

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ, Ε.Μ.Π. - 22/01/2019

“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ”

ΑΡΙΣΤΑ=10 μονάδες, ΒΑΣΗ=5 μονάδες

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 h

- Οι φοιτητές του παλαιού προγράμματος σπουδών που χρωστούν ΜΟΝΟ το ένα αντικείμενο, πρέπει να ασχοληθούν ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ με τα θέματα του αντίστοιχου μέρους. (Για το άριστα, πρέπει να απαντηθούν ΟΛΑ τα θέματα).
- ΟΛΟΙ οι υπόλοιποι φοιτητές πρέπει:
 - Να επιλέξουν το ΠΟΛΥ 2 θέματα από ΚΑΘΕ μέρος.
 - Να συγκεντρώσουν ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 2 μονάδες από ΚΑΘΕ μέρος.

ΜΕΡΟΣ Α: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1. (i) Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών (a_n) , (b_n) , όπου

$$(0,7\mu.) \quad a_n = \sqrt[n]{2^n} + \frac{4^n}{n!}, \quad (0,8\mu.) \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{2b_n}{1+b_n^2}, \quad n \geq 1.$$

(ii) (1 μ.) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $\lim a_n = l \in [0,1)$. Να δείξετε ότι $\lim a_n^n = 0$. Αν $\lim a_n = 1$, εξασχοληθεί να ισχύει το συμπέρασμα; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

ΘΕΜΑ 2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(i) (0,7 \mu.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4^n \cdot n!}$$

$$(ii) (0,5 \mu.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^4+1}\right)$$

$$(iii) (0,8 \mu.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

$$(iv) (0,5 \mu.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n^2+n}}{\sqrt[4]{n^9+1}}$$

ΘΕΜΑ 3. (i) (1 μ.) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(ii) (1 μ.) Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά γύρω από το 0 τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} + x^2 \cos x$ και να υπολογίσετε την παράγωγο $f^{(10)}(0)$.

(iii) (0,5 μ.) Με χρήση του θεωρήματος Taylor, να δείξετε ότι

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right| \leq \frac{|x|^7}{7!}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(i) (1 \mu.) \quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$$

$$(ii) (0,7 \mu.) \quad \int \frac{x+4}{x^2+2x+10} dx$$

$$(iii) (0,8 \mu.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$



ΜΕΡΟΣ Β: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1. (2,5 μονάδες)

- (i) Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A τάξης $n \times n$, τέτοιος ώστε να ισχύει: $A^2 + A - 7 \cdot I_n = 0$. Ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (0,5 μον.)
- (ii) Δίνεται ο επόμενος πίνακας A τάξης 3×3 . Αφού βρείτε το χαρακτηριστικό του πολωνύμου $X_A(\lambda)$, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του, να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα του $\det A$ με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού του πολωνύμου $X_A(\lambda)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}. \quad (2 \text{ μον.})$$

ΘΕΜΑ 2. (2,5 μονάδες)

- (i) Θεωρούμε τους τετραγωνικούς πίνακες A, B τάξης $n \times n$. Αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $A + B = A \cdot B$, να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$. (0,5 μον.)
- (ii) Να λοθεί το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α :

$$\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \quad (2 \text{ μον.})$$

ΘΕΜΑ 3. (2,5 μονάδες)

- (i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ αποτελούν μία βάση του R^3 ; (0,5 μον.)
- (ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. (1 μον.)

- (iii) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού β για τις οποίες το διάνυσμα $\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$

γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Στην συνέχεια, να προσδιορίσετε αυτόν τον γραμμικό συνδυασμό. (1 μον.)

ΘΕΜΑ 4. (2,5 μονάδες)

- (i) Να γράψετε μία καρτεσιανή εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το σημείο $P_0(-2, 4, 5)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (3, -1, 6)$. Να γράψετε την εξίσωση του επιπέδου στην κανονική της μορφή. Ποια είναι η απόσταση του σημείου $P_1(9, 7, -6)$ από το επίπεδο;
- (ii) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-1}{1} \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): \frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-5}{-2}.$$

Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες (και δεν ταντίζονται). Να βρείτε την απόσταση των (ε_1) και (ε_2) .