Κεφάλαιο 1

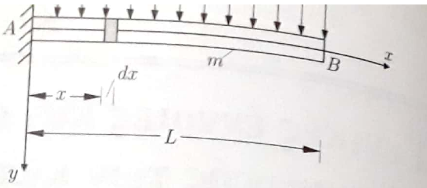
Γενικές έννοιες και αρχές της δυναμικής των κατασκευών

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

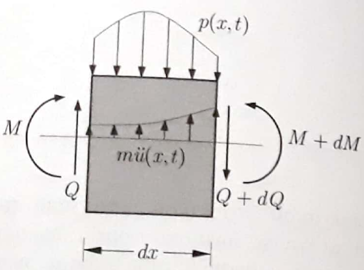
Οι κατασκευές του πολιτικού μηχανικού εκτός από τα στατικά φορτία είναι δυνατόν να υποβάλλονται και σε δυναμικά φορτία, δηλαδή φορτία των οποίων το μέγεθος, η διεύθυνση ή και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Ο προσδιορισμός της παραμορφώσεως και εντάσεως σε μία κατασκευή, όταν αυτή υποβάλλεται σε δυναμική φόρτιση, αποτελεί το αντικείμενο της Δυναμικής Αναλύσεως των Κατασκευών. Μεταξύ της στατικής και της δυναμικής αναλύσεως των κατασκευών υπάρχουν δύο ουσιώδεις διαφορές:

(a) Στη στατική ανάλυση τα φορτία είναι σταθερά, η δε ένταση και παραμόρφωση που αναπτύσσονται είναι μοναδικές, τουλάχιστο στη γραμμική θεωρία. Αντίθετα, στη δυναμική ανάλυση η ένταση και η παραμόρφωση του φορέα είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή αναπτύσσονται στο φορέα διαφορετική παραμορφωσιακή και εντατική κατάσταση.

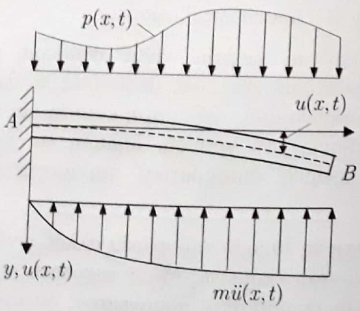
(b) Στη δυναμική ανάλυση τα σημεία του φορέα αλλάζουν θέση συναρτήσει του χρόνου, δηλαδή κινούνται, επομένως έχουν ταχύτητα και επιτάχυνση. Επειδή ο φορέας έχει μάζα αναπτύσσονται αδρανειακές δυνάμεις συνεπεία της επιταχύνσεως των υλικών σημείων της κατασκευής. Οι αδρανειακές αυτές δυνάμεις αποτελούν πρόσθετη φόρτιση της κατασκευής, η οποία δεν μπορεί να αμεληθεί. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό θεωρούμε τον πρόβολο του Σχ. 1.1.1. Ο πρόβολος έχει σταθερή μάζα m ανά μονάδα μήκους, σταθερή ροπή αδρανείας I και υποβάλλεται στο δυναμικό φορτίο $p(x,t)$ (Σχ. 1.1.1a). Για να διατυπώσουμε την εξίσωση δυναμικής ισορροπίας του προβόλου εξετάζουμε, όπως και στη στατική, την ισορροπία ενός στοιχείου της (Σχ. 1.1.1b). Κατά τη στατική θεώρηση το στοιχείο σε κάθε χρονική στιγμή



a. Πρόβολος υποβαλλόμενος σε δυναμική φόρτιση $p(x,t)$



b. Στοιχείο dx του προβόλου



c. Ο πρόβολος με τις φορτίσεις $p(x,t)$ $m\ddot{u}(x,t)$.

Σχήμα 1.1.1

ισορροπεί υπό την επενέργεια των εντατικών μεγεθών $Q = Q(x,t)$, $M = M(x,t)$ και του εξωτερικού φορτίου $p(x,t)dx$.

Επειδή όμως το βέλος κάμψεως είναι συνάρτηση όχι μόνο της διατομής x αλλά και του χρόνου t, δηλ. $u = u(x,t)$, στο στοιχείο που έχει μάζα mdx αναπτύσσεται αδρανειακή δύναμη $m\ddot{u}dx$, η οποία σύμφωνα με την αρχή του d' Alembert αντιτίθεται στην κίνηση, δηλαδή για θετική μετατόπιση $u(t)$ προς τα κάτω η αδρανειακή δύναμη κατευθύνεται προς τα άνω (βλ. Σχ. 1.1.1b,c). Ομοίως, συνεπεία της γωνιακής επιταχύνσεως της διατομής $\partial\ddot{u}(x,t)/\partial x$, αναπτύσσεται αδρανειακή ροπή, την οποία εδώ αμελούμε. Συνεπώς, εάν γράψουμε την εξίσωση δυναμικής ισορροπίας κατά τον κατακόρυφο άξονα y, θα έχουμε

$$-Q + Q + dQ + p(x,t)dx - m\ddot{u}dx = 0$$

ή

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -p(x,t) + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1.1}$$

Η παράγωγος ως προς το χρόνο συμβολίζεται είτε με μία τελεία πάνω από το σύμβολο της συναρτήσεως, είτε με τον τελεστή d/dt, όταν πρόκειται για συνήθη παράγωγο, ή τον $\partial/\partial t$, όταν πρόκειται για μερική παράγωγο.

Από τη θεωρία Euler-Bernoulli της δοκού, με παράλειψη της στροφικής αδράνειας του στοιχείου, έχουμε

$$Q = -EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tag{1.1.2}$$

Η σχέση (1.1.1) με τη βοήθεια της (1.1.2) δίδει

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{1.1.3}$$

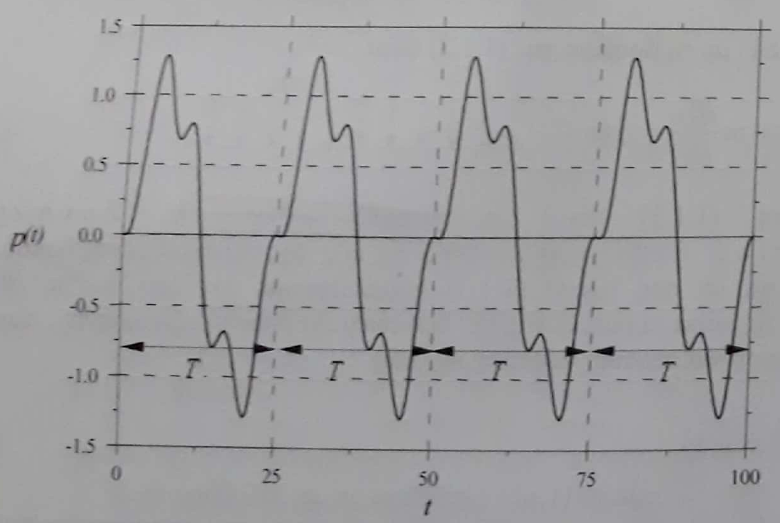
Η εξίσωση (1.1.3) είναι η γνωστή *ε ξ ί σ ω σ η δ υ ν α μ ι κ ή ς ι σ ο ρ ρ ο π ί α ς* ή *ε ξ ί σ ω σ η κ ι ν ή σ ε ω ς* της ταλαντούμενης δοκού. Είναι προφανές ότι, αν στη σχέση (1.1.3) παράλείψουμε τον όρο $m\partial^2 u/\partial t^2$ που οφείλεται στις αδρανειακές δυνάμεις, προκύπτει η γνωστή εξίσωση της ελαστικής γραμμής δοκού για στατική φόρτιση, δηλαδή

$$EI\frac{d^4 u}{dx^4} = p(x) \tag{1.1.4}$$

Στο Σχ. 1.1.1c φαίνονται και οι αδρανειακές δυνάμεις που αντιστοιχούν σε κάποια χρονική στιγμή. Οι δυνάμεις αυτές αντιτίθενται στην κίνηση και πρέπει να ληφθούν υπόψη στη λύση. Τούτο αποτελεί το χαρακτηριστικό γνώρισμα του δυναμικού προβλήματος. Είναι φανερό ότι το μέγεθος των αδρανειακών δυνάμεων εξαρτάται από το μέγεθος της επιταχύνσεως. Όταν οι αναπτυσσόμενες επιταχύνσεις είναι πολύ μικρές, η φόρτιση που οφείλεται στις αδρανειακές δυνάμεις είναι επίσης μικρή και μπορεί να παραλειφθεί. Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος υπεισέρχεται μόνο ως παράμετρος και η συμπεριφορά του φορέα λέγεται *ψευδοδυναμική* ή *οιονεί στατική* (quasi-static). Οι αδρανειακές δυνάμεις, όπως θα δούμε, εμφανίζονται στις εξισώσεις κινήσεως του φορέα με τις δεύτερες παραγώγους των συνιστωσών των μετατοπίσεων ως προς το χρόνο. Κατά συνέπεια, στη δυναμική ανάλυση οι εξισώσεις που πρέπει να επιλυθούν για να προσδιοριστεί η παραμόρφωση και η ένταση του φορέα είναι διαφορικές εξισώσεις και όχι αλγεβρικές, όπως στην περίπτωση της Στατικής Αναλύσεως. Για τον λόγο αυτό ο τρόπος επιλύσεως των φορέων στη δυναμική ανάλυση είναι διαφορετικός από εκείνους που χρησιμοποιούνται για τη στατική επίλυση.

