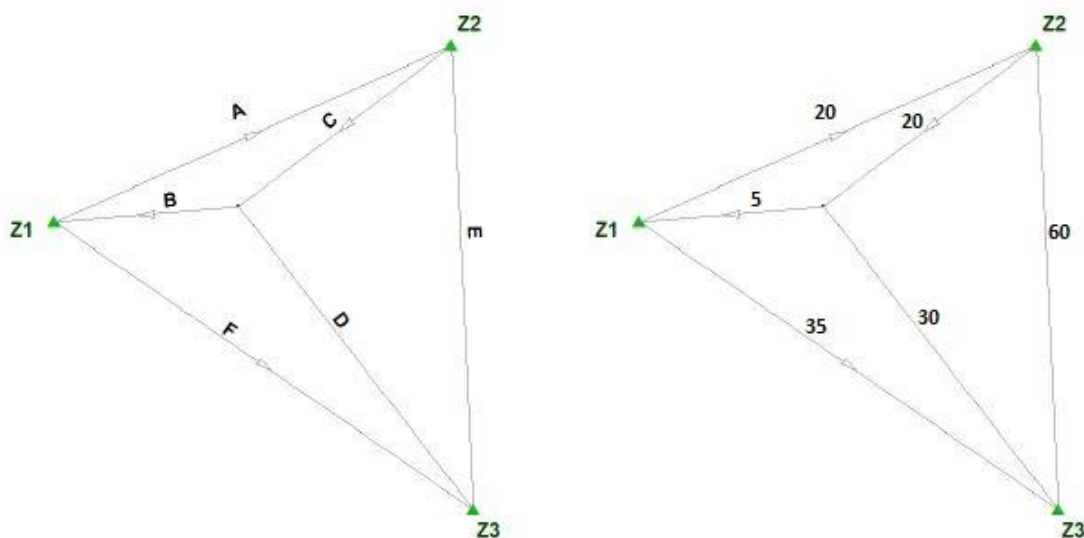


1)

Για τον προσδιορισμό των συντομότερων διαδρομών μεταξύ των κεντροειδών (Σχήμα 1), ελαχιστοποιήθηκε το κόστος (Πίνακας 1) για κάθε σύνδεσμο, μηδενίζοντας το φόρτο V (Σχήμα 2). Προτιμήθηκε η χρήση του αλγόριθμου του Dijkstra και η διαδικασία θα εξηγηθεί συντόμως για το κεντροειδές Z1.

Πίνακας 1¹. Συναρτήσεις Κόστους - Φόρτου

Σύνδεσμος	Συνάρτηση Κόστους - Φόρτου
A	$20 + 0,0016 V^2$
B	$5 + 0,0001 V^2$
C	$20 + 0,0004 V^2$
D	$30 + 0,0024 V^2$
E	$60 + 0,0012 V^2$
F	$35 + 0,0028 V^2$



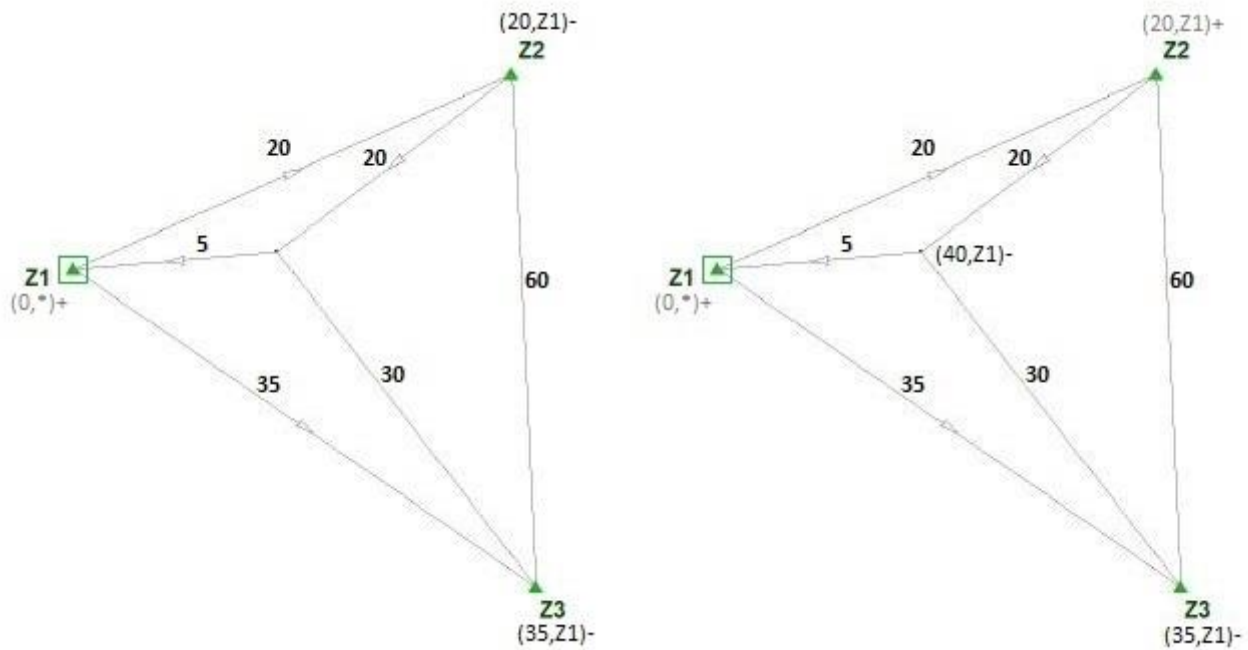
Σχήματα 1 & 2. Κεντροειδή και σύνδεσμοι (αριστερά) και κόστος συνδέσμων για μηδενικό φόρτο (δεξιά)

Το **κεντροειδές Z1** αποτελεί τον κόμβο αρχής για τους συνδέσμους **A** και **F**, οι οποίοι καταλήγουν στα **κεντροειδή Z2** και **Z3** με κόστη **20** και **35** αντίστοιχα. Σημειώνεται κάτω από αυτούς τους κόμβους το κόστος και ο κόμβος αρχής, και συμπληρώνεται κι ένα αρνητικό σύμβολο («-») που δηλώνει ότι οι κόμβοι αυτοί είναι προσωρινοί (δηλαδή το κόστος ενδεχομένως να αλλάξει). Αντίστοιχα στον **κόμβο Z1** σημειώνεται μηδενικό κόστος κι ένα θετικό σύμβολο («+») που δηλώνει ότι ο κόμβος είναι σταθερός (το κόστος δεν πρόκειται να μεταβληθεί). (Σχήμα 3)

