

**Κατατακτήριες 2018, στην Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία & Ανάλυση,
Πολιτικοί Μηχανικοί ΕΜΠ.**

1.α. Συγκλίνουν οι σειρές: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^a}$ με $a \in [0,1)$ και $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^3+x}{x^5+\ln(x)}$.

1.β. Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor η συνάρτηση $f(x)=(1-x)^a$ με $a \in \mathbb{R}$ και να μελετηθεί η σύγκλισή της στο $[-1,1]$.

2.α. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = a > 0$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \varphi(t) dt = +\infty$ και να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x^2} \varphi(x) dx}{x}$.

2.β. Συγκλίνει το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$;

3.α. Διανυσματικοί χώροι W_1 με βάση (α, β, γ) , $(\delta, \varepsilon, \zeta)$ (δοσμένα) και W_2 με εξίσωση $\eta x + \theta y + \kappa z = 0$. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση των W_1 , W_2 , $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$.

3.β. Γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω.

4.α. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4.β. Για μια ιδιοτιμή, να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα.

4.γ. Βασισμένοι στις ιδιοτιμές ή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι ο πίνακας έχει αντίστροφο και διαγωνοποιείται.

4.δ. Βρείτε τον αντίστροφο ως πολυώνυμο του A.