1.2 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΦΟΡΤΙΑ

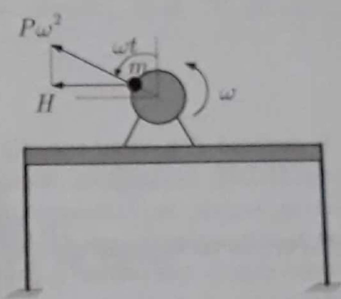
Όπως ήδη αναφέραμε, δυναμικά φορτία είναι εκείνα, των οποίων η ένταση ή και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Τέτοια είναι π.χ. τα φορτία που οφείλονται σε κίνηση μηχανών, σε έκρηξη, σε κίνηση οχημάτων, σε ανεμοπίεση κλπ. Η κίνηση της στηρίξεως ενός φορέα, κι' όταν ακόμα δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, παράγει επίσης δυναμική καταπόνηση. Τέτοια είναι η περίπτωση της σεισμικής κινήσεως του εδάφους. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση του εδάφους, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορεί να αναχθεί σε ένα ισοδύναμο δυναμικό φορτίο.

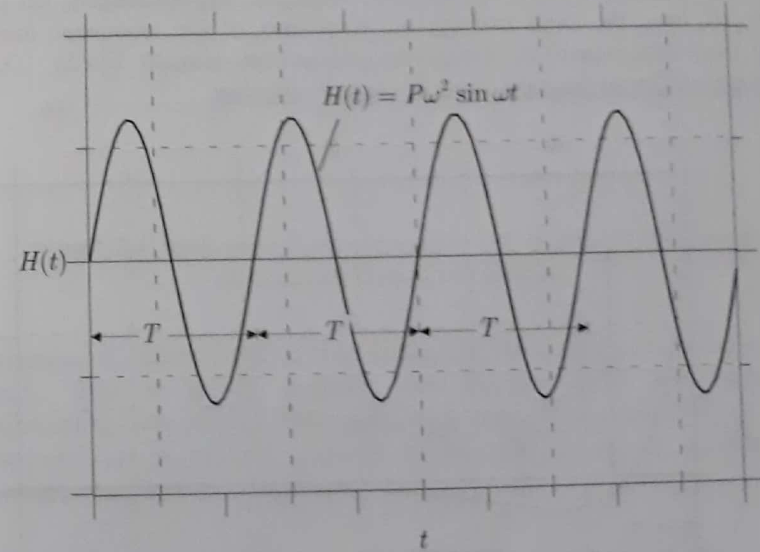


Σχήμα 1.2.1 Περιοδική φόρτιση.

Τα δυναμικά φορτία διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Στα *ντετερμινιστικά* ή *αιτιοκρατικά* φορτία και στα *τυχαία* ή

στοχαστικά. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα φορτία των οποίων η χρονική τους μεταβολή είναι γνωστή σ' όλη τη χρονική διάρκεια που εξετάζουμε





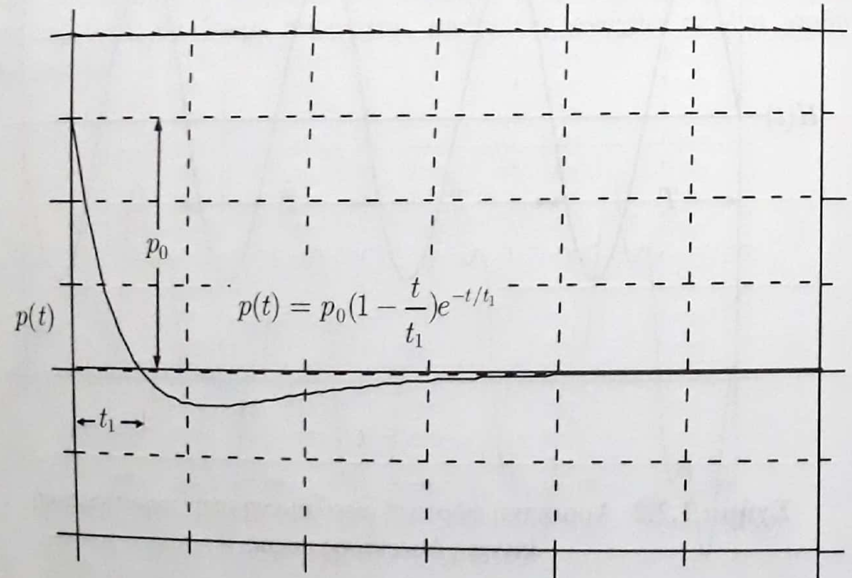
Σχήμα 1.2.2 Αρμονική φόρτιση οφειλόμενη στην περιστροφική κίνηση έκκεντρης μάζας.

τη δυναμική συμπεριφορά της κατασκευής και είναι δυνατό να παρασταθούν με μία συνήθη αναλυτική ή γενικευμένη (Dirac ή Heaviside) συνάρτηση. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα φορτία των οποίων η χρονική τους μεταβολή δεν είναι πλήρως γνωστή αλλά μπορούν να προσδιοριστούν με στοχαστικές μεθόδους. Τα φορτία που θα εξεταστούν στο παρόν σύγγραμμα Δυναμικής Αναλύσεως θα είναι αποκλειστικά ντετερμινιστικά.

Ένας βασικός διαχωρισμός των ντετερμινιστικών φορτίων είναι σε *π ε ρ ι ο δ ι κ ά* και *α π ε ρ ι ο δ ι κ ά*. Τα περιοδικά φορτία είναι εκείνα των οποίων το προφίλ της χρονικής μεταβολής επαναλαμβάνεται διαρκώς μετά από παρέλευση ενός σταθερού χρονικού διαστήματος T. Αυτά μπορούν να παρασταθούν με μία περιοδική συνάρτηση

$$p(t) = p(t + nT) \tag{1.2.1}$$

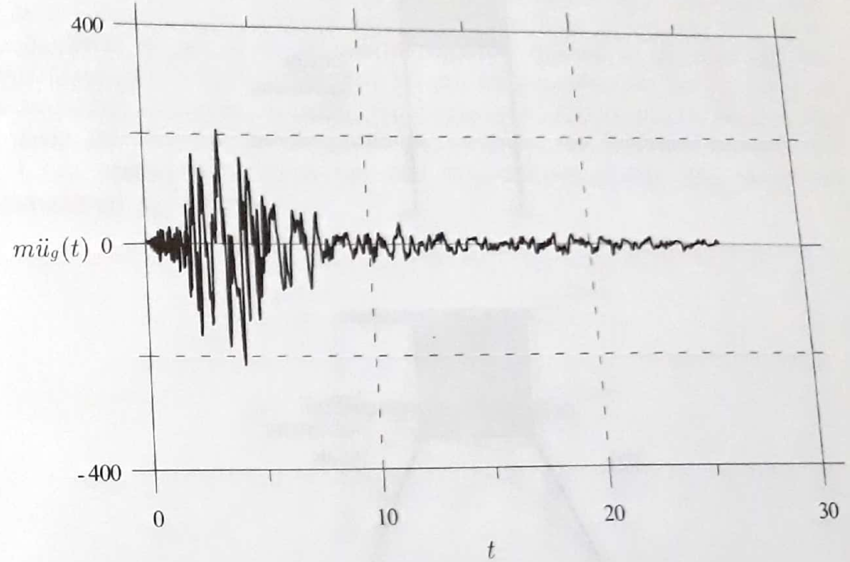
όπου n φυσικός αριθμός. Η σταθερά T, η οποία εκφράζει τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο ισχύει η σχέση (1.2.1), ονομάζεται περίοδος της φορτίσεως. Οι περιοδικές φορτίσεις οφείλονται κυρίως στη λειτουργία μηχανών που δημιουργούν κρούσεις ή έχουν έκκεντρα περιστρεφόμενες μάζες. Απεριοδικά είναι όλα τα μη περιοδικά φορτία. Τα δυναμικά φορτία των οποίων η χρονική διάρκεια είναι μικρή ονομάζονται *ω σ τ ι κ ά   φ ο ρ τ ί α* ή *π λ ή γ μ α τ α*. Πλήγματα είναι αυτά που οφείλονται σε κρούσεις ή σε εκρήξεις. Ο σεισμός αποτελεί ξεχωριστή φόρτιση, η οποία οφείλεται στην κίνηση του εδάφους στηρίξεως της κατασκευής και μπορεί να αναχθεί, όπως θα δούμε στο σχετικό Κεφάλαιο, σ' ένα ισοδύναμο δυναμικό φορτίο, όταν είναι γνωστό το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού. Στα Σχ. 1.2.1 έως 1.2.4 παρουσιάζονται διάφοροι τύποι δυναμικών φορτίων.



Σχήμα 1.2.3 Απεριοδική φόρτιση οφειλόμενη σε έκρηξη.