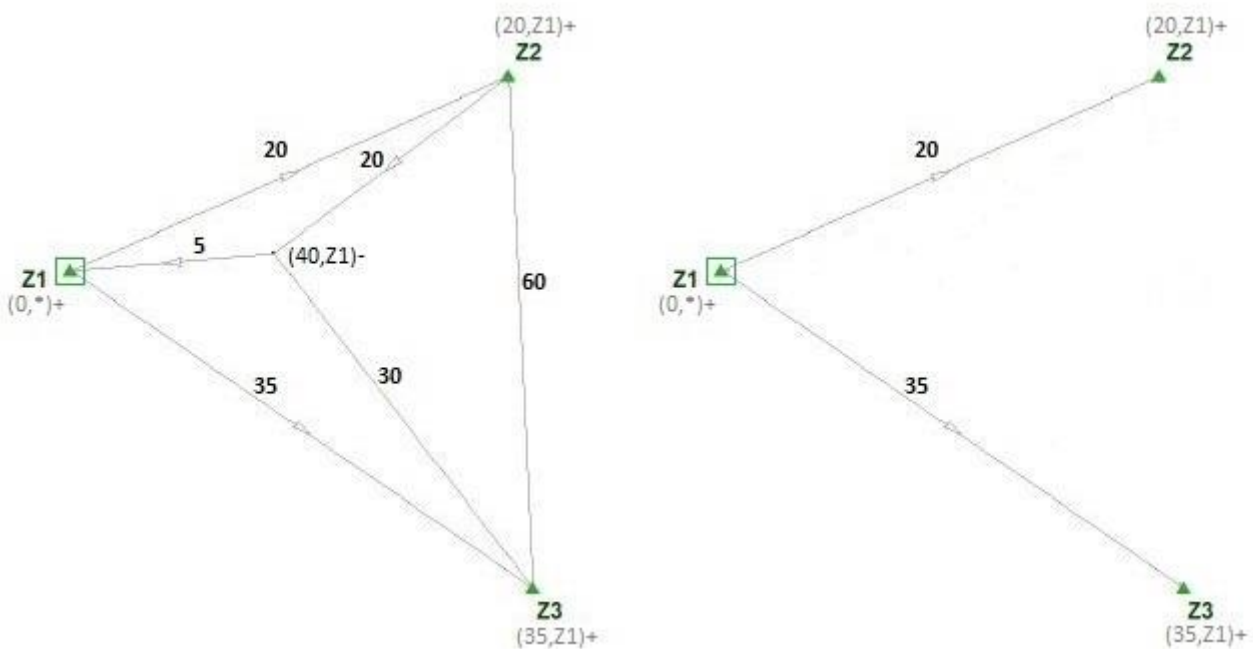
Από τους κόμβους που έχουν «μείον» επιλέγεται αυτός με το μικρότερο κόστος (ο **Z2**) και θεωρείται πλέον ως σταθερός (το πρόσημό του αλλάζει από «+» σε «-»). Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με πριν, τον **κόμβο Z2** έχει ως αφετηρία ο σύνδεσμος **C** ενώ ο **E** τον έχει απλα ως άκρο². Ο **C** καταλήγει στον **κεντρικό ανώνυμο κόμβο**, στον οποίο σημειώνεται το άθροισμα πλέον του κόστους του συνδέσμου με το κόστος του κόμβου Z2 ($20 + 20 = 40$). Ο **E** καταλήγει στον **κόμβο Z3** με συνολικό κόστος $20 + 60 = 80$ το οποίο ξεπερνά το κόστος από την απευθείας μετάβαση από το κεντροειδές Z1, για αυτό ως κόστος παραμένει το μικρότερο (το **35**). (Σχήμα 4)

¹ Στην εκφώνηση της άσκησης αυτός είναι ο Πίνακας 2.

² Παρατηρούμε ότι οι σύνδεσμοι A, B, C, F είναι προσανατολισμένοι (μίας κατεύθυνσης), ενώ οι D, E όχι!

Σχήματα 3 – 4. Εκτέλεση αλγόριθμου Dijkstra από το Z1 (μέρος 1^ο)

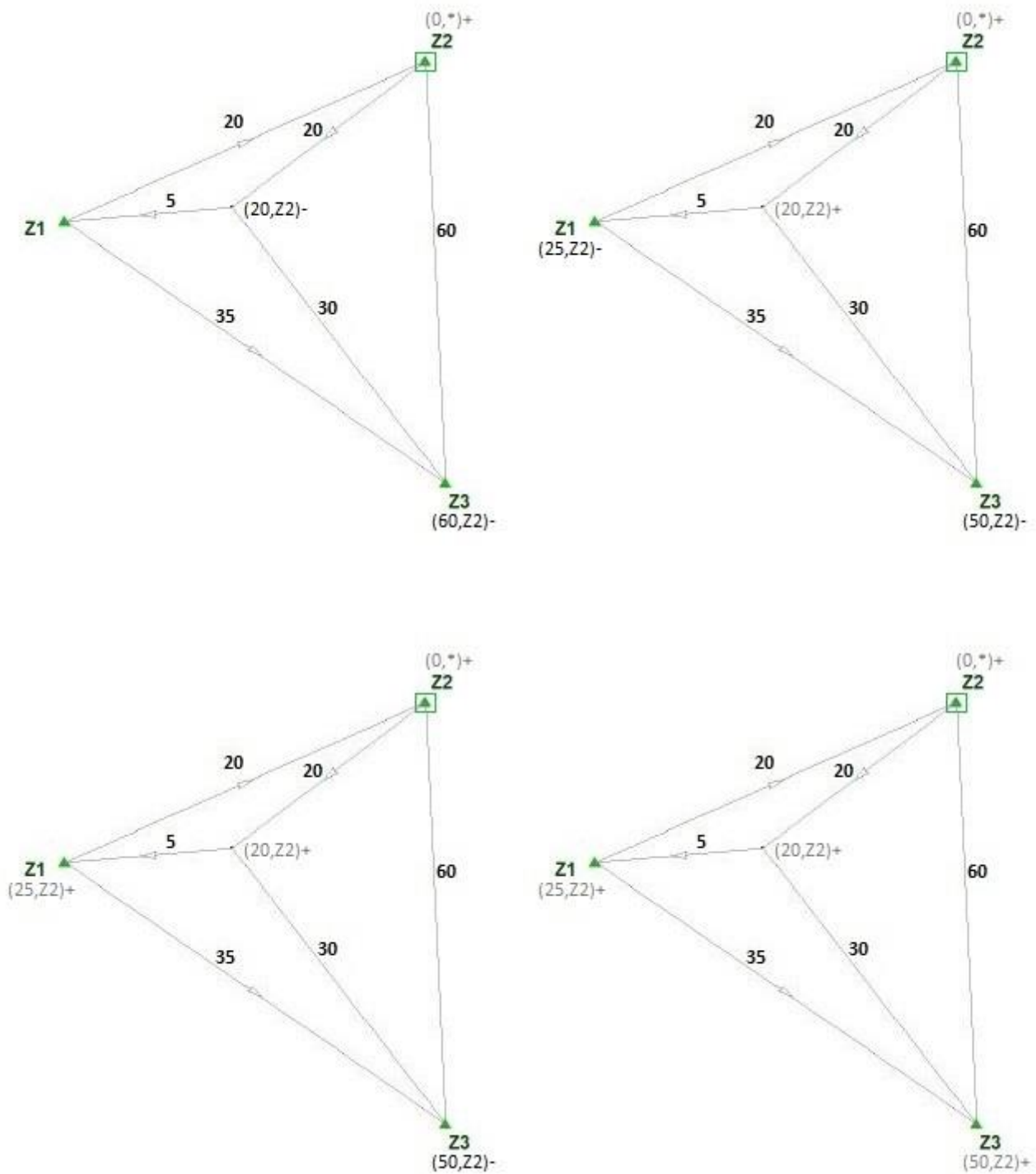
Από τους τωρινούς προσωρινούς κόμβους μικρότερο κόστος έχει ο **Z3**, ο οποίος και μετατρέπεται σε σταθερό (Σχήμα 5). Εφόσον όλοι οι κόμβοι που απαιτούνται για τις ανάγκες της άσκησης (δηλαδή **τα κεντροειδή**) έχουν μετατραπεί σε σταθερούς, ολοκληρώνεται η διαδικασία και προκύπτει έτσι το δέντρο των συντομότερων διαδρομών με αφετηρία το κεντροειδές Z1 (Σχήμα 6).



