

Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ - ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗΣ
Ακαδ. έτος 2014-15 ΜΑΘΗΜΑ: ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ (7^ο Εξάμηνο)
Διδάσκοντες : Μ. Καββαδάς & Β. Γεωργιάννου

Λύσεις Σειράς Ασκήσεων 1

Επιμέλεια: Δρ Α.Τζιρίτα

Ασκηση 1.1

(α) Διάγραμμα ορθών τάσεων στην κεφαλή και στην βάση του υποστυλώματος

- Κεφαλή υποστυλώματος:

$$\sigma_{\max, \min} = \Sigma V / b l (1 \pm 6e / b) = (380 / 0,6 \times 2,0) \times \{1 \pm (6 \times 0,25 / 0,6)\}$$

$$\sigma_{\max} = +1108,33 \text{ kPa} , \sigma_{\min} = -475 \text{ kPa}$$

- Βάση υποστυλώματος:

$$\Sigma V = P_{\text{ανωδομής}} + W_{\text{υποστ}} = 380 + (0,6 \times 2,0 \times 4,0) \times 25 = 380 + 120 = 500 \text{ kN}$$

$$e_b = \Sigma M / \Sigma V = (380 \times 0,25 + 120 \times 0) / 500 = 95 / 500 = 0,19 \text{ m}$$

$$\sigma_{\max, \min} = \Sigma V / b l (1 \pm 6e_b / b) = (500 / 0,6 \times 2,0) \times \{1 \pm (6 \times 0,19 / 0,6)\}$$

$$\sigma_{\max} = +1208,33 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{\min} = -375,0 \text{ kPa} = (-575 + 100)$$

Το υποστυλωμα από οπλισμένο σκυρόδεμα μπορεί να παραλάβει τόσο θλιπτικές όσο και εφελκυστικές τάσεις.

(β) Διαστάσεις πεδίου θεμελίωσης του υποστυλώματος

Εφ' όσον το έδαφος δεν παραλαμβάνει εφελκυσμό η παραδοχή της κατανομής των τάσεων στο έδαφος χωρίς πέδιλο θεμελίωσης προβλέπει τριγωνική κατανομή με σ_{\max} εξωφρενικά μεγάλη ($\sigma_{\max} = 2\sigma \times (b / b') = 1515,0 \text{ kPa}$!!!!!, όπου $\sigma = 500 / (0,6 \times 2,0) = 416,67 \text{ kPa}$, $b = 2,0 \text{ m}$ και $b' = 3(b/2 - e_b) = 3(0,30 - 0,19) = 0,33 \text{ m}$).

Η επιλογή των διαστάσεων του πεδίου θεμελίωσης του υποστυλώματος εξαρτάται βασικά από την ικανότητα του εδάφους να παραλάβει τα θλιπτικά φορτία με ικανό συντελεστή ασφάλειας (η φέρουσα ικανότητα του εδάφους ακολουθεί σε επόμενα μαθήματα). Εδώ ζητείται να προσδιορισθούν διαστάσεις πεδίου έτσι ώστε να προκύπτει τριγωνική κατανομή των πιέσεων επαφής στο έδαφος, δηλαδή περίπτωση οριακής εκκεντρότητας με $e_B = B / 6$.

Ενα ελάχιστο μήκος πεδίλου είναι $L = 2,0 \text{ m}$. Δεδομένου του πάχους πεδίλου σκυροδέματος, $D = 0,5 \text{ m}$ (έστω ορθογωνικής διατομής), το πλάτος του πεδίλου μπορεί να προκύψει από την απαίτηση: $e_B = B / 6 = \Sigma M / \Sigma V$, όπου ΣM η συνισταμένη ροπή ως προς το Κ.Β. του πεδίλου και ΣV η συνισταμένη των κατακόρυφων φορτίων. Υπάρχει επίσης η επιλογή κατασκευαστικής εκκεντρότητας του πεδίλου ως προς το υποστύλωμα και συνήθως γίνεται προκειμένου να επιτευχθεί ομοιόμορφο διάγραμμα πιέσεων επαφής στο έδαφος (αυτό πραγματεύεται η άσκηση 1.3).