Αν εξετάσουμε από πιο κοντά τη στατική φόρτιση θα δούμε ότι και τα φορτία που ονομάζουμε στατικά είναι στην πραγματικότητα δυναμικά. Η ένταση τους αρχίζει

από μηδενική τιμή και φθάνει την τελική τιμή μετά από παρέλευση κάποιου χρόνου. Ο τρόπος επιβολής των στατικών φορτίων είναι τέτοιος ώστε οι



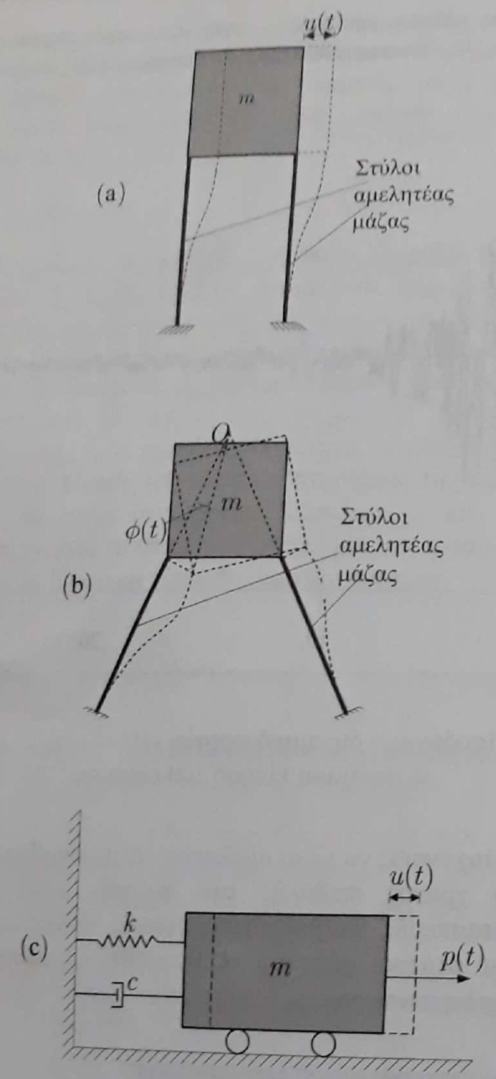
Σχήμα 1.2.4 Ισοδύναμο δυναμικό φορτίο $p(t) = m\ddot{u}_g(t)$ οφειλόμενο σε σεισμική κίνηση του εδάφους

αναπτυσσόμενες επιταχύνσεις να είναι αμελητέες. Αυτό συμβαίνει, όπως θα δούμε αργότερα, όταν ο χρόνος επιβολής του φορτίου είναι μεγαλύτερος της ιδιοπεριόδου της κατασκευής. Θα μπορούσε συνεπώς, η συμπεριφορά ενός φορέα, που υποβάλλεται σε στατική φόρτιση, να θεωρηθεί ως μερική περίπτωση της δυναμικής με αμελητέες επιταχύνσεις.

1.3 ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Για τη δυναμική ανάλυση των φορέων προσφέρεται κατ' εξοχήν η μέθοδος των μετακινήσεων ή μετατοπίσεων,* δηλαδή λαμβάνονται ως άγνωστοι οι μετακινήσεις διαφόρων σημείων της κατασκευής, οι οποίες, όταν προσδιορισθούν ως χρονικές συναρτήσεις, επιτρέπουν τον πλήρη καθορισμό της παραμορφώσεως και της εντάσεως του φορέα. Ο βαθμός ελευθερίας κινήσεως ισούται επομένως με το πλήθος των ανεξαρτήτων συνιστωσών μετακινήσεων που απαιτούνται για τον καθορισμό της γεωμετρίας του παραμορφωμένου φορέα σε κάθε χρονική στιγμή της κινήσεως. Ο βαθμός ελευθερίας κινήσεως του φορέα δεν ταυτίζεται πάντοτε με

* Ο όρος μετακίνηση ή μετατόπιση θα δηλώνει μεταφορική μετατόπιση ή στροφή.



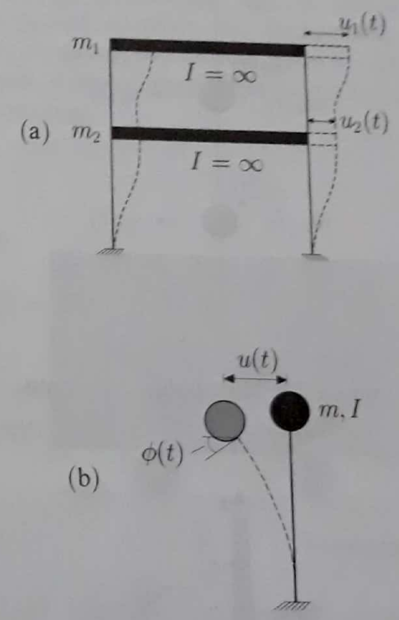
Σχήμα 1.3.1 Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας κινήσεως.

τον βαθμό κινηματικής αοριστίας του φορέα*. Ο τελευταίος ισούται με το πλήθος των δεσμεύσεων που πρέπει να επιβληθούν στο φορέα για να παγιωθεί κατά την έννοια της στατικής. Τα συστήματα που έχουν ένα βαθμό, δύο βαθμούς, πολλούς

* Στο εξής οι όροι κατασκευή και σύστημα θα είναι ισοδύναμοι και θα χρησιμοποιούνται χωρίς διάκριση αν και ο όρος σύστημα είναι γενικότερος. Ο φορέας μπορεί να ταυτίζεται με την κατασκευή ή να αποτελεί στοιχείο της.

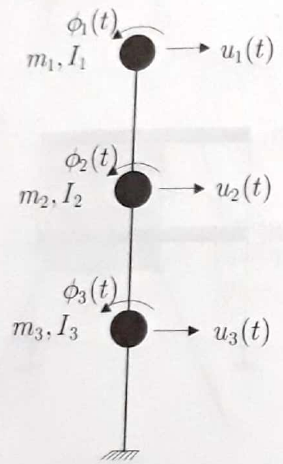
βαθμούς ή άπειρους βαθμούς ελευθερίας κινήσεως ονομάζονται αντιστοίχως *μονοβάθμια, διβάθμια, πολυβάθμια ή απειροβάθμια συστήματα.*

Για το σιλό του Σχ. 1.3.1a, με την παραδοχή ότι οι στύλοι έχουν αμελητέα μάζα και ότι δεν μεταβάλλεται το μήκος τους, αρκεί η οριζόντια μετατόπιση $u(t)$ για να προσδιορισθεί πλήρως η κίνηση του συστήματος. Δηλαδή το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας κινήσεως. Επίσης η κίνηση του υδατόπυργου του Σχ. 1.3.1b με την παραδοχή αμελητέας αξονικής παραμορφώσεως προσδιορίζεται πλήρως από τη γωνία $\phi(t)$. Για τον προσδιορισμό της κινήσεως του διώροφου πλαισίου του Σχ. 1.3.2a απαιτείται η γνώση των δύο ανεξάρτητων μεταξύ τους οριζόντιων μετατοπίσεων $u_1(t)$ και $u_2(t)$.

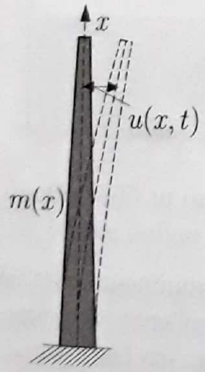


Σχήμα 1.3.2 Συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας κινήσεως.

Στο Σχ. 1.3.2b φαίνεται το προσομοίωμα ενός υδατόπυργου. Κατά την κίνηση η μάζα του μετατοπίζεται οριζόντια κατά $u(t)$ και στρέφεται κατά γωνία $\phi(t)$. Τα δύο αυτά γεωμετρικά μεγέθη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Το σύστημα αυτό έχει δύο βαθμούς ελευθερίας κινήσεως και μπορούν να διατυπωθούν δύο εξισώσεις κινήσεως για τον προσδιορισμό των γεωμετρικών μεγεθών $u(t)$ και $\phi(t)$. Εάν στο διβάθμιο αυτό σύστημα η μάζα m θεωρηθεί συγκεντρωμένη σ' ένα σημείο, τότε είναι δυνατό η στροφική ροπή αδρανείας να παραληφθεί. Στην περίπτωση αυτή μηδενίζεται η αδρανειακή δύναμη (ροπή) $I\ddot{\phi}(t)$ και κατά συνέπεια η μία από τις εξισώσεις κινήσεως από διαφορική μετατρέπεται σε αλγεβρική εξίσωση. Η απαλοιφή της γωνιακής συνιστώσας $\phi(t)$ δίδει μόνο μία εξίσωση κινήσεως ως προς $u(t)$, η οποία επιτρέπει τον καθορισμό της γεωμετρίας του συστήματος, και επομένως λέμε ότι το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας κινήσεως παρ' όλον ότι κατά τη στατική θεώρηση έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Ως συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι σ' ένα πολυβάθμιο σύστημα ο βαθμός ελευθερίας κινήσεως ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων εξισώσεων κινήσεως που μπορούν να διατυπωθούν κατά την εξέταση της κινήσεώς του.



Σχήμα 1.3.3 Πολυβάθμιο σύστημα.



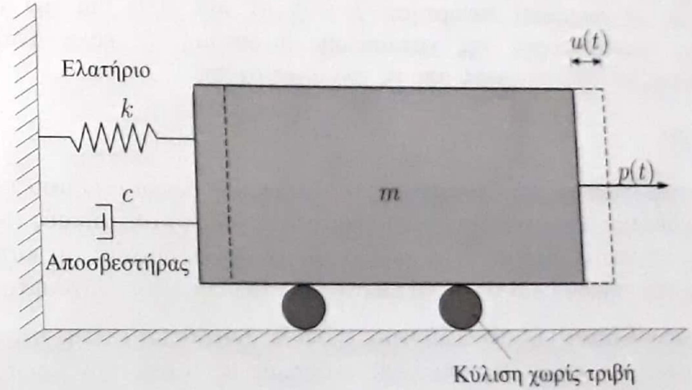
Σχήμα 1.3.4 Απειροβάθμιο σύστημα.