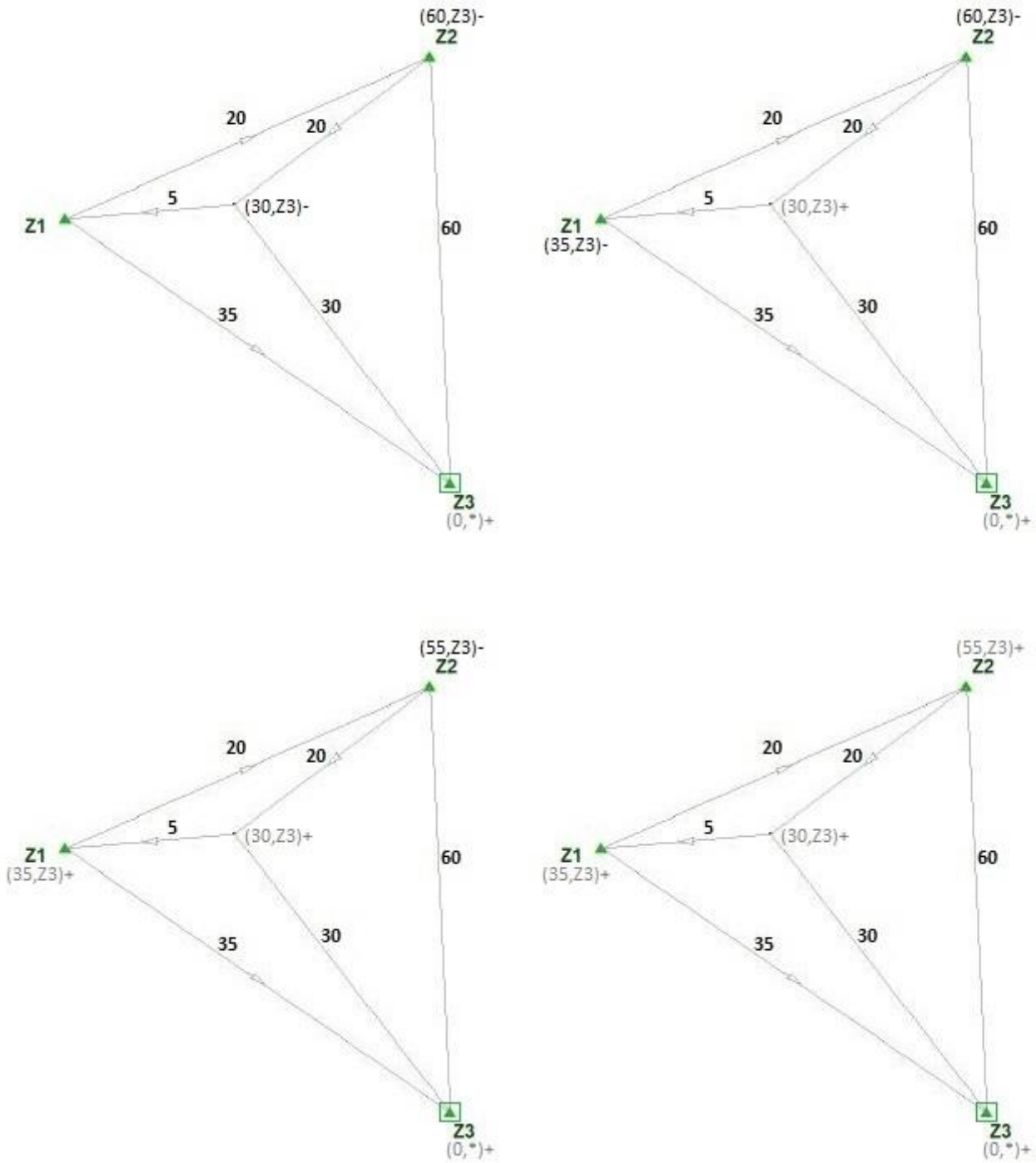
Σχήματα 5 – 6.

(αριστερά) Εκτέλεση αλγόριθμου Dijkstra από το Z1 (μέρος 2^ο)
(δεξιά) Δέντρο συντομότερων διαδρομών από το Z1

Στις εικόνες που ακολουθούν αναλύεται η ίδια διαδικασία με αφετηρία το κεντροειδές Z2 (Σχήματα 7 – 10) και το Z3 (Σχήματα 11 – 14).