Εστω πέδιλο με Κ.Β. στον άξονα ου υποστυλώματος και διαστάσεις

$$L \times B \times D = 2,0 \times B \times 0,5 = B \text{ m}^3$$

$$\text{Βάρος πεδίου } W_B = \gamma_{\text{σκυρ}} \times B = 25B \text{ kN}$$

$$e_B = B / 6 = (\Sigma M / \Sigma V) = 95 / (500 + 25B) \rightarrow 25B^2 + 500B - 570 = 0 \dots (1)$$

όπου $\Sigma M = 500 \times 0,19 = 95 \text{ kNm}$ (το ι.β. του πεδίου δεν δίνει ροπή) και

$$\Sigma V = 500 + 25B$$

Η επίλυση της 2-βάθμιας εξίσωσης (1) δίνει θετική ρίζα $B = 1,08 \text{ m}$.

Η εκκεντρότητα είναι $e_B = 1,08 / 6 = 0,18 \text{ m}$ και $B' = B$

το βάρος του πεδίου $W_B = 1,08 \times 2,0 \times 0,5 \times 25 = 27 \text{ kN}$ και

$$\Sigma V = 380 + 120 + 27 = 527 \text{ kN}$$

Επαλήθευση: $\sigma_{\max} = \Sigma V / BL(1 \pm 6e_B / B) = 2\sigma = 2 \times [527 / (2,0 \times 1,08)] = 487,96 \sim 488 \text{ kNm}$, $\sigma_{\min} = 0$.

(γ) Περαιτέρω διερεύνηση

Μπορούν να γίνουν διάφορες δοκιμές για άλλες διαστάσεις του πεδίου. Οι διαστάσεις για διερεύνηση που δίδονται στην άσκηση δίνουν τον ίδιο όγκο (βάρος) πεδίου με διαφορετικές εκκεντρότητες και τραπεζοειδή κατανομή των πιέσεων επαφής. Ο μικρότερος λόγος e/B δίνει την ευνοϊκότερη κατανομή τάσεων, δηλαδή μικρότερη σε μέγεθος μέγιστη ορθή τάση σ_{\max} , αν και η μέση τάση παραμένει η ίδια. Οι τιμές φαίνονται στον πίνακα excel της επόμενης σελίδας.

B (m)	L (m)	h (m)	W (kN)	ΣV (kN)	e (m)	e/B	$\Sigma V/BL$ (kPa)	(1+6e/B)	(1-6e/B)	σ_{max} (kPa)	σ_{min} (kPa)	mean (kPa)
2,0	2,0	0,5	50	550	0,172	0,0863	137,5	1,518	0,482	835	265	550
1,6	2,5	0,5	50	550	0,173	0,1089	137,6	1,648	0,352	906	193,75	550
1,25	3,2	0,5	50	550	0,174	0,138	137,7	1,823	0,171	1006	94	550

Ασκηση 1.2

Υπολογίζονται οι δυνάμεις, κατακόρυφες και οριζόντιες και οι ροπές (ευστάθειας και ανατροπής) ως προς το σημείο O, ανά μέτρο μήκους του τοίχου αντιστήριξης (εντατική κατάσταση: επίπεδη παραμόρφωση).

Η θέση της συνισταμένης θα απέχει από το σημείο O απόσταση $\xi = \Sigma M / \Sigma V = B/2 - e$, όπου e η εκκεντρότητα (απόσταση της συνισταμένης από το Κ.Β. του πεδίου. Από την τιμή της εκκεντρότητας εξαρτάται η μορφή του διαγράμματος των πιέσεων επαφής, δηλαδή:

Αν $e < B/6 \rightarrow$ τραπεζοειδής κατανομή, $\sigma_{\max, \min} = \Sigma V / BL (1 \pm 6e / B)$

Αν $e = B/6 \rightarrow$ τριγωνική κατανομή, $\sigma_{\max} = 2 \times (\Sigma V / BL) = 2\sigma$, $\sigma_{\min} = 0$