Στο Σχ. 1.3.3 βλέπουμε ένα πρόβολο του οποίου η μάζα θεωρείται συγκεντρωμένη σε τρία σημεία. Το σύστημα αυτό για κίνηση μέσα στο επίπεδο έχει τρεις βαθμούς

ελευθερίας κινήσεως, όταν αμεληθεί η στροφική αδράνεια των μαζών, και έξι βαθμούς ελευθερίας κινήσεως όταν ληφθεί κι' αυτή υπόψη. Είναι φανερό ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των σημείων στα οποία είναι συγκεντρωμένες οι μάζες τόσο αυξάνει και ο βαθμός ελευθερίας κινήσεως του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στην οριακή περίπτωση συστήματος με συνεχώς κατανεμημένη μάζα. Το σύστημα τότε έχει άπειρους βαθμούς ελευθερίας κινήσεως, όπως π.χ. ο πρόβολος του Σχ. 1.3.4.

1.4 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Βασικό ρόλο στη δυναμική ανάλυση έχει η διατύπωση του *δυναμικού προσομοιώματος* ή *δυναμικού μοντέλου* της πραγματικής κατασκευής. Είναι η δυσκολότερη φάση της δυναμικής αναλύσεως, αφού σ' αυτή υπεισέρχεται κριτικά η εμπειρία του μηχανικού, ο οποίος αποφασίζει και για το βαθμό προσεγγίσεως της συμπεριφοράς της κατασκευής.



Σχήμα 1.4.1 Προσομοίωμα μονοβάθμιου συστήματος.

Για ένα βαθμό ελευθερίας κινήσεως (μονοβάθμιο σύστημα) το δυναμικό μοντέλο αποτελείται από μία μάζα, ένα ελατήριο και ένα αποσβεστήρα. Αυτά αντιπροσωπεύουν αντιστοίχως το υλικό σώμα, τις ελαστικές δυνάμεις και τις δυνάμεις τριβής (απώλειες ενέργειας) της κατασκευής (βλ. Σχ. 1.4.1).

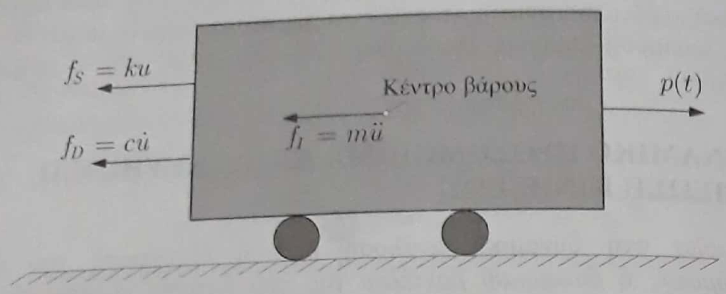
Εάν παραστήσουμε με $u(t)$ τη μετατόπιση του σώματος τη χρονική στιγμή t από τη θέση ισορροπίας, τότε κατά τη θεωρούμενη χρονική στιγμή ασκούνται πάνω στο σώμα οι ακόλουθες δυνάμεις (Σχ. 1.4.2)

(a) Η εξωτερική δύναμη $p(t)$

(b) Η ελαστική δύναμη f_S

(c) Η δύναμη αποσβέσεως f_D και

(d) Η αδρανειακή δύναμη f_I.



Σχήμα 1.4.2 Ελεύθερο σώμα με τις εξωτερικές δυνάμεις.

Η δύναμη f_S του ελατηρίου εξαρτάται από τη μετατόπιση u και εκφράζεται γενικώς με μη γραμμική συνάρτηση $f_S = f_S(u)$ του $u(t)$. Για την περίπτωση γραμμικής συμπεριφοράς της κατασκευής η δύναμη f_S είναι ανάλογη της μετατοπίσεως και παριστάνεται από τη γραμμική σχέση

$$f_S = ku \tag{1.4.1}$$

όπου k είναι σταθερά που εκφράζει την *ακαμψία ή δυσκαμψία* του ελατηρίου, δηλαδή τη δύναμη που απαιτείται για μοναδιαία μεταβολή του μήκους του, έχει δε διαστάσεις kN/m. Η δύναμη f_S εκφράζει την ελαστική δύναμη της κατασκευής, αντιτίθεται στην κίνηση και τείνει να επαναφέρει το σώμα στην αρχική του θέση.

Η δύναμη αποσβέσεως f_D είναι δύναμη, η οποία αντιτίθεται επίσης στην κίνηση. Η δύναμη αυτή εκφράζει τις απώλειες ενέργειας εξ αιτίας των εσωτερικών ή εξωτερικών τριβών της κατασκευής. Η ακριβής έκφραση της δυνάμεως αυτής συναρτήσει των παραμέτρων της κινήσεως και των ιδιοτήτων του υλικού της κατασκευής είναι πολύπλοκη και αποτελεί αντικείμενο ιδιαίτερης μελέτης. Η απλούστερη έκφραση της, είναι η ιξώδης απόσβεση, κατά την οποία η δύναμη αποσβέσεως είναι ανάλογη της ταχύτητας κινήσεως, δηλαδή

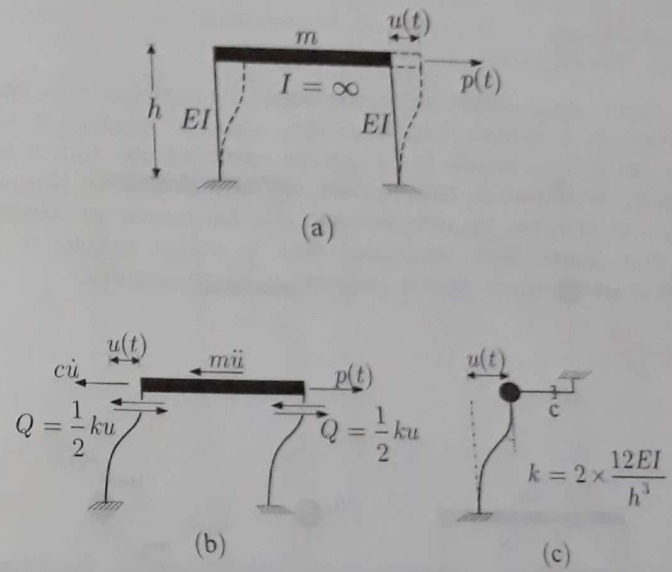
$$f_D = c\dot{u} \tag{1.4.2}$$

όπου c είναι μία σταθερά που μπορεί να υπολογισθεί πειραματικά. Επειδή το έργο της δυνάμεως αυτής μετατρέπεται σε θερμότητα, *η δύναμη αποσβέσεως δεν είναι συντηρητική δύναμη*. Είναι η δύναμη η οποία κάνει το εύρος των ταλαντώσεων να φθίνει και επαναφέρει στην κατάσταση ηρεμίας ένα σύστημα που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση. Σχηματικά η ιξώδης απόσβεση παριστάνεται στο μοντέλο

του μονοβάθμιου συστήματος με τον αποσβεστήρα, ο οποίος αποτελείται από ένα δοχείο με υγρό μέσα στο οποίο κινείται ένα διάτρητο έμβολο.

Η δύναμη f_I είναι η δύναμη αδρανείας. Η δύναμη αυτή εξαρτάται από τη μάζα m του συστήματος και από την επιτάχυνσή του $\ddot{u}$. Εκφράζεται δε από τη σχέση

$$f_I = m\ddot{u} \tag{1.4.3}$$



Σχήμα 1.4.3 Δίστυλο πλαίσιο με άπειρη ροπή αδρανείας του ζυγώματος.

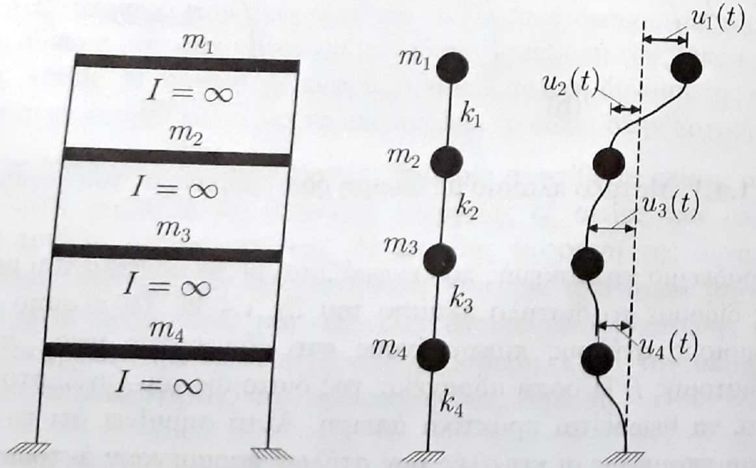
Ως απλό παράδειγμα κατασκευής που εκφράζεται με το μοντέλο του μονοβάθμιου συστήματος δίδουμε το δίστηλο πλαίσιο του Σχ. 1.4.3a. Το πλαίσιο αποτελείται από δύο όμοιους στύλους πακτωμένους στο έδαφος με ύψος h και ροπή αδρανείας διατομής I. Η ροπή αδρανείας της διατομής του ζυγώματος είναι πολύ μεγάλη ώστε να θεωρείται πρακτικά άπειρη. Αυτό σημαίνει ότι το ζύγωμα δεν κάμπτεται και επομένως οι κεφαλές των στύλων παραμένουν άστρεπτες κατά την παραμόρφωση του πλαισίου. Επίσης, η μάζα των στύλων συγκριτικά με τη μάζα του ζυγώματος είναι αμελητέα. Ως εκ τούτου, ως μάζα του συστήματος λαμβάνεται πρακτικά μόνο η μάζα του ζυγώματος και θεωρείται συγκεντρωμένη στη στάθμη του. Το πλαίσιο υποβάλλεται σε μία οριζόντια δύναμη $p(t)$ στη στάθμη του ζυγώματος, η οποία εξαναγκάζει το πλαίσιο σε κίνηση. Με παράλειψη της αξονικής παραμορφώσεως των στύλων και του ζυγώματος, πράγμα το οποίο είναι επιτρεπτό για τα πλαίσια, η μόνη δυνατή κίνηση του συστήματος είναι η κοινή μετατόπιση $u(t)$ των κεφαλών των στύλων. Η στροφή του ζυγώματος ως στερεού σώματος αποκλείεται, διότι τούτο συνεπάγεται μεταβολή του μήκους των στύλων.