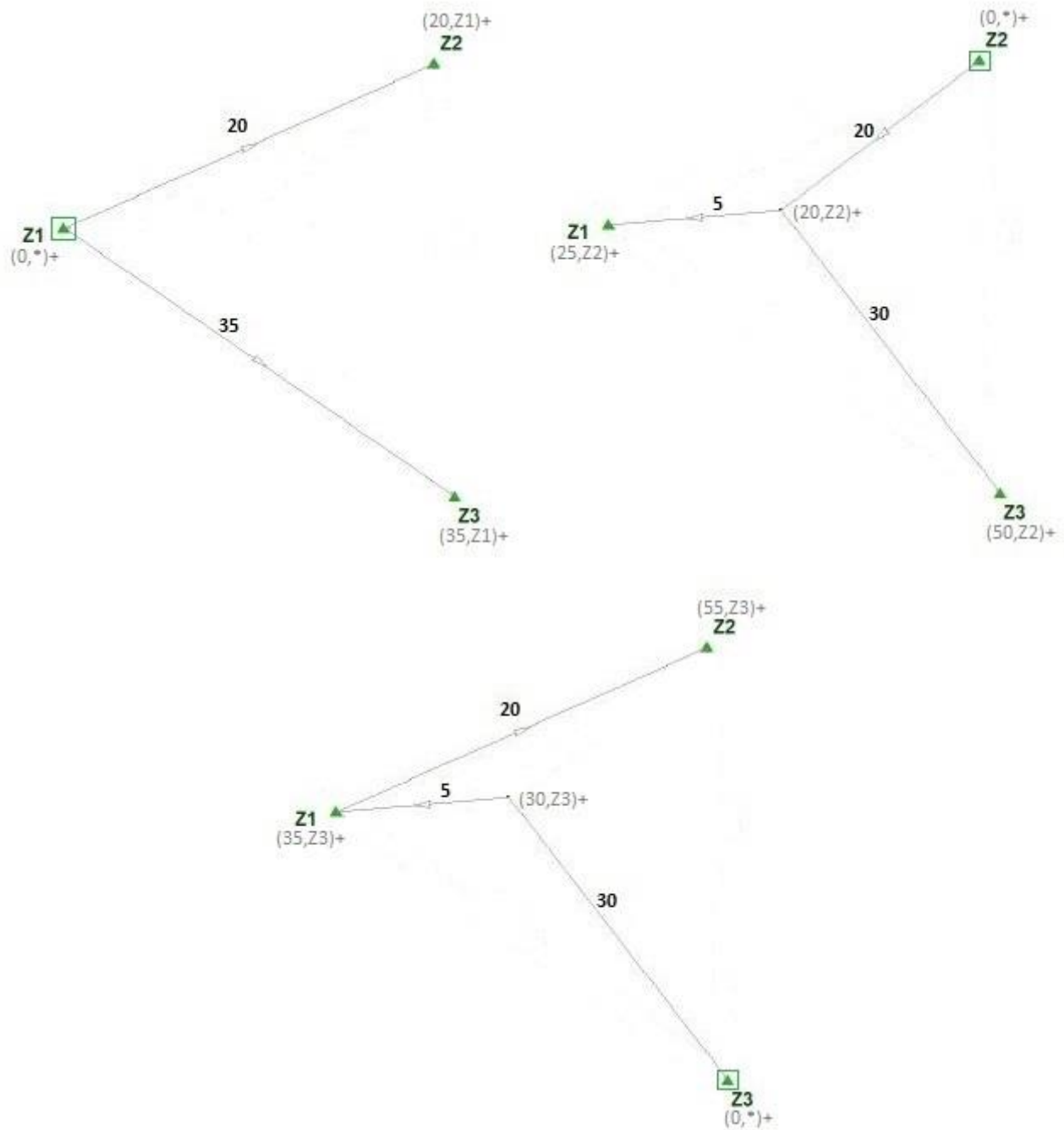


Σχήματα 7 – 10. Εκτέλεση αλγόριθμου Dijkstra από το Z2



Σχήματα 11 – 14. Εκτέλεση αλγόριθμου Dijkstra από το Z3

Τέλος παρουσιάζονται τα δέντρα των συντομότερων διαδρομών για τα κεντροειδή (Σχήματα 15 – 17).



Σχήματα 15 – 17. Δέντρα συντομότερων διαδρομών με αφετηρία το κεντροειδές Z1 (πάνω αριστερά), το κεντροειδές Z2 (πάνω δεξιά) και το Z3 (κάτω κεντρικά)

2 – 3 – 4)

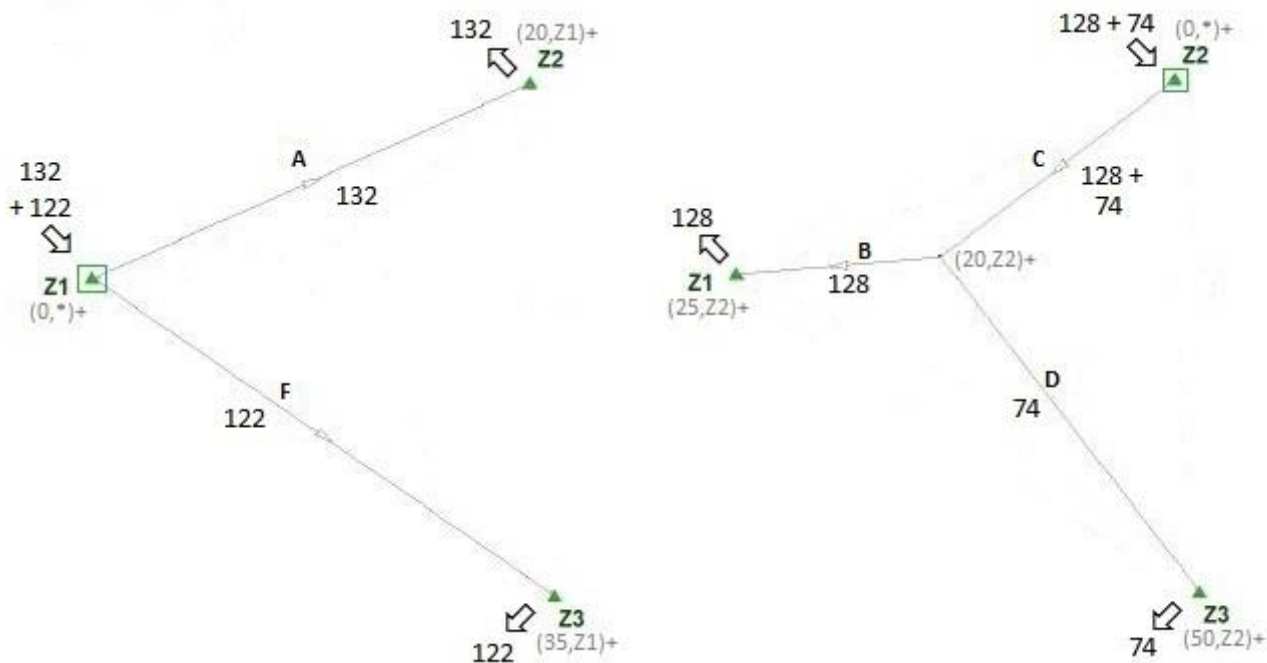
Ο καταμερισμός στο δίκτυο του παρακάτω μητρώου Π – Π (Πίνακας 2) θα γίνει με τη μέθοδο του περιορισμού χωρητικότητας χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις κόστους – φόρτου των συνδέσμων (Πίνακας 1) και με συντελεστές ομαλοποίησης 0,3 και 0,7.

