

Εαρινή '17

Σημεία 1^ο

(α). • Για όλα τα μη μηδενικά σύνθετα $z \neq 0$ του μιγαδικού επιπέδου z , ορίζεται η λογαριθμική συνάρτηση ως εξής:
 $\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$ με $n \in \mathbb{Z}$

• Η πρωτεύουσα (ή κύρια) τιμή του $\log z$ είναι η τιμή που δίνει η παραπάνω για $n=0$, επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Log } z &= \ln r + i\theta && \text{για } r > 0, -\pi < \theta < \pi \\ \text{ή } \text{Log } z &= \ln|z| + i\text{Arg } z && (z \neq 0) \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι: $\log z = \text{Log } z + 2n\pi i$ με $n \in \mathbb{Z}$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Εφόσον } \log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi) \\ \Rightarrow \log z = \ln r + i\theta + 2n\pi i \\ \Rightarrow \log z = \text{Log } z + 2n\pi i \end{array} \right)$$

Η $\text{Log } z$ είναι ο κύριος κλάδος της $\log z$ (πλησίοντος συνάρτησης)

- Από ιδιότητες $\rightarrow$ (και εφόσον $a, z \in \mathbb{C}$) $\log(az) = \log a + \log z$
* εν γένει και το ίδιο θα ισχύει για το Log
- Η εκθετική συνάρτηση με βάση το c , όπου c μη μηδενικός αριθμός μιγαδικός,

$$c^z = \exp(z \log c)$$

$$\triangleright z^6 = i \Rightarrow (r_2 e^{i\theta_2})^6 = i e^{i\pi/2} \text{ πρέπει } r_2 = 1 \text{ και } 6\theta_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} * i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ \left(r_2 = \sqrt{0^2 + 1^2} \right) \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{array} \right)$$

$$\text{οπότε } z = e^{i \left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right)}$$

$$\theta_2 = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

$$\text{ή } z = \cos \left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{με } k = 0, 1, \dots, 5$$

το z κινείται σε κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα το 1.

(β) σери Laurent της $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$ σε έναν αγγίχους τους δισκούς δακτύλιου με κέντρο το $z_0 = 0$

► Αναγίω σε απλοϊστερα κλάσματα της f :

$$\begin{aligned} \text{θα είναι: } \frac{1}{(z-1)(z+1)} &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1) + B(z-1)}{(z-1)(z+1)} \\ &= \frac{Az + A + Bz - B}{(z-1)(z+1)} = \frac{(A+B)z + A-B}{(z-1)(z+1)} \end{aligned}$$

Από απαίτηση ισότητας πολλαπλασιάζω θα έχω ότι: $A+B=0 \Rightarrow B=-A$

Επομένως $\frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z+1)}$ και $A-B=1 \xrightarrow{\text{και}} A+A=1$

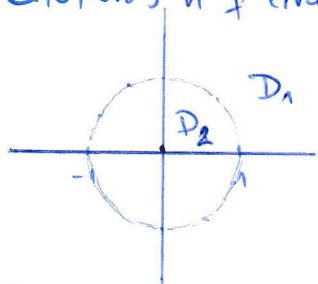
$A = 1/2$
 και $B = -1/2$

► Δισκοί δακτύλιου με κέντρο το $z_0 = 0$

(* Πίτες των παρανομοτήτων $z = \pm 1$.) $\rightarrow$ Οπτική αναπαράσταση

Επομένως η f είναι αναμορφική στα χωρία: • $|z| > 1$ (D_1 χωρίο)

• $-1 < |z| < 1$ (D_2 ")



* Βασιστάστε στη σερι (γεωμετρική)
 όπου: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ με $|z| < 1$

• $|z| < 1$

$$\frac{1}{2(z-1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1-z)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$-\frac{1}{2(z+1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1-(-z))} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ σери Laurent για } |z| < 1$$

(συναρτήσει στο χωρίο D_2)

2

• $|z| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1$

$$\frac{1}{2(z-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$- \frac{1}{2(z+1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(-\frac{1}{z}\right)\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \right] \text{ s'exprime Laurent pour } |z| > 1. \\ \text{(voir exercice D}_1\text{)}$$