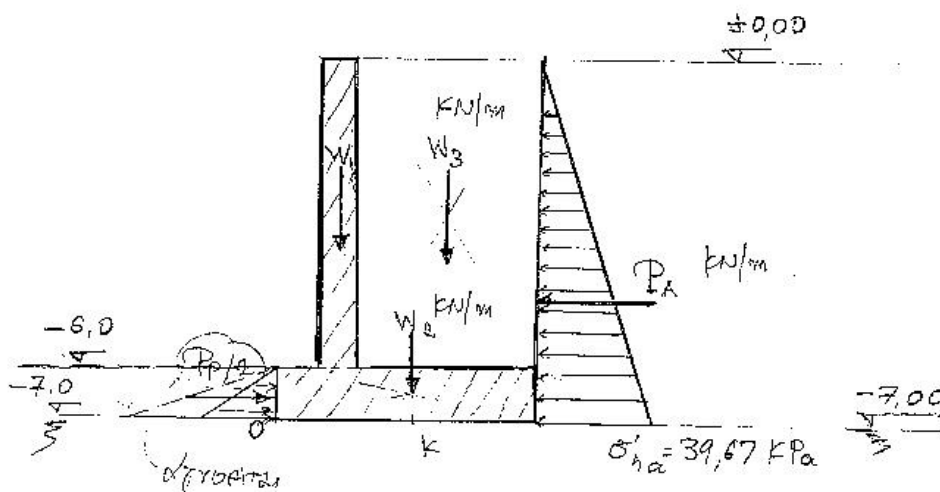
Αν $e > B/6 \rightarrow$ τριγωνική κατανομή, $\sigma_{\max} = 2 \times (\Sigma V / BL) \times (B / B')$, $B' =$ ενεργό πλάτος

Κατακόρυφες δυνάμεις: Βάρος τοίχου και υλικού επίχωσης

Οριζόντιες δυνάμεις: Ενεργητική ώθηση γαιών, P_A , από στάθμη $\pm 0,0$ ως $-7,0$ m

Παθητική ώθηση $= P_P / 2$, αγνοείται λόγω μικρού βάθους

1^η Περίπτωση: Στάθμη Υπογείου Υδροφόρου Ορίζοντα στην στάθμη θεμελίωσης ($-7,0$ m)



Υπολογισμός δυνάμεων

$$W_1 = 0,7 \times 6,0 \times 25 = 105 \text{ kN/m}, \quad x_1 = 0,8 + 0,7/2 = 1,15 \text{ m}$$

$$W_2 = 1,0 \times 5,0 \times 25 = 125 \text{ kN/m}, \quad x_2 = 2,5 \text{ m}$$

$$W_3 = 3,5 \times 6,0 \times 17 = 357 \text{ kN/m}, \quad x_3 = 1,5 + 3,5/2 = 3,25 \text{ m}$$

$$\Sigma V = 105 + 125 + 357 = \mathbf{587 \text{ kN/m}}$$

$$H = P_A = \frac{1}{2} \times \sigma'_{ha} \times 7,0 = \frac{1}{2} \times 39,67 \times 7,0 = 138,83 \text{ kN/m}, \quad y_A = 7/3 \text{ m}$$

$$\text{όπου } \sigma'_{ha} = K_A \times \sigma'_v = 1/3 \times 17 \times 7,0 = 39,67 \text{ kPa}, \text{ όπου } (K_A = \tan^2 (45 - \varphi/2) = 1/3)$$

Υπολογισμός Ροπών ως προς Ο

$$\Sigma M_{\text{ευστ}} = 105 \times 1,15 + 125 \times 2,5 + 357 \times 3,25 = 1593,5 \text{ kNm (+)}$$

$$\Sigma M_{\text{αναρ}} = 138,83 \times 7/3 = 323,93 \text{ kNm (-)}$$

$$\Sigma M_o = 1593,5 - 323,93 = \mathbf{1269,56 \text{ kNm}}$$

Σημείο εφαρμογής συνισταμένης ΣV

$$\xi = B/2 - e = \Sigma M_o / \Sigma V = 1269,56 / 587 = \mathbf{2,16 \text{ m}},$$

$$e = B/2 - \xi = 2,5 - 2,16 = \mathbf{0,34 \text{ m}} < B/6 = 5,0 / 6 = 0,83 \text{ m}$$

Οι πιέσεις επαφής θα είναι θλιπτικές καθ' όλο το πλάτος του πεδίου και η κατανομή τους τραπεζοειδής.