Πίνακας 2³. Πίνακας Προέλευσης- Προορισμού

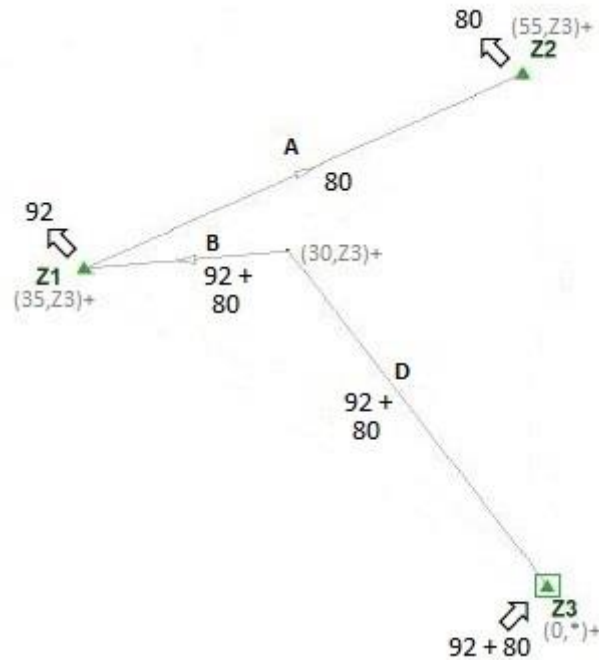
Σύνδεσμος	Z1	Z2	Z3
Z1	-	132	122
Z2	128	-	74
Z3	92	80	-

Οι ωριαίες μετακινήσεις αιχμής (Πίνακας 2) μεταφράζονται σε οχήματα ανά ώρα, δηλαδή σε φόρτο. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουν υπολογιστεί τα δέντρα συντομότερης διαδρομής για μηδενική φόρτιση του δικτύου (Σχήματα 15 – 17), στα οποία μεταφέρονται οι φορτίσεις μεταξύ των κεντροειδών (μέθοδος «Όλα ή Τίποτα») (Σχήματα 18 – 20).

Για κάθε σύνδεσμο αθροίζονται οι φορτίσεις που δέχεται, πχ ο σύνδεσμος **F** δέχεται μόνο τις μετακινήσεις από το **Z1** στο **Z3** (Σχήμα 18), ενώ ο σύνδεσμος **A** φορτίζεται και λόγω μετακίνησης από Z1 σε Z2 (Σχήμα 18) αλλά και λόγω μετακίνησης από το Z3 στο Z2 (Σχήμα 20). Έτσι συμπληρώνεται η στήλη «Καταμερισμένος Φόρτος» του Πίνακα 3, με τα στοιχεία της οποίας και με τις συναρτήσεις κόστους – φόρτους (Πίνακας 1) προκύπτει το νέο κόστος για τον κάθε σύνδεσμο (στήλη «Κόστος₁» του Πίνακα 3), το οποίο σε συνδυασμό με το προηγούμενο κόστος (στήλη «Κόστος₀» του Πίνακα 3) και τους συντελεστές ομαλοποίησης δίνει το **Ομολαποιημένο Κόστος** (τελευταία στήλη του Πίνακα 3).

Σχήματα 18 & 19. Καταμερισμός φορτίσεων με τη μέθοδο «Όλα ή τίποτα» (μέρος 1^ο)

³ Στην εκφώνηση της άσκησης αυτός είναι ο Πίνακας 1.

Σχήμα 20. Καταμερισμός φορτίσεων με τη μέθοδο «Όλα ή τίποτα» (μέρος 2^ο)Πίνακας 3. Πίνακας υπολογισμών 1^{ης} επανάληψης

Σύνδεσμος	Καταμερισμένος Φόρτος		Κόστος ₁	Κόστος ₀	Ομαλοποιημένο Κόστος
A	132+80	212	91,91	20	41,57
B	92+80+128	300	14,00	5	7,70
C	128+74	202	36,32	20	24,90
Δκάθοδος	74	74	43,14	30	33,94
Δάνοδος	92+80	172	101,00	30	51,30
Εκάθοδος	0	0	60,00	60	60,00
Εάνοδος	0	0	60,00	60	60,00
F	122	122	76,68	35	47,50

