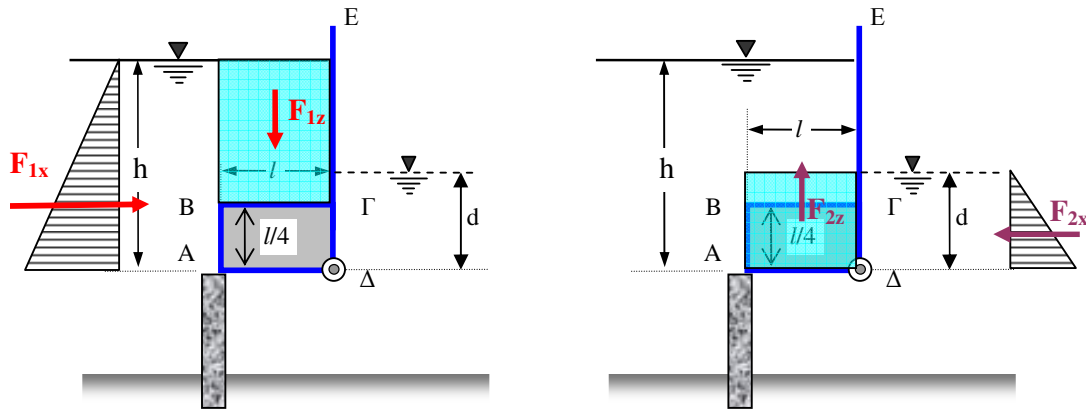


1. Το άκαμπτο και αβαρές θυρόφραγμα ΑΒΓΔΕ του σχήματος που φράσσει ορθογωνική διώρυγα πλάτους 1 m ακουμπά στο κατακόρυφο τοίχωμα στο σημείο Α, ενώ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση στο σημείο Δ. Το ορθογωνικό τμήμα ΑΒΓΔ είναι κενό, ενώ ΑΔ=ΒΓ=l και ΑΒ=ΓΔ=l/4. Το ύψος νερού στα αριστερά πάνω από το σημείο Α είναι h.

(α) Όταν στα δεξιά δεν υπάρχει νερό, να δείξετε ότι το θυρόφραγμα δεν ανατρέπεται.

(β) Όταν στα δεξιά υπάρχει νερό, για ποιο ύψος νερού d πάνω από το σημείο Δ (ΑΔ είναι οριζόντιο) το θυρόφραγμα βρίσκεται σε οριακή ισορροπία;

Δεδομένα: h=1 m, l=1 m.



Απάντηση

(α) Οι δυνάμεις και οι αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες στα αριστερά είναι

Δύναμη	Μοχλοβραχίονας
$F_{1x} = \frac{1}{2} \rho g h^2$	$e_{1x} = \frac{h}{3}$
$F_{1z} = \rho g (h - l/4) l$	$e_{2z} = \frac{l}{2}$

Το άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο Δ είναι

$$\sum M_{\Delta} = F_{1x} e_{1x} - F_{1z} e_{1z} = -0.208 \rho g < 0$$

Το θυρόφραγμα δεν ανατρέπεται.

(β) Οι δυνάμεις και οι αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες στα δεξιά είναι

Δύναμη	Μοχλοβραχίονας
$F_{2x} = \frac{1}{2} \rho g d^2$	$e_{2x} = \frac{d}{3}$
$F_{2z} = \rho g d l$	$e_{2z} = \frac{l}{2}$

Το άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο Δ είναι

$$\sum M_{\Delta} = F_{1x} e_{1x} - F_{1z} e_{1z} - F_{2x} e_{2x} + F_{2z} e_{2z} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6} \rho g (h^3 - d^3) - \rho g (h - l/4 - d) \frac{l^2}{2} = 0$$