$$\sigma_{\max, \min} = \Sigma V / BL (1 \pm 6e / B) = (587 / 5,0 \times 1,0) \times (1 \pm 6 \times 0,34 / 5,0)$$

$$\sigma_{\max} = 117,4 \times 1,408 = \mathbf{165,29 \text{ kPa}} \text{ και}$$

$$\sigma_{\min} = 117,4 \times 0,592 = \mathbf{69,50 \text{ kPa}}$$

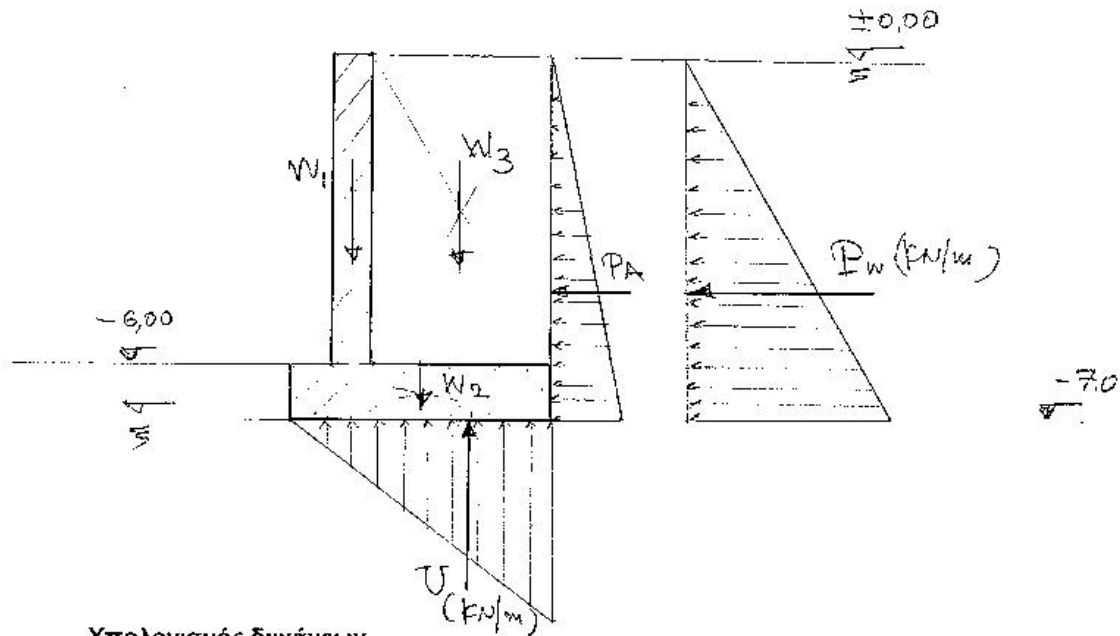
Οι διατμητικές τάσεις επαφής κατανέμονται ομοιόμορφα και έχουν μέγεθος

$$\tau = H / (B \times 1,0) = 138,83 / (5,0 \times 1,0) = 27,76 \text{ kPa}$$

$$\text{Συντελεστής Ασφάλειας έναντι ανατροπής } Y_{\text{αναρ}} = \Sigma M_{\text{ευστ}} / \Sigma M_{\text{αναρ}} = 4,91$$

$$\text{Συντελεστής Ασφάλειας έναντι ολίσθησης } Y_{\text{ολισθ}} = \Sigma V \tan \varphi / \Sigma H = 587 \times \tan 35^\circ / 138,83 = 2,96$$

2^η Περίπτωση: Στάθμη Υπόγειου Υδροφόρου Ορίζοντα στην στάθμη $\pm 0,0\text{m}$ δεξιά του τοίχου και $-7,0$ αριστερά



Υπολογισμός δυνάμεων

$$W_1 = 0,7 \times 6,0 \times 25 = +105 \text{ kN/m}, \quad x_1 = 0,8 + 0,7/2 = 1,15 \text{ m}$$

$$W_2 = 1,0 \times 5,0 \times 25 = +125 \text{ kN/m}, \quad x_2 = 2,5 \text{ m}$$

$$W_3 = 3,5 \times 6,0 \times 20 = +420 \text{ kN/m}, \quad x_3 = 1,5 + 3,5/2 = 3,25 \text{ m}$$

$$U = \frac{1}{2} \times 70 \times 5,0 = -175 \text{ kN/m}, \quad x_4 = \frac{2}{3} \times 5,0 = 3,33 \text{ m}$$

