

Μέθοδοι Επίλυσης με Η/Υ

3^ο Μάθημα – *Μητρώα και συνθήκες στο MATLAB*

Ν.Δ. Λαγαρός, Α. Στάμος, Χ. Φραγκουδάκης

3^ο Μάθημα

- 1) Συνθήκες/Αποφάσεις
- 2) Vectors
- 3) Matrices
- 4) Arrays

Συνθήκες/Αποφάσεις

Ένα από τα βασικά στοιχεία στον προγραμματισμό είναι η δυνατότητα διακλάδωσης της ροής του προγράμματος σε διαφορετική κατεύθυνση, ανάλογα με το αν ικανοποιείται κάποια συνθήκη. Οι βασικές εντολές επιλογής (δηλαδή διακλάδωσης της ροής του προγράμματος) είναι η **if** και η **switch**.

```
If συνθήκη  
    ενέργεια  
end
```

Παράδειγμα:

```
num = -5  
If num <= 0  
    num = 0  
end
```

Συγκριτικές πράξεις / Συγκριτικοί (σχεσιακοί) τελεστές:

Οι συγκριτικές πράξεις λειτουργούν ως συναρτήσεις, με είσοδο δύο μεταβλητές και έξοδο μια λογική τιμή (true ή false, 1 ή 0), ανάλογα με το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

Οι συγκριτικοί τελεστές είναι:

Operator	Description
<	Less than
<=	Less than or equal to
>	Greater than
>=	Greater than or equal to
==	Equal to
!=	Not equal to

Συνθήκες/Αποφάσεις

Η μορφή if-else επιτρέπει πιο σύνθετες περιπτώσεις:

```
if συνθήκη1
    ενέργεια 1
elseif συνθήκη2
    ενέργεια2
else
    ενέργεια 3
end
```

παράδειγμα (συνάρτηση $f(x)$)

```
if x <= 0
    f = 0

elseif x < 2
    f = 5*x^2;

elseif x >= 2
    f = 5*x^3 + 4*x + 2;
end
```

Παράδειγμα:

Η λύση μίας εξίσωσης β' βαθμού, $ax^2+bx+c = 0$, δίνεται από τη σχέση $x_{1,2} = (-b \pm \Delta) / 2a$, $\Delta = b^2 - 4ac$

```
a = 1; b = 4; c = 3;
```

```
Diakrinousa = b*b - 4*a*c;
```

```
if Diakrinousa > 0
```

```
    X1 = (-b + sqrt(Diakrinousa)) / (2*a);
```

```
    X2 = (-b - sqrt(Diakrinousa)) / (2*a);
```

```
elseif Diakrinousa == 0
```

```
    X1 = -b / (2*a);
```

```
    X2 = X1;
```

```
elseif Diakrinousa < 0
```

```
    disp('arnitiki Diakrinousa, migadikes rizes mono');
```

```
end
```

Ξανατρέξτε το πρόγραμμα με διαφορετικές τιμές a, b και c.

Συνθήκες/Αποφάσεις

Η μορφή switch-case επιτρέπει σύνθετες περιπτώσεις:

```
switch switch_expression
case case_expression
    ενέργεια 1
case case_expression
    ενέργεια 2
...
otherwise
    ενέργεια n
end
```

παράδειγμα (συνάρτηση f(x))

```
%% The switch Statement
grade = 'B';
switch(grade)
case 'A'
    disp('Excellent!');
case 'B'
    disp('Well done');
case 'C'
    disp('Well done');
case 'D'
    disp('You passed');
case 'F'
    disp('Better try again');
otherwise
    disp('Invalid grade');
end
```

Διάνυσμα/Μητρώο

▣ διάνυσμα (vector)

$x = [1 \ 2 \ 5 \ 1]$

▣ μητρώο (matrix)

$x = [1 \ 2 \ 3; \ 5 \ 1 \ 4; \ 3 \ 2 \ -1]$

$x =$

1	2	3
5	1	4
3	2	-1

διάνυσμα (vector)