Από το Σχ. 1.4.3b βλέπουμε ότι οι ελαστικές δυνάμεις που αντιτίθενται στην εκτροπή του ζυγώματος από τη θέση στατικής ισορροπίας είναι οι τέμνουσες δυνάμεις Q στις κεφαλές των στύλων. Οι δυνάμεις αυτές δίδονται από τη γνωστή σχέση της στατικής

$$Q = \frac{12EI}{h^3}\,u(t) \tag{1.4.4}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, I η ροπή αδρανείας της διατομής των στύλων και h το ύψος τους. Το μέγεθος $12EI/h^3$ εκφράζει τη μεταφορική ακαμψία του στύλου, δηλαδή τη δύναμη που απαιτείται για σχετική μετατόπιση της κεφαλής του στύλου ως προς τη βάση του κατά μονάδα. Οι τέμνουσες αυτές δυνάμεις είναι ανάλογες της μετατοπίσεως $u(t)$ και τείνουν να επαναφέρουν το πλαίσιο στην αρχική θέση ισορροπίας. Άρα οι στύλοι παίζουν το ρόλο του ελατηρίου του μονοβάθμιου προσομοιώματος με δείκτη ακαμψίας

$$k = 2\frac{12EI}{h^3} \tag{1.4.5}$$

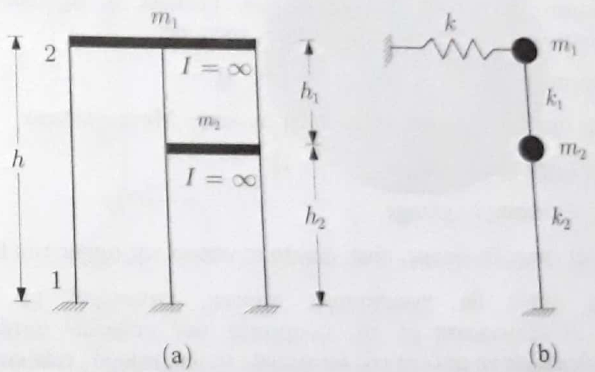


Σχήμα 1.4.4 Τετραώροφο διατμητικό πλαίσιο και το δυναμικό προσομοίωμά του χωρίς απόσβεση.

Η αδρανειακή δύναμη δίδεται από τη σχέση $f_I = m\ddot{u}$, ενώ η δύναμη αποσβέσεως από τη σχέση $f_D = c\dot{u}$. Ένα άλλο προσομοίωμα που προσφέρεται για την παράσταση του μονώροφου πλαισίου φαίνεται στο Σχ. 1.4.3c. Αυτό αποτελείται

από μία μάζα m τοποθετημένη στην κεφαλή ενός στύλου του οποίου η μεταφορική ακαμψία ισούται με το άθροισμα των μεταφορικών ακαμψιών των στύλων του πλαισίου. Κατά την κίνηση η κεφαλή του στύλου μετατοπίζεται χωρίς να στρέφεται. Το προσομοίωμα αυτό είναι χρήσιμο για την παράσταση πολυωρόφων διατμητικών πλαισίων (βλ. Σχ. 1.4.4) στα οποία οι κεφαλές των στύλων πρακτικώς μετατοπίζονται χωρίς να στρέφονται και οι μάζες θεωρούνται συγκεντρωμένες στις στάθμες του πλαισίου.

Στο Σχ. 1.4.5a βλέπουμε ένα διώροφο διατμητικό πλαίσιο. Στο προσομοίωμα του Σχ. 1.4.5b διευκολύνει να παραστήσουμε το στύλο 1-2 με ελατήριο που έχει ακαμψία $k = 12EI/h^3$. Οι ακαμψίες k_1 και k_2 περιλαμβάνουν μόνο τις ακαμψίες των στύλων ύψους h_1 και h_2, αντιστοίχως.



Σχήμα 1.4.5 Διώροφο πλαίσιο και το προσομοίωμα του χωρίς απόσβεση.

Με δεδομένο το δυναμικό προσομοίωμα της κατασκευής διατυπώνεται η εξίσωση κινήσεως του συστήματος. Για το μονοβάθμιο σύστημα η εξίσωση κινήσεως προκύπτει αμέσως με εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα, όπως αυτός εφαρμόζεται για κίνηση υλικού σημείου. Δηλαδή

$$m\ddot{u} = F \tag{1.4.6}$$

όπου

$$F = p(t) - f_S - f_D \tag{1.4.7}$$

είναι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων. Η σχέση (1.4.6) με τη βοήθεια των σχέσεων (1.4.1), (1.4.2) και (1.4.7) γράφεται

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{1.4.8}$$

Η ανωτέρω είναι η *εξίσωση κινήσεως* του συστήματος. Η εξίσωση κινήσεως εκφράζει τη δυναμική ισορροπία του συστήματος και είναι διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ως προς την άγνωστη εξαρτημένη μεταβλητή $u(t)$. Η επίλυση της εξισώσεως δίδει τη μετατόπιση του συστήματος συναρτήσει του χρόνου. Για πολυβάθμια συστήματα διατυπώνονται εξισώσεις κινήσεως ισάριθμες με τους βαθμούς ελευθερίας κινήσεως. Οι συνιστώσες μετακινήσεως του κινούμενου συστήματος (μεταφορικές ή στροφικές) θα αναφέρονται στο εξής και ως *δυναμικά βέλη*.

Η διατύπωση των εξισώσεων κινήσεως των πολυβάθμιων ή ακόμη και πολύπλοκων μονοβάθμιων συστημάτων δεν είναι πάντοτε εύκολη με απ' ευθείας εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα. Απαιτεί προχωρημένες γνώσεις της δυναμικής του στερεού και παραμορφωτού σώματος και ιδιαίτερη εγκράτεια των διάφορων ειδικών μεθόδων εκ μέρους του μηχανικού. Γενικώς οι εξισώσεις κινήσεως μπορούν να διατυπωθούν με τους ακόλουθους τρόπους:

(a) Με την αρχή του d' Alembert

(b) Με την αρχή των Δυνατών Έργων ή Δυνατών Μετατοπίσεων

(c) Με την αρχή του Hamilton

(d) Με τις εξισώσεις Lagrange

Η περίπτωση (d), όπως θα δούμε, είναι άμεση συνέπεια της αρχής του Hamilton.

Τις μεθόδους αυτές θα γνωρίσουμε αμέσως κατωτέρω με κατάλληλα παραδείγματα. Η εξοικείωση με την εφαρμογή των μεθόδων αυτών αποτελεί βασική προϋπόθεση για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς των κατασκευών.

1.5 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΜΕ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΟΥ D' ALEMBERT

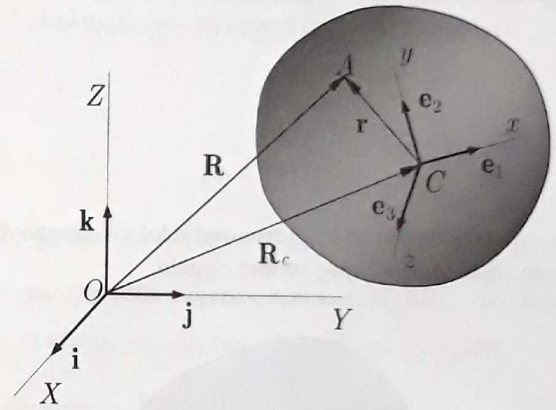
Στην πραγματικότητα πρόκειται για εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στην κίνηση στερεού σώματος (βλ. Παράρτημα Α). Ο Νόμος του Νεύτωνα για υλικό σημείο μάζας m μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \tag{1.5.1}$$

όπου $\mathbf{F}$ είναι η συνισταμένη όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν επί του υλικού σημείου και $\mathbf{a}$ η επιτάχυνσή του ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Εάν θεωρήσουμε ότι ο όρος $-m\mathbf{a}$ παριστάνει μία άλλη δύναμη, την οποία θα ονομάζουμε στο εξής *αδρανειακή δύναμη* ή *ενεργή αντίστροφη δύναμη*, τότε η εξίσωση (1.5.1) εκφράζει ότι κατά την κίνηση το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων, εξωτερικών και αδρανειακών, ισούται με μηδέν. Αλλά ο μηδενισμός της συνισταμένης όλων των δυνάμεων είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη της στατικής ισορροπίας του υλικού σημείου. Δηλαδή, κατά κάποια έννοια το πρόβλημα της δυναμικής ανάγεται σε πρόβλημα στατικής. Έτσι μπορεί να διατυπωθεί η ακόλουθη πρόταση, γνωστή ως αρχή d'Alembert.