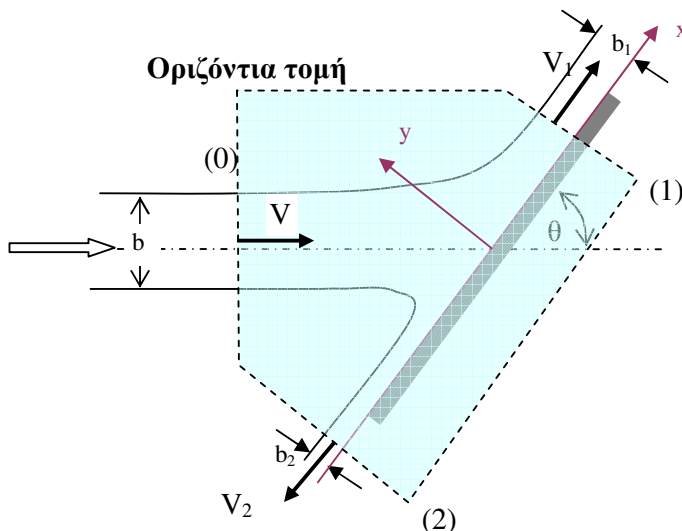
Προκύπτουν δύο λύσεις. Με δοκιμές $d_1=0.45$ m και $d_2=1.47$ m.

2. (25%) Διδιάστατη φλέβα νερού πάχους b προσπίπτει υπό γωνία θ σε επίπεδη, κατακόρυφη πλάκα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρήστε ότι το νερό συμπεριφέρεται σαν ιδεατό ρευστό (διατμητική τάση στην πλάκα μηδενική).

(α) Εάν η παροχή της φλέβας ανά μονάδα ύψους είναι q , να προσδιορίσετε τα πάχη των φλεβών b_1 και b_2 στις οποίες διαχωρίζεται.

(β) Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη (ανά μονάδα ύψους της φλέβας) που ασκείται στην επίπεδη επιφάνεια.

Δεδομένα: $b=0.20$ m, $\theta=60^\circ$, $q=0.40$ m²/s.



Απάντηση

(α) Εξίσωση ενέργειας από διατομή αριστερά σε (1) και (2) ($z=z_1=z_2$, $p=0$)

$$H = H_1 = H_2 \Leftrightarrow \frac{p}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \Leftrightarrow V = V_1 = V_2 = q/b = 2 \text{ m/s}$$

Εξίσωση συνέχειας

$$Vb = V_1 b_1 + V_2 b_2 = V(b_1 + b_2) \Rightarrow b = b_1 + b_2$$

Εξίσωση ορμής κατά μήκος της πλάκας ($\tau=0$)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{gx} + F_{tx} + F_{px} = 0 = -\sum_i [\rho \underline{V}_i (\underline{V}_i \circ d\underline{A}_i)]_x \Rightarrow -[\rho q V \cos \theta - \rho q_1 V_1 + \rho q_2 V_2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$V^2 b \cos \theta - V_1^2 b_1 + V_2^2 b_2 = V^2 b \cos \theta - V^2 b_1 + V^2 b_2 = 0 \rightarrow b \cos \theta = b_1 - b_2$$

Επομένως

$$b_1 = b(1 + \cos \theta)/2, \quad b_2 = b(1 - \cos \theta)/2$$

$b_1=0.15$ m, $b_2=0.05$ m

(β) Δύναμη κάθετη στην πλάκα

$$\sum F_y = F_{gy} + F_{ty} + F_{py} + N_y = 0 = -\sum_i [\rho \underline{V}_i (\underline{V}_i \circ d\underline{A}_i)]_y \Rightarrow N_y = \rho q V \sin \theta \Leftrightarrow$$