- ▣ `t = 1:10` % δημιουργία αριθμών από το 1 έως το 10

```
t =  
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
```

- ▣ `k = 2:-0.5:-1` % δημιουργία αριθμών με βήμα -0.5

```
k =  
    2    1.5    1    0.5    0   -0.5   -1
```

- ▣ `B = [1:4; 5:8]` % εφαρμογή σε μητρώο

```
x =  
    1     2     3     4  
    5     6     7     8
```

Δημιουργία μητρώων από συναρτήσεις

- **zeros(M,N)** δημιουργία μητρώου $M \times N$ αποτελούμενο από 0

```
x = zeros(1,3)
```

```
x =  
0      0      0
```

- **ones(M,N)** δημιουργία μητρώου $M \times N$ αποτελούμενο από 1

```
x = ones(1,3)
```

```
x =  
1      1      1
```

- **rand(M,N)** δημιουργία μητρώου $M \times N$ αποτελούμενο από τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους στο (0,1)

```
x = rand(1,3)
```

```
x =  
0.9501  0.2311  0.6068
```

Δείκτες μητρώων - Indexing

- Μπορούμε να διαβάσουμε κάποιες τιμές ενός μητρώου/διανύσματος με την βοήθεια των δεικτών

- Έστω το μητρώο A:

A =		
3	5	3
6	8	2
2	7	3

- μπορούμε να βρούμε την τιμή (3,2) του A με την εντολή: `a32 = A(3,2)`

```
>> A(3,2)
```

```
ans =
```

```
7
```

- Οι τιμές των δεικτών ξεκινούν από το 1
- Οι δείκτες είναι πάντα θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Δείκτες μητρώων - Indexing

- Αν θέλουμε τις τιμές της δεύτερης γραμμής του A

```
>> A(2, :)
```

```
ans =
```

```
6      8      2
```

- Αν θέλουμε τις 2 πρώτες τιμές της δεύτερης στήλης του A:

```
>> A(1:2, 2)
```

```
ans =
```

```
5
```

```
8
```

- Παράδειγμα σφάλματος – τί πήγε λάθος;

A(-2), A(0)

Error: ??? Subscript indices must either be real positive integers or logicals.

A(4,2)

Error: ??? Index exceeds matrix dimensions.

Αλληλουχία (Concatenation)

Μπορούμε να συνδυάσουμε (concatenate) δύο μητρώα ή διανύσματα

$$\mathbf{x} = [1 \ 2], \ \mathbf{y} = [4 \ 5], \ \mathbf{z} = [0 \ 0]$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{x} \ \mathbf{y}]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{x}; \ \mathbf{y}]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Πράξεις μεταξύ μητρώων

έστω τα μητρώα A και B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 45 & 12 & 4 \\ 23 & 70 & 100 \end{bmatrix}$$

Πρόσθεση
 $X = A + B$

```
>> X = A + B
```

X =

4	7	5
9	7	14
10	14	18

Αφαίρεση
 $X = A - B$

```
>> Y = A - B
```

Y =

-2	-3	1
-1	3	-2
4	2	0

Γινόμενο
 $X = A * B$

```
>> Z = A * B
```

Z =

22	27	45
55	66	102
88	105	159

Ανάστροφος
 $X = A'$

```
>> T = A'
```

T =

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Dot/cross product

Εσωτερικό Γινόμενο: **C = dot(A,B)**

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

```
%% Dot product
```

```
A = [4 -1 2];
```

```
B = [2 -2 -1];
```

```
C = dot(A,B)
```

Εξωτερικό Γινόμενο: **C = cross(A,B)**

```
66 %% Cross product
```

```
67 - A = [4 -1 2];
```

```
68 - B = [2 -2 -1];
```

```
69 - C = cross(A,B);
```

Το αποτέλεσμα είναι ένα
διάνυσμα **C** κάθετο στα **A,B**

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} A &= a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} \\ B &= b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k} \end{aligned}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}$$

Προσοχή:

εάν μπροστά από την πράξη βάλουμε μία τελεία «.», τότε η πράξη γίνεται στοιχείο-στοιχείο και όχι σύμφωνα την θεωρία των μητρώων.