Οι νόμοι της στατικής ισορροπίας μπορούν να εφαρμοσθούν σε δυναμικά συστήματα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, εάν στις πραγματικές εξωτερικές δυνάμεις συμπεριληφθούν και οι αδρανειακές.

Για στερεό σώμα μάζας m η κίνηση ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς X,Y,Z αναλύεται σε μία μεταφορική κίνηση του κέντρου βάρους του και μία περιστροφική κίνηση γύρω απ' αυτό (Σχ. 1.5.1).



Σχήμα 1.5.1 Στερεό σώμα κινούμενο ως προς το σύστημα X,Y,Z.

Εάν παραστήσουμε με $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ το διάνυσμα θέσεως ενός υλικού σημείου A του σώματος ως προς ένα αδρανειακό σύστημα X,Y,Z και με $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ το διάνυσμα θέσεως ως προς το σύστημα x,y,z που διέρχεται από το κέντρο βάρους C του σώματος χωρίς να περιστρέφεται μαζί με αυτό (βλ. Σχ. 1.5.1), τότε μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις κινήσεως του σώματος ως εξής

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}}_c \tag{1.5.2a}$$

$$\mathbf{M}_c = \dot{\mathbf{H}}_c \tag{1.5.2b}$$

όπου $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ είναι συνισταμένη εξωτερική δύναμη, $\ddot{\mathbf{R}}_c = \ddot{X}_c\mathbf{i} + \ddot{Y}_c\mathbf{j} + \ddot{Z}_c\mathbf{k}$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου βάρους C, $\mathbf{M}_C = M_x\mathbf{e}_1 + M_y\mathbf{e}_2 + M_z\mathbf{e}_3$ είναι η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το κέντρο βάρους C του σώματος και $\dot{\mathbf{H}}_c$ είναι η ταχύτητα μεταβολής της στροφορμής $\mathbf{H}_c$ του σώματος ως προς το ίδιο σημείο, η οποία δίδεται από τη σχέση

$$\dot{\mathbf{H}}_c = \iiint_V \mathbf{r} \times \rho \ddot{\mathbf{r}} dV \tag{1.5.3}$$

όπου $\rho = \rho(x, y, z)$ είναι η πυκνότητα του σώματος.

Η σχέση (1.5.2a) είναι η εξίσωση της μεταφορικής κινήσεως και η σχέση (1.5.2b) η εξίσωση της περιστροφικής κινήσεως. Η εξίσωση (1.5.2b) διατηρεί τη μορφή της και στην περίπτωση που η περιστροφική κίνηση εξετασθεί γύρω από ένα σημείο O που είναι σταθερό ως προς το αδρανειακό σύστημα.

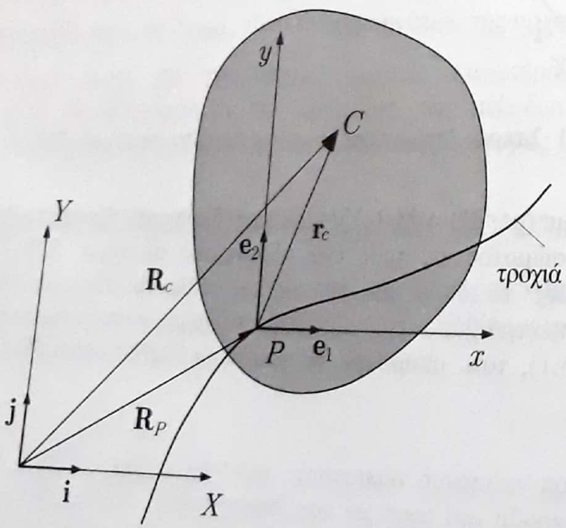
Όταν εξετάζουμε την κίνηση επιπέδου σώματος μέσα στο επίπεδο του οι εξισώσεις (1.5.2a,b) λαμβάνουν τη μορφή (Βλ. Παράρτημα Α)

$$F_x = m\ddot{X}_c \tag{1.5.4a}$$

$$F_y = m\ddot{Y}_c \tag{1.5.4b}$$

$$M_c = I_c\dot{\omega} \tag{1.5.4c}$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής περί το κέντρο βάρους και I_c είναι η πολική ροπή αδρανείας ως προς το ίδιο σημείο.



Σχήμα 1.5.2 Επίπεδο σώμα (δίσκος) κινούμενο μέσα στο επίπεδο X, Y. Το σύστημα Pxy κινείται με το P χωρίς να περιστρέφεται.

Πολλές φορές είναι σκόπιμο να αναφέρουμε την κίνηση ως προς ένα σημείο P του σώματος το οποίο δεν είναι το κέντρο βάρους (Σχ. 1.5.2). Στην περίπτωση αυτή απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή διότι οι εξισώσεις (1.5.2a,b) λαμβάνουν τη μορφή

$$\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}}_P = m\ddot{\mathbf{r}}_c \tag{1.5.5a}$$

$$\mathbf{M}_P - \mathbf{r}_c \times m\ddot{\mathbf{R}}_P = \dot{\mathbf{H}}_P \tag{1.5.5b}$$

όπου $\mathbf{R}_P$ είναι το διάνυσμα θέσεως του σημείου P, το οποίο κινείται μαζί με το σώμα, και $\mathbf{r}_C$ το διάνυσμα θέσεως του κέντρου βάρους ως προς το P. $\mathbf{M}_P, \dot{\mathbf{H}}_P$ είναι, αντιστοίχως, η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων και η ταχύτητα μεταβολής της στροφορμής ως προς το σημείο P.

Για κίνηση επιπέδου σώματος μέσα στο επίπεδο του και όταν εξετάζονται μικρές μετατοπίσεις, όπως συμβαίνει στη θεωρία των γραμμικών ταλαντώσεων, οι εξισώσεις (1.5.5a,b) λαμβάνουν τη μορφή (Βλ. Παράρτημα Α).

$$F_x = m(\ddot{X}_P - y_c\dot{\omega}) \tag{1.5.6a}$$

$$F_y = m(\ddot{Y}_P + x_c\dot{\omega}) \tag{1.5.6b}$$

$$M_P = m(x_c\ddot{Y}_P - y_c\ddot{X}_P) + I_P\dot{\omega} \tag{1.5.6c}$$

Η κινητική ενέργεια επίπεδου σώματος που κινείται μέσα στο επίπεδο του δίδεται

(a) ως προς το κέντρο βάρους του σώματος από τη σχέση

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2) + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \tag{1.5.7}$$

(b) ως προς τυχόν σημείο P του σώματος από τη σχέση (θεώρημα König)

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{X}_P^2 + \dot{Y}_P^2) + \frac{1}{2}I_P\omega^2 + m(x_c\dot{Y}_P - y_c\dot{X}_P)\omega \tag{1.5.8}$$

Το διάνυσμα μετατοπίσεως από την αρχή της κινήσεως είναι

$$u = \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0) = u(t)\mathbf{i} + v(t)\mathbf{j} \tag{1.5.9}$$

όπου

$$u = X(t) - X(0), \qquad v = Y(t) - Y(0) \tag{1.5.10}$$

Επίσης, εάν η $\phi(t)$ παριστάνει τη μεταβολή της στροφής στο ίδιο διάστημα και επειδή $\ddot{X} = \ddot{u}$, $\ddot{Y} = \ddot{v}$, $\omega = \dot{\phi}$, $\dot{\omega} = \ddot{\phi}$, οι σχέσεις (1.5.4) γράφονται ως εξής

$$F_x = m\ddot{u}_c \tag{1.5.11a}$$

$$F_y = m\ddot{v}_c \tag{1.5.11b}$$

$$M_c = I_c\ddot{\phi} \tag{1.5.11c}$$

ή υπό μητρωϊκή μορφή

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{m}_c\ddot{\mathbf{U}}_c \tag{1.5.12}$$

όπου

$$\mathbf{F}_c = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_c \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{U}_c = \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \\ \phi \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{m}_c = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{bmatrix} \tag{1.5.13}$$

είναι, αντιστοίχως, το διάνυσμα της δυνάμεως, το διάνυσμα της μετατοπίσεως και το μητρώο μάζας του σώματος.

Ομοίως, οι σχέσεις (1.5.6) γράφονται

$$F_x = m(\ddot{u}_p - y_c\ddot{\phi}) \tag{1.5.14a}$$

$$F_y = m(\ddot{v}_p + x_c\ddot{\phi}) \tag{1.5.14b}$$

$$M_p = I_p\ddot{\phi} + m(x_c\ddot{v}_p - y_c\ddot{u}_p) \tag{1.5.14c}$$

ή υπό μητρωϊκή μορφή

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{m}_p\ddot{\mathbf{U}}_p \tag{1.5.15}$$

όπου

$$\mathbf{F}_p = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_p \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{U}_p = \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ \phi \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{m}_p = \begin{bmatrix} m & 0 & -my_c \\ 0 & m & mx_c \\ -my_c & mx_c & I_p \end{bmatrix} \tag{1.5.16}$$

Δέον να σημειωθεί ότι το μητρώο μάζας δεν είναι διαγώνιο, όταν το σημείο αναφοράς δεν είναι το κέντρο βάρους.