$$N_y = \frac{\rho q^2 \sin \theta}{b} = 692.82 \text{ N}$$

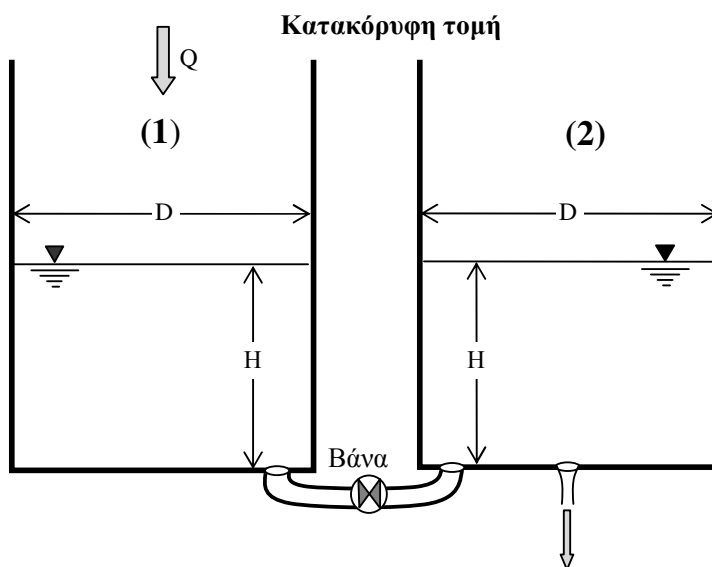
3. (25%) Δύο κυλινδρικά δοχεία (1) και (2) με ίδια διάμετρο D συνδέονται με σωλήνα διαμέτρου d μικρού μήκους όπως στο σχήμα. Το δοχείο (2) έχει στον πυθμένα του μια οπή διαμέτρου d . Τα δύο δοχεία περιέχουν νερό με την ίδια αρχικά στάθμη H . Θεωρούμε ότι στον μικρό σωλήνα δεν έχουμε απώλειες ενέργειας και ότι η είσοδος και έξοδος από τα δοχεία είναι στρογγυλεμένες ώστε να μην υπάρχει συστολή της φλέβας νερού, ενώ στην οπή του δοχείου (2) υπάρχει συστολή της φλέβας.

Σε κάποια χρονική στιγμή $t=0$ ανοίγουν ταυτόχρονα η βάννα και η οπή στο δοχείο (2), ενώ παράλληλα παροχετεύεται παροχή Q στο δοχείο (1).

(α) Να υπολογίσετε τις τελικές στάθμες ισορροπίας H_1 και H_2 στα δύο δοχεία όταν στο σύστημα έχει αποκατασταθεί μόνιμη ροή.

(β) Να γράψετε τις διαφορικές εξισώσεις για τον υπολογισμό του χρόνου που απαιτείται για να επιτευχθεί η ισορροπία στο σύστημα σαν συνάρτηση των h_1 , h_2 , Q , d και D , όπου h_1 , h_2 , είναι οι στάθμες στα δύο δοχεία κατά τη χρονική στιγμή t .

Δεδομένα: $H=1$ m, $D=1$ m, $d=5$ cm, $Q=0.004$ m³/s.



Απάντηση

(α) Όταν $Q=Q_{12}=Q_2$, τότε στο δοχείο αριστερά η στάθμη είναι H_1 και δεξιά H_2 . Από εξίσωση ενέργειας στο δοχείο δεξιά προκύπτει ότι $V_2 = \sqrt{2gH_2}$, επομένως

$$Q_2 = Q = V_2 \left(c \frac{\pi d^2}{4} \right) = \sqrt{2gH_2} \left(c \frac{\pi d^2}{4} \right) \Rightarrow H_2 = \frac{8Q^2}{gc^2\pi^2 d^4} = 0.567 \text{ m}$$

όπου $c=0.611$ (μικρή οπή).

Εξίσωση ενέργειας στις δυο πλευρές του σωλήνα όπου $V_{12} = 4Q/\pi d^2$

$$H_1 = H_2 + \frac{V_{12}^2}{2g} = \frac{8Q^2}{gc^2\pi^2 d^4} + \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} \left(1 + \frac{1}{c^2} \right) = 0.778 \text{ m.}$$

(β) Η μεταβολή όγκου στο δοχείο (1) $dV_1 = Adh_1$ όπου $A=\pi D^2/4$, είναι ίδια με τη συνολική εισροή σε χρόνο dt , δηλαδή

$$(Q - Q_{12})dt = \frac{\pi D^2}{4} dh_1 \text{ όπου } Q_{12} = V_{12} \frac{\pi d^2}{4} = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \frac{\pi d^2}{4}$$

και στο δοχείο (2)

$$(Q_{12} - Q_2)dt = \frac{\pi D^2}{4} dh_2 \text{ όπου } Q_2 = V_2 \left(c \frac{\pi d^2}{4} \right) = \sqrt{2gh_2} \left(c \frac{\pi d^2}{4} \right).$$

Καταλήγουμε επομένως στο σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξεως

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{4}{\pi D^2} \left(Q - \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \frac{\pi d^2}{4} \right) \text{ και}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{d^2}{D^2} \left(\sqrt{2g(h_1 - h_2)} - c\sqrt{2gh_2} \right)$$

που λύνεται αριθμητικά ως πρόβλημα αρχικών τιμών με μεθοδολογία Runge-Kutta 4^{ης} τάξεως.