$$\Sigma V = 105 + 125 + 420 - 175 = 475 \text{ kN/m}$$

$$P_A = \frac{1}{2} \times \sigma'_{ha} \times 7,0 = \frac{1}{2} \times 23,33 \times 7,0 = 81,66 \text{ kN/m}, \quad y_A = \frac{7}{3} = 2,33 \text{ m}$$

$$\text{όπου } \sigma'_{ha} = K_A \times \sigma'_v = \frac{1}{3} \times 10 \times 7,0 = 23,33 \text{ kPa}, \text{ όπου } (K_A = \tan^2 (45 - \phi/2) = 1/3)$$

$$P_W = \frac{1}{2} \times 70 \times 7,0 = 245 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma H = P_A + P_W = 81,66 + 245 = 326,67 \text{ kN/m}$$

Υπολογισμός Ροπών ως προς Ο

$$\Sigma M_{\text{ΕΥΣΤ}} = 105 \times 1,15 + 125 \times 2,5 + 420 \times 3,25 = 1798,25 \text{ kNm (+)}$$

$$\Sigma M_{\text{ΑΝΑΤΡ}} = 81,66 \times 2,33 + 245 \times 2,33 + 175 \times 3,33 = 1343,87 \text{ kNm (-)}$$

$$\Sigma M_o = 1798,25 - 1343,87 = 454,38 \text{ kNm}$$

Σημείο εφαρμογής συνισταμένης ΣV

$$\xi = B/2 - e = \Sigma M_o / \Sigma V = 454,38 / 475 = 0,956 \text{ m} = (B/2 - e)$$

$$e = B/2 - \xi = 2,5 - 0,956 = 1,54 \text{ m} < B/6 = 5,0 / 6 = 0,83 \text{ m}$$

Εφ' όσον το έδαφος δεν μπορεί να πάρει εφελκυσμό, οι πιέσεις επαφής θα έχουν τριγωνική κατανομή στο **ενεργό πλάτος της διατομής, $B' = 3(B/2 - e) = 3 \times 0,956 = 2,86 \text{ m}$** , έτσι ώστε η συνισταμένη να εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της κατανομής αυτής.

$$\sigma_{\text{max}} = 2 \times (\Sigma V / BL) \times (B / B') = 2 \times (475/5,0 \times 1,0) / (2,86/5,0) = 332,16 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{\text{min}} = 0 \text{ από } 2,86 \text{ m ως } B = 5,0 \text{ m.}$$

Οι διατμητικές τάσεις επαφής κατανέμονται ομοιόμορφα και έχουν μέγεθος

$$\tau = H / (B \times 1,0) = 326,67 / (5,0 \times 1,0) = 65,33 \text{ kPa}$$

$$\text{Συντελεστής Ασφάλειας έναντι ανατροπής } Y_{\text{ΑΝΑΤΡ}} = \Sigma M_{\text{ΕΥΣΤ}} / \Sigma M_{\text{ΑΝΑΤΡ}} = 1,33$$

$$\text{Συντελεστής Ασφάλειας έναντι ολίσθησης } Y_{\text{ΟΛΙΣΘ}} = \Sigma V \tan \phi / \Sigma H = 475 \times \tan 35^\circ / 326,33 = 1,02$$

Παρατήρηση: Η ύπαρξη υψηλής στάθμης Υ.Υ.Ο. επιβαρύνει σε μεγάλο βαθμό την ευστάθεια του τοίχου και δυσμενοποιεί την κατανομή των πιέσεων επαφής (μεγάλη εκκεντρότητα και γωνία κλίσης της συνισταμένης δύναμης) και ως εκ τούτου την φέρουσα ικανότητα του εδάφους. Αυτό οφείλεται στις πιέσεις του νερού τόσο στην δεξιά παρειά του τοίχου όσο και στην βάση του πεδύλου (άνωση). Επειδή αυτή η κατάσταση είναι ακόμα δυσμενέστερη στην πραγματικότητα, λόγω της πραγματοποιούμενης, είναι συνήθης πρακτική η τοποθέτηση στραγγιστηρίων στην παρειά και στο σώμα του τοίχου, που διευκολύνουν την αποστράγγιση και αποφεύγεται η δημιουργία υψηλής στάθμης νερού στο αντιστηριζόμενο έδαφος.