Τέλος, οι σχέσεις (1.5.7) και (1.5.8) γράφονται

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_c^T\mathbf{m}_c\dot{\mathbf{U}}_c \tag{1.5.17}$$

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{u}_p^2 + \dot{v}_p^2) + \frac{1}{2}I_p\dot{\phi}^2 + m(x_c\dot{u}_p - y_c\dot{v}_p)\dot{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_p^T\mathbf{m}_p\dot{\mathbf{U}}_p \tag{1.5.18}$$

Οι εξισώσεις ως προς το σημείο P μπορούν να προκύψουν από αυτές ως προς το σημείο C δια μετασχηματισμού των μετατοπίσεων και δυνάμεων από το σημείο C στο P (βλ. Παράγραφο 10.7).

Παράδειγμα 1.5.1

Ορθογωνική πλάκα σταθερού πάχους και ολικής μάζας m στηρίζεται όπως στο Σχ. Π1.1a. Η στήριξη στο O είναι άρθρωση. Να διατυπωθεί η εξίσωση κινήσεως του συστήματος με τη μέθοδο ισορροπίας των δυνάμεων. Οι μετακινήσεις θεωρούνται μικρές ώστε να ισχύει η γραμμική θεωρία.

Λύση

Η μόνη δυνατότητα κινήσεως του σώματος είναι η περιστροφή του μέσα στο επίπεδο περί το σημείο O. Άρα το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας κινήσεως. Ως συνιστώσα μετακινήσεως μπορούμε να λάβουμε, είτε τη γωνία στροφής περί το O, είτε τη μεταφορική μετατόπιση ενός σημείου, π.χ. την κατακόρυφη βύθιση $u(t)$ του σημείου B, η οποία προφανώς σχετίζεται με τη γωνία $\phi(t)$, δηλαδή

$$u(t) = a\tan\phi(t) \simeq a\phi(t) \tag{1}$$

διότι δεχόμαστε μικρές παραμορφώσεις και η γωνία ϕ είναι μικρή.

Οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω στο σώμα (βλ. Σχ. Π1.1b) είναι:

Το βάρος του σώματος $W = mg$

Η δύναμη του ελατηρίου $\quad f_S = k(AA') = \frac{2}{3}ku$

Η αδρανειακή δύναμη στο κέντρο βάρους $\quad f_{Ix} = m\frac{d^2}{dt^2}(KK')_x = \frac{1}{2}m\frac{b}{a}\ddot{u}$

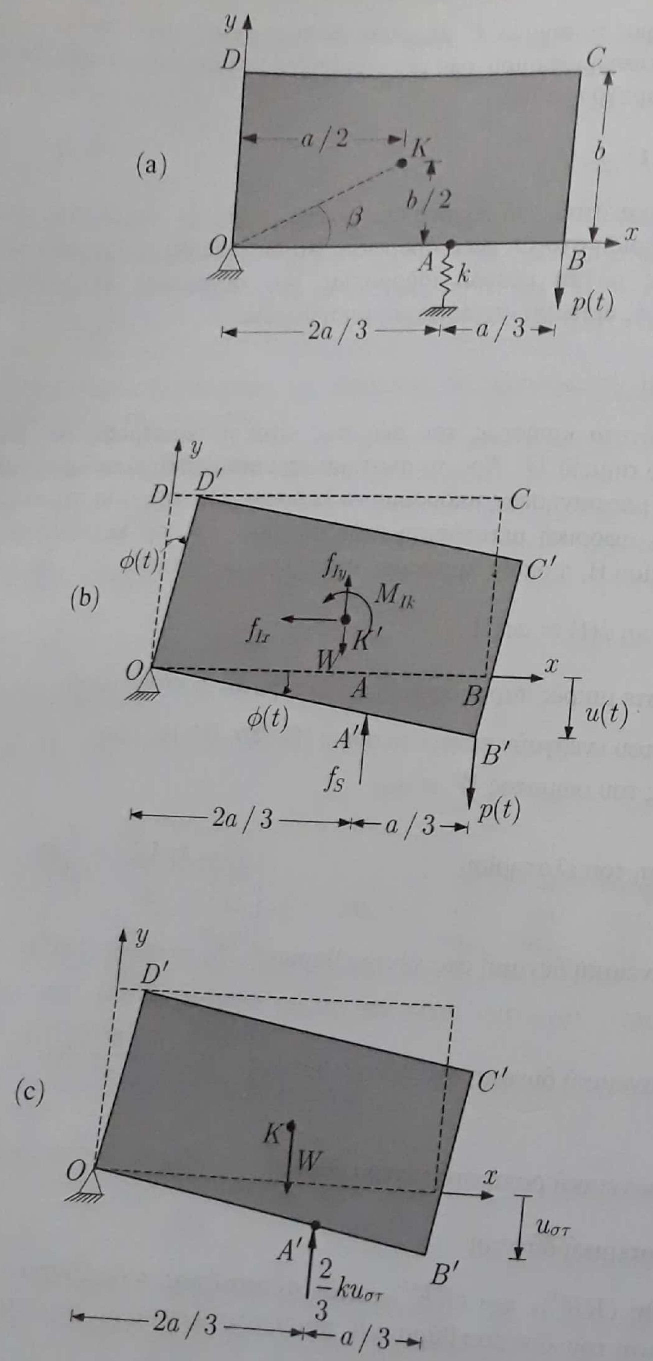
Η αδρανειακή δύναμη στο κέντρο βάρους $\quad f_{Iy} = m\frac{d^2}{dt^2}(KK')_y = \frac{1}{2}m\ddot{u}$

Η αδρανειακή ροπή στο κέντρο βάρους $\quad M_{IK} = I_K\ddot{\phi} = I_K\frac{\ddot{u}}{a}$

Η εξωτερική δύναμη $\quad p(t)$

Τα μεγέθη $(KK')_x$ και $(KK')_y$ είναι, αντιστοίχως, η οριζόντια και η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου βάρους K και υπολογίζονται με γεωμετρική θεώρηση από τις σχέσεις

$$(KK')_x = (OK)\phi\sin\beta = \frac{1}{2}\frac{b}{a}u$$



Σχήμα Π1.1

$$(KK')_y = (OK)\phi\cos\beta = \frac{1}{2}u$$

Η εξίσωση κινήσεως θα προκύψει από την ισορροπία των δυνάμεων ως προς το σημείο O. Άρα

$$W\frac{a}{2} - f_S\frac{2a}{3} - f_{Ix}\frac{b}{2} - f_{Iy}\frac{a}{2} - M_{IK} + p(t)a = 0$$

ή

$$\frac{m\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] + I_K}{a^2}\ddot{u} + \frac{4}{9}ku = \frac{W}{2} + p(t) \tag{2}$$

Από τον τύπο του *Steiner* έχουμε

$$I_O = m\left[\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] + I_K = m\frac{a^2 + b^2}{3} \tag{3}$$

όπου I_O είναι η ροπή αδρανείας της ορθογωνικής πλάκας ως προς το σημείο O.

Με τη βοήθεια της σχέσεως (3) η εξίσωση κινήσεως γράφεται

$$m\frac{a^2 + b^2}{3a^2}\ddot{u} + \frac{4}{9}ku = \frac{W}{2} + p(t) \tag{4}$$

Στην ανωτέρω σχέση μπορούμε να καταλήξουμε, αν αντί των αδρανειακών δυνάμεων f_{Ix}, f_{Iy} και M_{IK} ως προς το κέντρο βάρους K λάβουμε την αδρανειακή ροπή M_{IO} απ' ευθείας ως προς το σημείο περιστροφής O χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.5.6c) για $\ddot{X}_P = \ddot{Y}_P = 0$. Δηλαδή

$$M_{IO} = I_O\ddot{\phi} = I_O\frac{\ddot{u}}{a}$$

Από την εξίσωση κινήσεως (4) είναι δυνατό να απαλείψουμε το βάρος W του σώματος αν μετρήσουμε το δυναμικό βέλος από τη θέση στατικής ισορροπίας. Για το σκοπό αυτό θέτουμε

$$u(t) = u_{\sigma\tau} + \bar{u}(t) \tag{5}$$

όπου $u_{\sigma\tau}$ είναι το στατικό βέλος και $\bar{u}(t)$ το δυναμικό βέλος μετρούμενο από τη θέση στατικής ισορροπίας. Από τη στατική ισορροπία της πλάκας ως προς το σημείο O με φορτίο μόνο το βάρος της (βλ. Σχ. Π1.1c) έχουμε

$$\frac{4}{9} k a u_{\sigma\tau} = W \frac{a}{2} \tag{6}$$

Με την παρατήρηση ότι $\ddot{u}_{\sigma\tau} = 0$, διότι $u_{\sigma\tau}$ είναι σταθερό, η εξίσωση κινήσεως (4) με την βοήθεια των εξισώσεων (5) και (6) γράφεται

$$m * \ddot{\overline{u}} + k * \overline{u} = p * (t) \tag{7}$$

όπου

$$m^* = m \frac{a^2 + b^2}{3a^2}, \qquad k^* = \frac{4}{9} k, \qquad p^*(t) = p(t)$$

Η εξίσωση (7) είναι της μορφής (1.4.8) και αποτελεί τη ζητούμενη εξίσωση κινήσεως. Τα μεγέθη m^*, k^*, που έχουν διαστάσεις μάζας και ακαμψίας ονομάζονται αντιστοίχως γενικευμένη μάζα και γενικευμένη ακαμψία του συστήματος.