Συντελεστές ομαλοποίησης

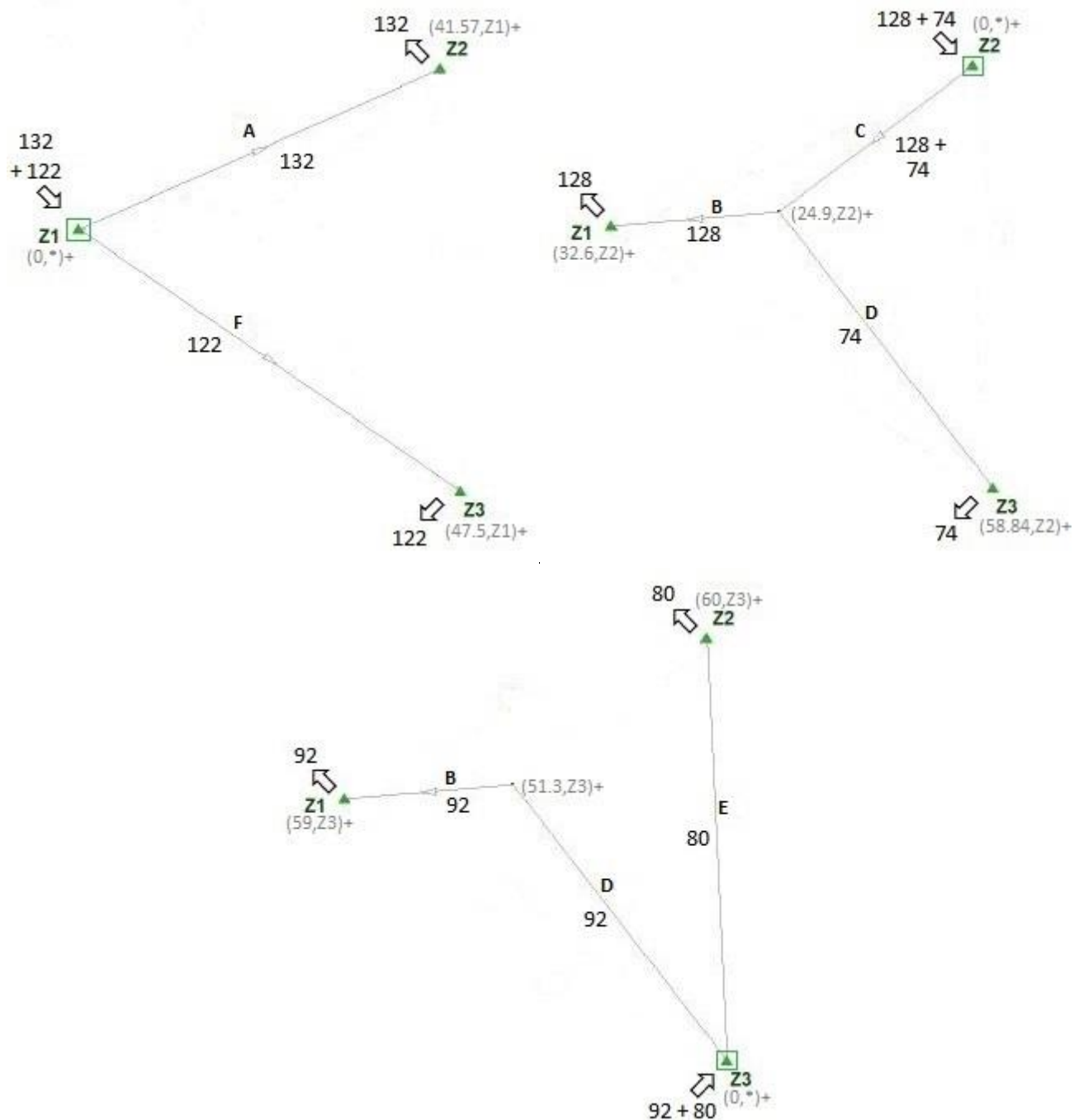
0,3

0,7

Για το Ομαλοποιημένο Κόστος που προέκυψε υπολογίζονται νέα δέντρα συντομότερης διαδρομής και η διαδικασία επαναλαμβάνεται

- 2^η Επανάληψη: Σχήματα 21 – 23 και Πίνακας 4 (σελίδα 8)
- 3^η Επανάληψη: Σχήματα 24 – 26 και Πίνακας 5 (σελίδα 9)
- 4^η Επανάληψη: Σχήματα 27 – 29 και Πίνακας 6 (σελίδα 10)
- 5^η Επανάληψη: Σχήματα 30 – 31 και Πίνακας 7 (σελίδα 11)

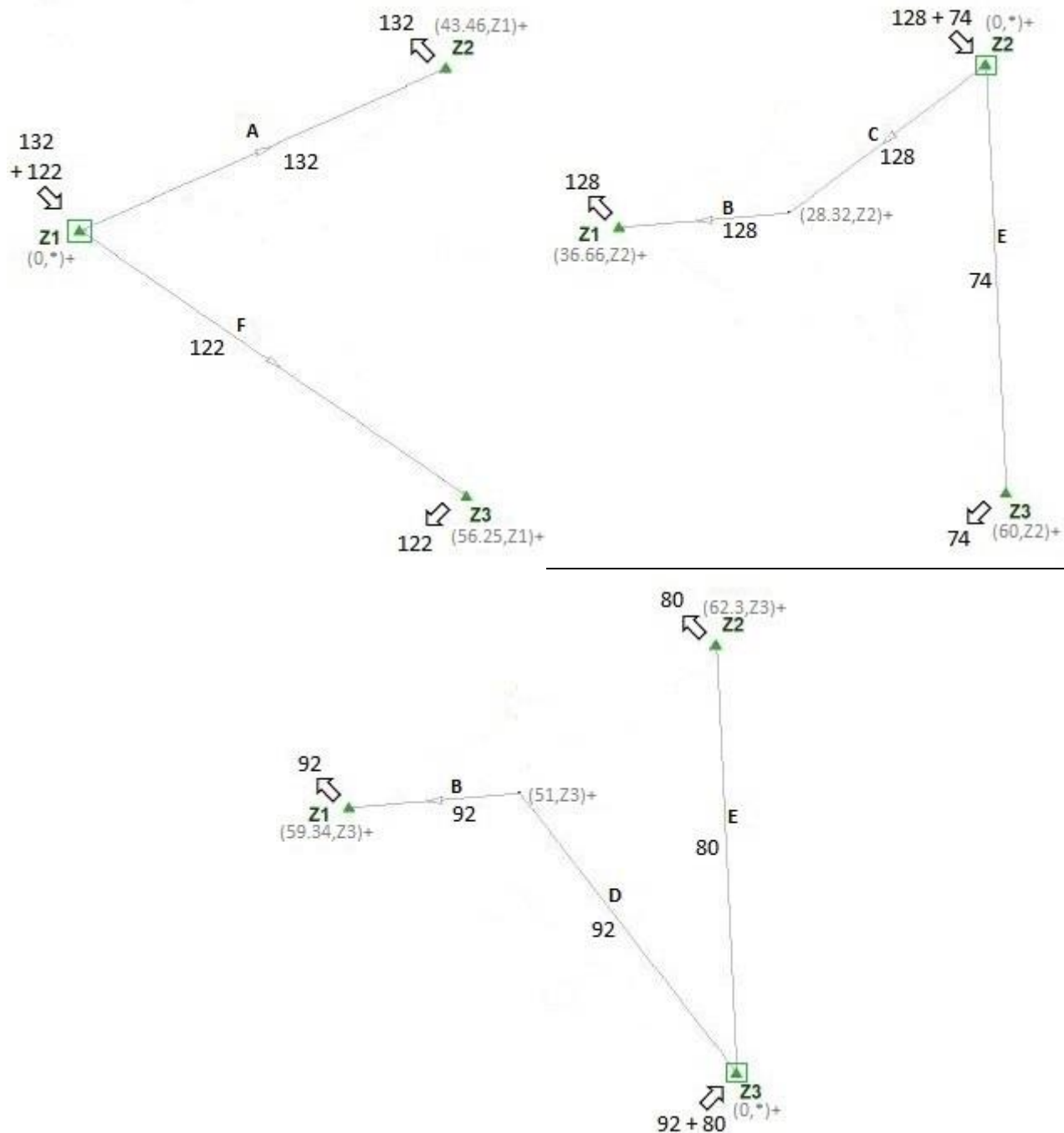
(...συνέχεια στη σελίδα 12)



Σχήματα 21 – 23. Καταμερισμός φορτίσεων με τη μέθοδο «Όλα ή τίποτα»

