Ζήτημα 2ο

$$xy'' - (2x+3)y' + (x+3)y = xe^x, \quad x>0,$$
$$y_1(x) = e^x$$

διαιρώ με x

$$y'' - \left(2+\frac{3}{x}\right)y' + \left(1+\frac{3}{x}\right)y = e^x$$

Θεωρώ την αντίστοιχη ομογενή $y''-\left(2+\frac{3}{x}\right)y'+\left(1+\frac{3}{x}\right)y=0$

Θεωρώ $y = u\cdot y_1$ όπου y_1 η μερική λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$\Downarrow$$

$$y = u\cdot e^x \Rightarrow y' = u'e^x + ue^x = e^x(u'+u)$$

$$\Downarrow$$

$$y'' = u''e^x + u'e^x + u'e^x + ue^x = e^x(u''+2u'+u)$$

αντικαθιστώ

$$e^x(u''+2u'+u) - \left(2+\frac{3}{x}\right)e^x(u'+u) + \left(1+\frac{3}{x}\right)e^x u = 0$$

από τις πράξεις προκύπτει:

$$u'' - \frac{3}{x}u' = 0$$ Θεωρώ $u'' = u'$ και $u' = u$

$$\Rightarrow u' - \frac{3}{x}u = 0 \Rightarrow$$ Δ.Ε 1ης τ. Χωρ. Μεταβ.

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{3dx}{x}$$

ολοκληρώνω

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{3\,dx}{x} \Rightarrow \ln u = 3\ln x \Rightarrow u = x^3$$

τώρα αντικαθιστώ πάλι $u = u' \Rightarrow u' = x^3$

ολοκληρώνω πάλι $u = \int x^3 = \frac{x^4}{4}$

η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$y_o = c_1 y_1 + c_2 (u \cdot y_2)$$

$$\Rightarrow y_o = c_1 e^x + c_2 e^x \frac{x^4}{4}$$

γενική λύση μη ομογενούς

$$y = y_o + y_\mu$$

Θα βρώ μια ειδική λύση y_μ με τη μέθοδο της μεταβολής σταθερών

$$y_\mu = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2$$

πρέπει να ισχύει:

$$c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x)\, y_2 = 0$$

$$c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2' = F(x)$$ σ' αυτές μη ομογενούς

$$\Rightarrow C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, e^x \frac{x^4}{4} = 0$$

$$C_1'(x)(e^x)' + C_2'(x)\left(e^x \frac{x^4}{4}\right)' = e^x$$

$$\left(e^x \frac{x^4}{4}\right)' = e^x \frac{x^4}{4} + e^x x^3$$

$$\Rightarrow C_1'(x) + C_2'(x)\frac{x^4}{4} = 0$$

$$C_1'(x) + C_2'(x)\left(\frac{x^4}{4} + x^3\right) = 1$$

Από το σύστημα εξισώσεων προκύπτει

$$C_1'(x) = -\frac{x}{4}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{x^3}$$

ολοκληρώνω και βρίσκω $\int C_1'(x) = -\frac{x^2}{8}$

$$\int C_2'(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

Αντικαθιστώ στην εξίσωση της y_μ και έχω

$$y_\mu = -\frac{x^2}{8} \cdot e^x - \frac{1}{2x^2} \cdot e^x \cdot \frac{x^4}{4} = -\frac{x^2 e^x}{4}$$

$$\Rightarrow y = y_\mu + y_o = \boxed{-\frac{x^2 e^x}{4} + C_1 e^x + C_2 e^x \frac{x^4}{4}}$$