Εάν αντί της $\overline{u}(t)$ ληφθεί ως συνιστώσα μετακινήσεως η στροφή $\overline{\phi}(t)$ μετρούμενη από τη θέση στατικής ισορροπίας η αντίστοιχη εξίσωση κινήσεως προκύπτει από την (7) με $\overline{u} = \overline{\phi} a$ ως

$$Io\ddot{\overline{\phi}} + \frac{4}{9} k a^2 \overline{\phi} = p(t) a \tag{8}$$

Παράδειγμα 1.5.2

Να διατυπωθεί η εξίσωση κινήσεως του πλαισίου του Σχ. Π1.2a με τη μέθοδο ισορροπίας των δυνάμεων. Η μάζα του ζυγώματος BC αμελείται, ενώ η ροπή αδρανείας του στύλου είναι πρακτικά άπειρη.

Λύση

Η μόνη δυνατή κίνηση του τοιχίου είναι η στροφή του ως στερεού σώματος περί την άρθρωση A. Στο Σχ. Π1.2b φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο τοιχίο τη χρονική στιγμή t. Είναι:

Η ελαστική ροπή λόγω στροφής του άκρου B της δοκού $\qquad M_S = \frac{4EI}{1.5L}\phi$

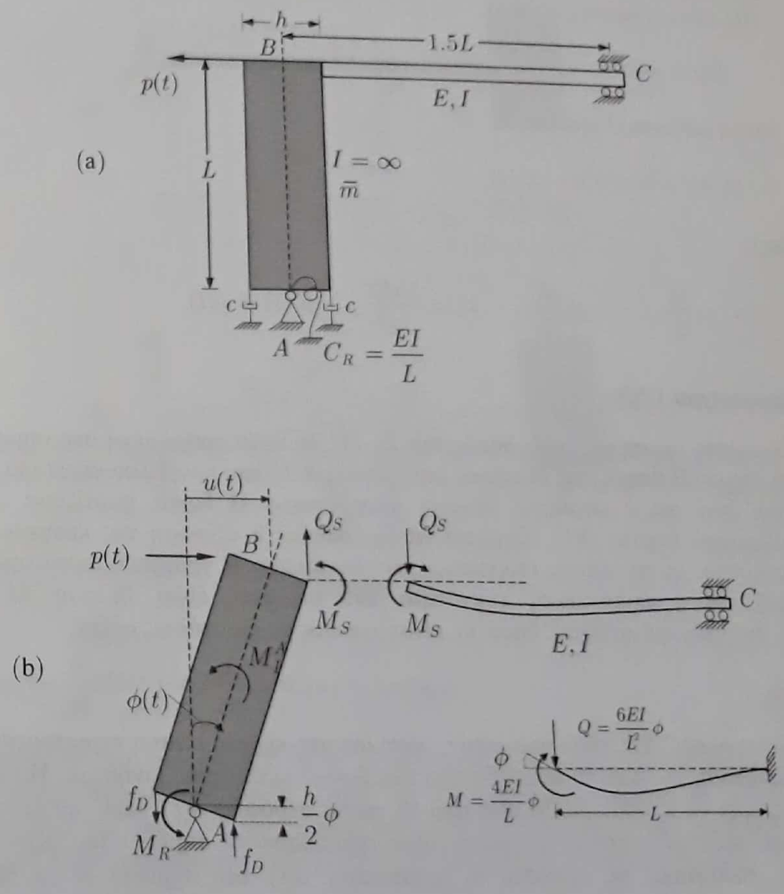
Η ελαστική ροπή από το στροφικό ελατήριο $\qquad M_R = C_R \phi = \frac{EI}{L}\phi$

Η αδρανειακή ροπή ως προς το A $(m = \overline{m}L)$ $\qquad M_I^A = I_A \ddot{\phi} = \frac{mL^2}{3}\ddot{\phi}$

Η ελαστική τέμνουσα λόγω στροφής του άκρου B της δοκού B $\qquad Q_S = \frac{6EI}{(1.5L)^2}\phi$

Η δύναμη αποσβέσεως $\qquad f_D = c\frac{h}{2}\dot{\phi}$

Το εξωτερικό φορτίο $\qquad p(t)$



Σχήμα Π1.2.

Ο μηδενισμός των ροπών ως προς το A δίδει

$$M_I^A + M_S + M_R + Q_S \frac{h}{2} + f_D h - p(t)L = 0$$

ή

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\phi} + \frac{ch^2}{2}\dot{\phi} + \frac{15EI}{3L}\phi = p(t)L \qquad (1)$$

Εάν ληφθεί ως συνιστώσα μετακινήσεως του συστήματος η οριζόντια μετατόπιση $u(t)$ του ζυγώματος, δηλαδή

$$u(t) = L\phi(t)$$

τότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$m^*\ddot{u} + c^*\dot{u} + k^*u = p^*(t) \qquad (2)$$

όπου

$$m^* = \frac{m}{3}, \quad c^* = \frac{ch^2}{2L^2}, \quad k^* = \frac{15EI}{3L^3}, \quad p^*(t) = p(t)$$

Παράδειγμα 1.5.3

Η άκαμπτη μονοπροέχουσα δοκός του Σχ. Π1.3a είναι αρθρωμένη στο σημείο A. Στο σημείο B στηρίζεται ελαστικά και στο άκρο F του προβόλου φέρει μία μάζα πάνω στην οποία επενεργεί δύναμη αποσβέσεως. Η δοκός φορτίζεται με το ομοιόμορφο φορτίο $\overline{p}(t)$. Ζητείται να διατυπωθεί η εξίσωση της κινήσεως του συστήματος με τη μέθοδο ισορροπίας των δυνάμεων. Η γραμμική πυκνότητα της δοκού και η επιφανειακή πυκνότητα του σώματος είναι $\overline{m} = m/3L$ και $\gamma = 2m/L^2$, αντιστοίχως, όπου m είναι μέγεθος με διαστάσεις μάζας.

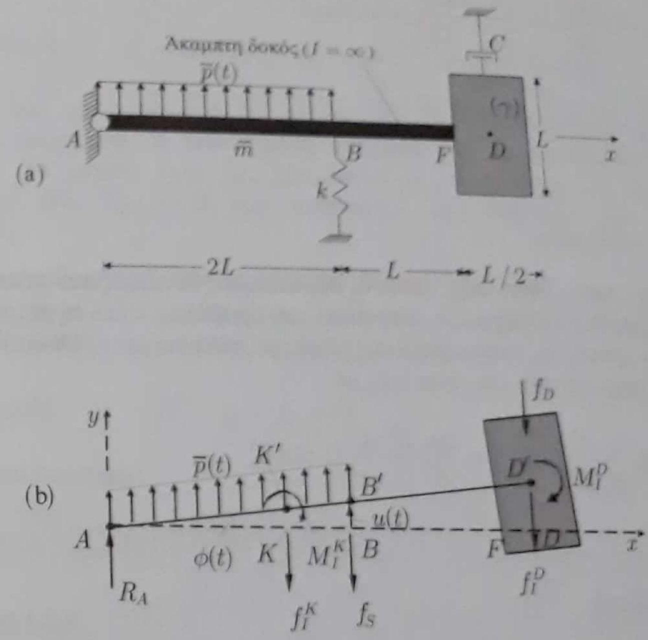
Λύση

Επειδή η δοκός AD είναι άκαμπτη η μόνη δυνατή κίνηση είναι η περιστροφή περί την άρθρωση A. Άρα το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας κινήσεως. Η κίνησή του μπορεί να προσδιορισθεί είτε από τη γωνία στροφής $\phi(t)$ περί την άρθρωση A είτε από την κατακόρυφη μετατόπιση οποιουδήποτε σημείου του άξονα της δοκού. Εκλέγουμε ως άγνωστο τη μετατόπιση $u(t)$ του σημείου B με θετική φορά προς τα άνω. Κατά την κίνηση οι δυνάμεις που επενεργούν πάνω στο σύστημα φαίνονται στο Σχ. Π1.3b.

Στο σημείο B επενεργεί η αντίδραση f_S της ελαστικής στηρίξεως. Η δύναμη αυτή έχει φορά προς τα κάτω διότι αντιτίθεται στην κίνηση. Είναι δε ίση με

$$f_S = ku \qquad (1)$$

Η f_D είναι η δύναμη αποσβέσεως, εφαρμόζεται στο σημείο D και έχει φορά προς τα κάτω διότι αντιτίθεται στην κίνηση. Είναι δε



Σχήμα Π1.3

$$f_D = c\frac{d}{dt}(DD') = c\frac{d}{dt}(1.625u) = 1.625c\dot{u} \qquad (2)$$

Η δύναμη f_I^K και η ροπή M_I^K είναι οι αδρανειακές δυνάμεις που αναπτύσσονται στο κέντρο βάρους της δοκού λόγω της κατανεμημένης μάζας $\overline{m}$ κατά την περιστροφή της, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η μάζα στο άκρο του προβόλου. Οι δυνάμεις αυτές αντιτίθενται στην κίνηση και υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$f_I^K = (\text{μάζα δοκού}) \times (\text{επιτάχυνση κ.β. δοκού}) = (\overline{m}3L)\frac{d^2}{dt^2}(KK') = 0.75m\ddot{u}$$

ή

$$f_I^K = 0.75m\ddot{u} \qquad (3$$

$$M_I^K = (\text{ροπή αδρανείας μάζας δοκού ως προς κ. β.}) \times (\text{γωνιακή επιτάχυνση})$$
$$= I_K\ddot{\phi}$$