Πίνακας 4. Πίνακας υπολογισμών 2^{ης} επανάληψης

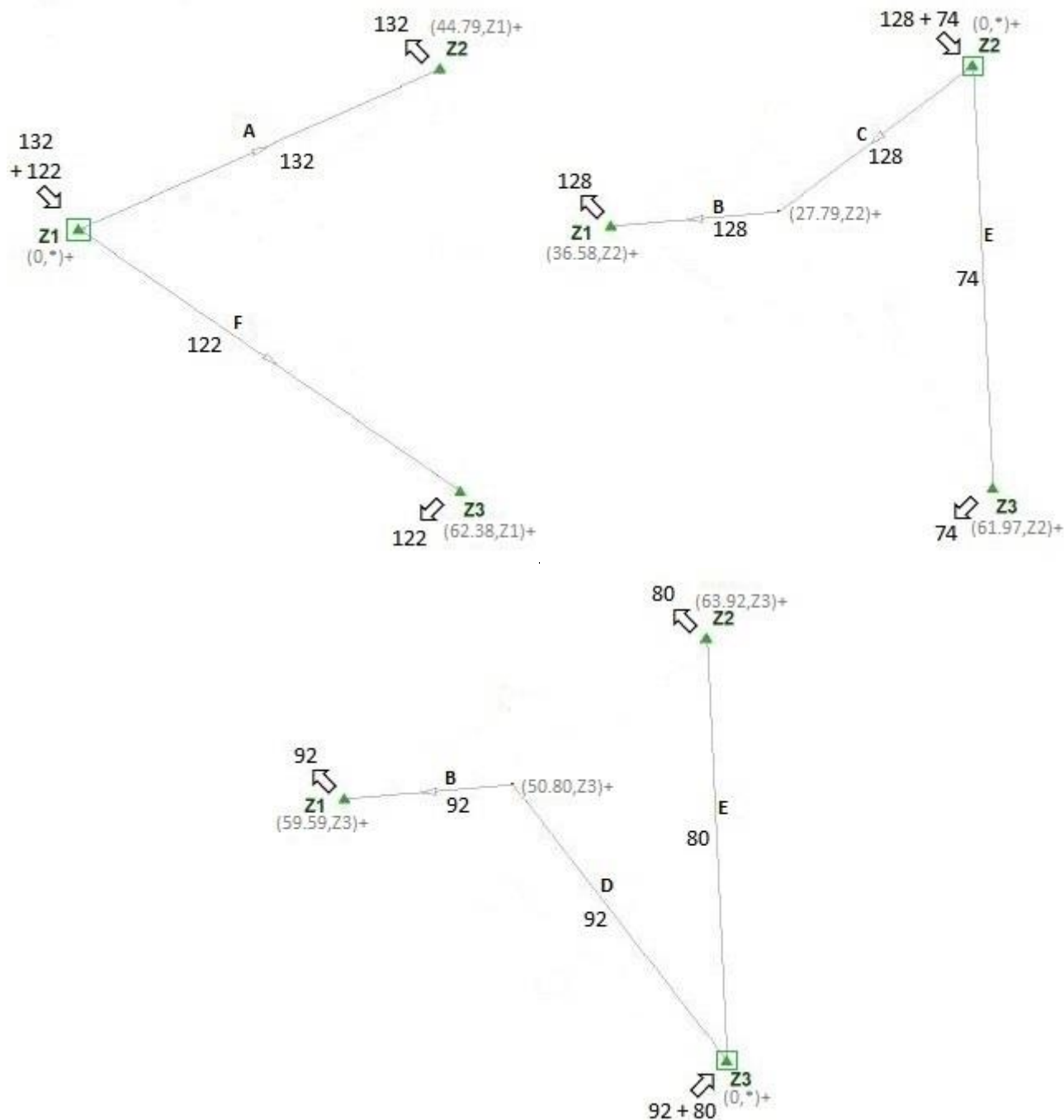
Σύνδεσμος	Καταμερισμένοι Φόρτος		Κόστος ₂	Κόστος ₁	Ομαλοποιημένο Κόστος
A	132	132	47,88	41,57	43,46
B	92+128	220	9,84	7,70	8,34
C	128+74	202	36,32	24,90	28,32
Dκάθοδος	74	74	43,14	33,94	36,70
Dάνοδος	92	92	50,31	51,30	51,00
Eκάθοδος	0	0	60,00	60,00	60,00
Eάνοδος	80	80	67,68	60,00	62,30
F	122	122	76,68	47,50	56,25



Σχήματα 24 – 26. Καταμερισμός φορτίσεων με τη μέθοδο «Όλα ή τίποτα»