- .^{*} πολλαπλασιασμός στοιχείο-στοιχείο
- ./ διαίρεση στοιχείο-στοιχείο
- .[^] ύψωση σε εκθέτη στοιχείο-στοιχείο

Χρήση του τελεστή «.»

$A = [1 \ 2 \ 3; 5 \ 1 \ 4; 3 \ 2 \ 1]$

$B = [6 \ 2 \ 3; 45 \ 12 \ 4; 23 \ 70 \ 100]$

$C = A*B =$ % ο συνήθης πολλαπλασιασμός 2 πινάκων

165 236 311

167 302 419

131 100 117

$C = A.*B =$ % πολλαπλασιασμός με την τελεία «.*»

6 4 9

225 12 16

69 140 100

δηλαδή $C(i,j) = A(i,j)*B(i,j)$

Χρήση του τελεστή «.»

έστω $A = [1 \ 2 \ 3; 5 \ 1 \ 4; 3 \ 2 \ 1]$,

ο πολλαπλασιασμός του A με τον εαυτό του μπορεί να γίνει με τους παρακάτω τρόπους:

- μητρωικά $C = A^T A$: $C = A' * A$
- με πολλαπλασιασμό στοιχείο-στοιχείο: $C = A .* A$
- υψώνοντας στο τετράγωνο: $C = A.^2$

Αντίστροφος

Ο αντίστροφος πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα στο MATLAB καθορίζεται από την απλή εντολή **inv(A)**. Έτσι, αν **B** είναι ο αντίστροφος του **A**, η εντολή συντάσσεται:

```
>> B = inv(A)
```

$A = [1 \ 2 \ 3; 5 \ 1 \ 4; 3 \ 2 \ 1]$

A =
1 2 3
5 1 4
3 2 -1



Ποιος είναι ο **ανάστροφος**
και ποιος ο **αντίστροφος**
πίνακας του A?

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Παράδειγμα: ένα γραμμικό σύστημα με τρεις εξισώσεις και 3 αγνώστους (x_1, x_2, x_3):

$$\begin{array}{rrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Ας θεωρήσουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς το σύστημα γράφεται:

$$Ax = b$$

Αλγεβρικές πράξεις μητρώων

Το matlab μπορεί πολύ εύκολα να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γραμμικών (και όχι μόνο!) συστημάτων,

Έστω το σύστημα:

$$6x + 12y + 4z = 70$$

$$7x - 2y + 3z = 5$$

$$2x + 8y - 9z = 64$$

Για την επίλυση απλά γράφουμε το σύστημα στην μορφή $AX=B \rightarrow X=(A^{-1})B$

$$A = [6, 12, 4; 7, -2, 3; 2, 8, -9]$$

$$B = [70; 5; 64]$$

$$X = A^{-1} * B$$

$$X =$$

$$3.0000$$

$$5.0000$$

$$-2.0000$$

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Επίλυση με χρήση αντιστρόφου:

$$Ax = b$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

MATLAB:

```
>> A = [ 3 2 -1; -1 3 2; 1 -1 -1];
```

```
>> b = [ 10; 5; -1];
```

```
>> x = inv(A)*b
```

x =

-2.0000

5.0000

-6.0000

Σημείωση:

left division: $A \backslash b \rightarrow b \div A$

right division: $x/y \rightarrow x \div y$

Επίλυση με Matrix Division: Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$Ax = b$$

μπορεί να επιλυθεί με «left division» με την χρήση του τελεστή **«\»**.

MATLAB:

```
>> A = [ 3 2 -1; -1 3 2; 1 -1 -1];
```

```
>> b = [ 10; 5; -1];
```

```
>> x = A\b
```

x =

-2.0000

5.0000

-6.0000

Ερωτήσεις...