Ασκηση 1.3

(α) Για να προκύπτει ομοιόμορφη κατανομή των πιέσεων επαφής, οι ροπές των ασκουμένων δυνάμεων, ως προς το Κέντρο Βάρους (άξονα) του πεδίου, θα πρέπει να είναι μηδέν. Εφόσον γίνεται η παραδοχή ενιαίου (μικτού) ειδικού βάρους θεμελίου – εδάφους, το βάρος του πεδίου έχει μηδενική εκκεντρότητα και επομένως η παραπάνω απαίτηση γράφεται:

$$P_s e_x + W_{\theta\epsilon\mu} 0 - M_s - H_s d_s = 0 \rightarrow e_x = (M_s + H_s d_s) / P_s = (380 + 80 \times 1,5) / 1000 = 0,50 \text{ m}$$

(β) Εφόσον για τις στατικές συνθήκες η εκκεντρότητα είναι μηδέν, η εκκεντρότητα για την φόρτιση με τα πρόσθετα σεισμικά μεγέθη M_d και H_d θα οφείλεται αποκλειστικά σε αυτά. Τίθενται δύο περιορισμοί: $\max e_x = 1,0 \text{ m}$ και $\max \sigma = 320 \text{ kPa}$. Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να μην συμβαίνουν ταυτόχρονα και γι αυτό θα πρέπει να επιλεγούν έτσι τα μεγέθη των M_d και H_d , ώστε να ικανοποιείται ο δυσμενέστερος περιορισμός.

Ροπές ως προς το Κ.Β. του πεδίου:

$$\Sigma M = M_d + H_d d_s = M_d (1,0 + 0,16 \times 1,5) = 1,24 M_d \text{ kNm}$$

$$\Sigma V = P_s + W_{\theta\epsilon\mu} = 1000 + 2 \times 3,0 \times 1,5 \times 22 = 1198 \text{ kN}$$

$$\max e_x \quad 1,0 = \Sigma M / \Sigma V = 1,24 M_d \text{ kNm} / 1198 \text{ kN} \rightarrow M_d = 1198 \times 1,0 / 1,24 = 966 \text{ kNm}$$

Στην περίπτωση της εκκεντρότητας $e_x = 1,0 \text{ m} = B / 3$, η ενεργός διατομή είναι $3 (B/2 - e) = 3 (1,5 - 1,0) = 1,5 \text{ m} = B/2$, οριακώς αποδεκτό. Στην περίπτωση αυτή η σ_{\max} ισούται με: $2 \sigma (B'/B) = (2 \times 1198 / 3,0 \times 2,0) (3,0 / 1,5) = 399,33 \times 2 = 798,67 \gg 320 \text{ kPa}$, η οποία θα πραγματοποιηθεί για εκκεντρότητα πολύ μικρότερη εκκεντρότητα του $1,0 \text{ m}$.

Ελέγχω την περίπτωση όπου $e_x = B/6 = 3,0/6 = 0,5 \text{ m}$. Τότε $\sigma_{\max} = 2\sigma = 2 \times 1198/6 = 399,33 \text{ kPa}$. Επομένως η εκκεντρότητα θα είναι ακόμα μικρότερη και η κατανομή των πιέσεων επαφής θα είναι τραπεζοειδής η δε τιμή της σ_{\max} θα προκύψει από την σχέση: $\sigma_{\max} = 320 \text{ kPa} = \Sigma V / BL (1 + 6e / B) = (1198 / (3,0 \times 2,0)) (1 + 6e/3)$.

Λύνοντας την εξίσωση ως προς e προκύπτει: $e_x = [(320/199,6) - 1] \times 3,0/6 = 0,30 \text{ m}$

Από αυτήν την τιμή της εκκεντρότητας θα προσδιορισθούν τα μεγέθη M_d και H_d .

$$e_x = 0,30 = \Sigma M / \Sigma V = 1,24 M_d / 1198 \rightarrow M_d = 1198 \times 0,30 / 1,24 = 289,83 \text{ kNm} \sim \mathbf{290 \text{ kNm}}$$
$$\text{και } H_d = 290 \times 0,16 = \mathbf{46,4 \text{ kN}}.$$

Παρατήρηση: Στα πραγματικά έργα, κριτήριο δεν είναι τόσο η μέγιστη τάση σ_{\max} αλλά η φέρουσα ικανότητα του εδάφους, η οποία βεβαίως σχετίζεται με την κατανομή των πιέσεων επαφής.