Πίνακας 5. Πίνακας υπολογισμών 3^{ης} επανάληψης

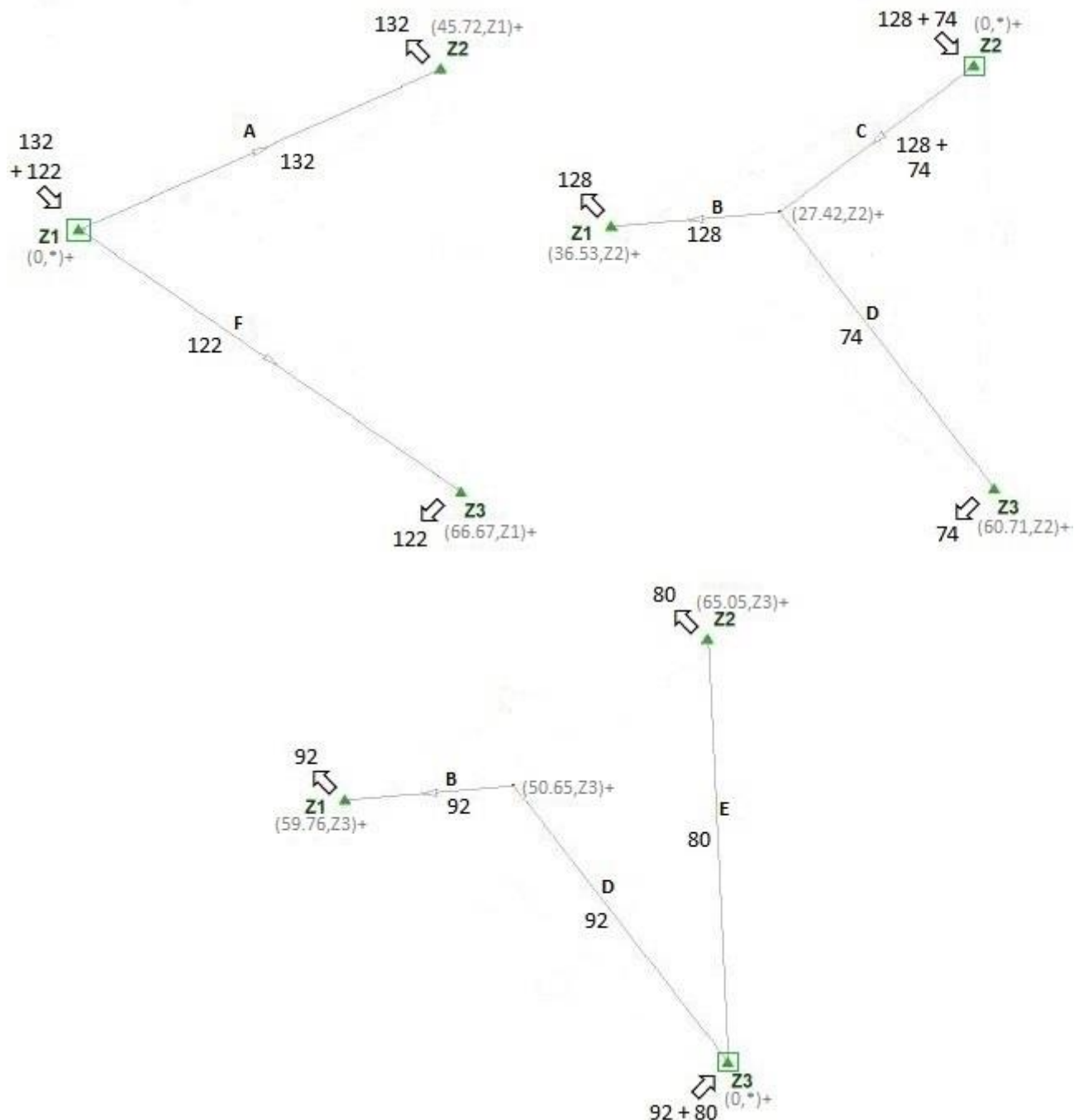
Σύνδεσμος	Καταμερισμένος Φόρτος		Κόστος ₃	Κόστος ₂	Ομαλοποιημένο Κόστος
A	132	132	47,88	43,46	44,79
B	92+128	220	9,84	8,34	8,79
C	128	128	26,55	28,32	27,79
Δκάθοδος	0	0	30,00	36,70	34,69
Δάνοδος	92	92	50,31	51,00	50,80
Εκάθοδος	74	74	66,57	60,00	61,97
Εάνοδος	80	80	67,68	62,30	63,92
F	122	122	76,68	56,25	62,38



Σχήματα 27 – 29. Καταμερισμός φορτίσεων με τη μέθοδο «Όλα ή τίποτα»

Πίνακας 6. Πίνακας υπολογισμών 4^{ης} επανάληψης

Σύνδεσμος	Καταμερισμένος Φόρτος		Κόστος ₄	Κόστος ₃	Ομαλοποιημένο Κόστος
A	132	132	47,88	44,79	45,72
B	92+128	220	9,84	8,79	9,11
C	128	128	26,55	27,79	27,42
Δκάθοδος	0	0	30,00	34,69	33,28
Δάνοδος	92	92	50,31	50,80	50,65
Εκάθοδος	74	74	66,57	61,97	63,35
Εάνοδος	80	80	67,68	63,92	65,05
F	122	122	76,68	62,38	66,67



Σχήματα 30 – 32. Καταμερισμός φορτίσεων με τη μέθοδο «Όλα ή τίποτα»

Πίνακας 7. Πίνακας υπολογισμών 5^{ης} επανάληψης

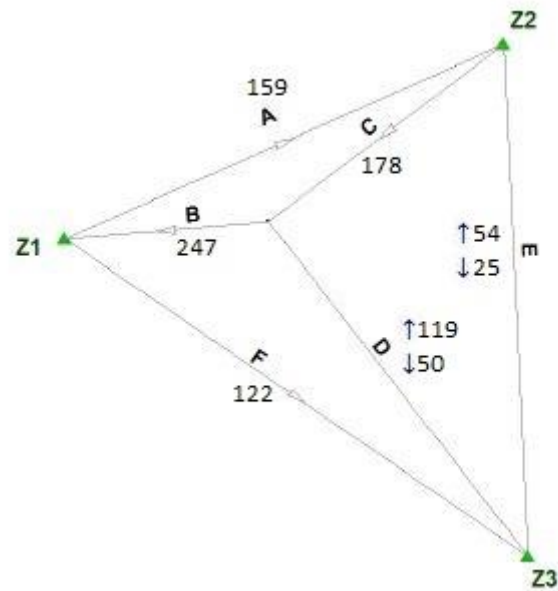
Σύνδεσμος	Καταμερισμένος Φόρτος		Κόστος ₅	Κόστος ₄	Ομαλοποιημένο Κόστος
A	132	132	47,88	45,72	46,36
B	92+128	220	9,84	9,11	9,33
C	128+74	202	36,32	27,42	30,09
Dκάθοδος	74	74	43,14	33,28	36,24
Dάνοδος	92	92	50,31	50,65	50,55
Eκάθοδος	0	0	60,00	63,35	62,35
Eάνοδος	80	80	67,68	65,05	65,84
F	122	122	76,68	66,67	69,67

Το σύστημα δε φαίνεται να συγκλίνει προς την κατάσταση ισορροπίας. Σύμφωνα με την εκφώνηση του 2^{ου} ερωτήματος, που γίνεται λόγος για Πρώτη – Βοηθητική – Τελική Φόρτιση, ως καταμερισμένος φόρτος για το τελικό κόστος θα θεωρηθεί ο μέσος όρος των φορτίσεων των συνδέσμων των τριών πρώτων επαναλήψεων. Η τελική φόρτιση των συνδέσμων του δικτύου φαίνεται στον Πίνακα 8 και στο Σχήμα 33. Το τελικό κόστος⁴ φαίνεται επίσης στον Πίνακα 8.

Πίνακας 8

Σύνδεσμος	Αριθμός Επανάληψης	Καταμερισμένος Φόρτος	Τελική Φόρτιση	Τελικό Κόστος
A	1	212	159	60,45
	2	132		
	3	132		
B	1	300	247	11,10
	2	220		
	3	220		
C	1	202	178	32,67
	2	202		
	3	128		
Δκάθοδος	1	74	50	36,00
	2	74		
	3	0		
Δάνοδος	1	172	119	63,99
	2	92		
	3	92		
Εκάθοδος	1	0	25	60,75
	2	0		
	3	74		
Εάνοδος	1	0	54	63,50
	2	80		
	3	80		
F	1	122	122	76,68
	2	122		
	3	122		

⁴ Τελικό κόστος = τελικοί χρόνοι διαδρομής.



Σχήμα 33. Διάγραμμα τελικών φορτίσεων των συνδέσμων