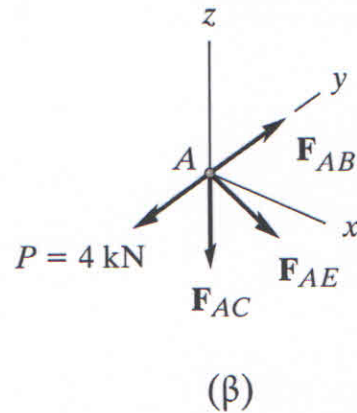
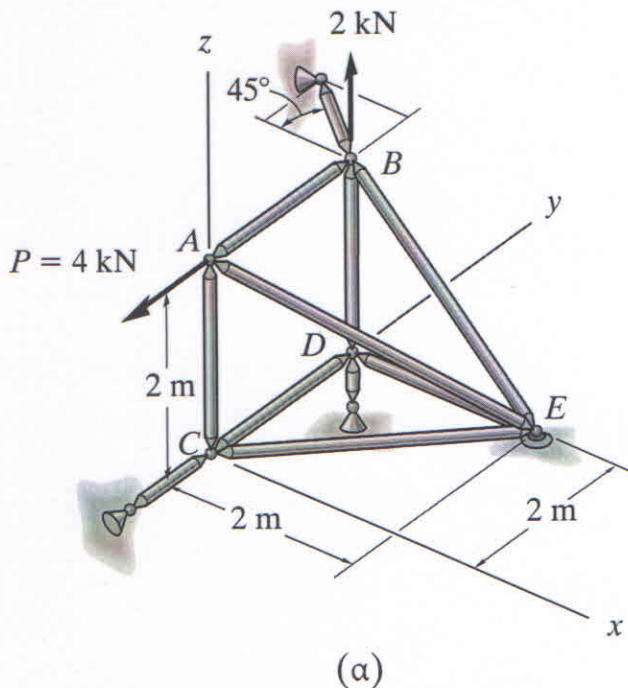
$P_{\text{εσ.}} > 3k - 6$  υπερστατικό δικτύωμα (υπό έλεγχο η ευστάθειά του).

## Συνήδεις τύποι στηρίξεων σε χωρικά δίκτυα:





Άσκηση: Να επιλύσει το χωρικό δίκτυωμα του ελασματος.



κόμβος A: εκφράζονται, μετ' αρχάς, όλες οι συντρέχουσες δυνάμεις ως καρτεσιανά διανύσματα, δηλ.

$$\underline{\underline{P}} = -4 \underline{\underline{j}} \text{ kN}, \quad \underline{\underline{F}}_{AB} = F_{AB} \underline{\underline{j}}, \quad \underline{\underline{F}}_{AC} = -F_{AC} \underline{\underline{k}},$$

$$\underline{\underline{F}}_{AE} = F_{AE} \frac{\underline{\underline{r}}_{AE}}{r_{AE}} = F_{AE} (0.577 \underline{\underline{i}} + 0.577 \underline{\underline{j}} - 0.577 \underline{\underline{k}}),$$

και συμβάλλεται η ισορροπία

$$\sum \underline{\underline{F}} = 0 \leadsto \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{F}}_{AB} + \underline{\underline{F}}_{AC} + \underline{\underline{F}}_{AE} = \underline{\underline{0}} \leadsto$$

$$-4 \underline{\underline{j}} + F_{AB} \underline{\underline{j}} - F_{AC} \underline{\underline{k}} + 0.577 F_{AE} \underline{\underline{i}} + 0.577 F_{AE} \underline{\underline{j}} - 0.577 F_{AE} \underline{\underline{k}} = \underline{\underline{0}} \leadsto$$

$$\begin{cases} \leadsto 0.577 F_{AE} = 0 & (\text{ή } \Sigma F_x = 0), \\ -4 + F_{AB} + 0.577 F_{AE} = 0 & (\text{ή } \Sigma F_y = 0), \\ -F_{AC} - 0.577 F_{AE} = 0 & (\text{ή } \Sigma F_z = 0), \end{cases} \leadsto$$

$$\leadsto F_{AC} = F_{AE} = 0, \quad F_{AB} = 4 \text{ kN (εφ.)}.$$

κίμβος B:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \leadsto -R_B \cos 45^\circ + 0.707 F_{BE} = 0, \\ \Sigma F_y = 0 \leadsto -4 + R_B \sin 45^\circ = 0, \\ \Sigma F_z = 0 \leadsto 2 + F_{BD} - 0.707 F_{BE} = 0. \end{cases} \leadsto$$

$$\leadsto R_B = F_{BE} = 5.66 \text{ kN (εφ.)}, \quad F_{BD} = 2 \text{ kN (στ.)}.$$

Τέλος, από την ισορροπία των κίμβων D και C προκύπτει ότι

$$F_{DE} = F_{DC} = F_{CE} = 0.$$