

Προχωρημένη Αριθμητική Ανάλυση 5ου εξαμήνου
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών – Γραπτή Εξέταση Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια: 2 Ώρες.

Ερωτήματα

1. Έστω τα σημεία με συντεταγμένες $(0, 0)$, $(0.5, 0.7)$, $(0.7, 1)$ στο επίπεδο.
 - (α) Κατασκευάστε την κατά τμήματα γραμμική παρεμβολή (δηλ., τη γραμμική spline) στα σημεία αυτά, αφού πρώτα κατασκευάσετε τις σχετικές συναρτήσεις βάσης.
 - (β) Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε τη στροφή ενός αυτοκινητοδρόμου που να περνάει από τα παραπάνω σημεία, χρησιμοποιώντας μια φυσική κυβική spline και, έτσι, βρείτε την καμπύλη της στροφής.
[Υπόδειξη: Αν χρειαστούν παραπάνω δεδομένα μπορείτε να θέσετε τη δεύτερη παράγωγο της φυσικής κυβικής spline ίση με το 0 στα άκρα.]
2. Έστω μια επιφάνεια που περνάει από δεδομένα σημεία (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, N$ στο χώρο.
 - (α) Περιγράψτε τη διαδικασία κατά τμήματα γραμμικής παρεμβολής στα σημεία αυτά ώστε να γίνει δυνατή η απεικόνισή της.
 - (β) Περιγράψτε μία μέθοδο προσέγγισης του όγκου μεταξύ της επιφάνειας αυτής και του xy -επιπέδου, υποθέτοντας ότι $z_i > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, 3, \dots, N$.
3. (α) Προσεγγίστε τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$-u''(x) = 3x, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0 = u(1),$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε διαμέριση του $(0, 1)$ που να ορίζεται από τα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.7$, και $x_3 = 1$, περιγράφοντας όλη τη διαδικασία κατασκευής του σχετικού γραμμικού συστήματος και την επίλυσή του.

- (β) Προσεγγίστε τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$-u''(x) + u'(x) = 3x, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0 = u(1),$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε διαμέριση του $(0, 1)$ που να ορίζεται από τα (ίδια με το υποερώτημα (α)) σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.7$, και $x_3 = 1$.

Τα θέματα είναι ισόβαθμα. Καλή Επιτυχία!

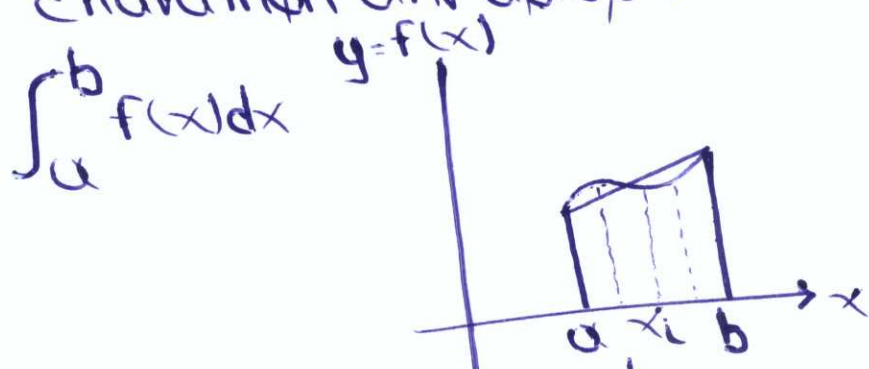
→ Λύση γραμμικών συστημάτων
Ανάλυση Gauss *

→ Λύση μη γραμμικών εξισώσεων
 $f(x) = 0$

→ Παρεμβολή 
→ Αριθμητική ολοκλήρωση $\int_a^b f(x) dx$

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u_{tt} - \Delta u = f \end{cases} \begin{cases} \text{πεπερασμένα} \\ \text{στοιχεία} \end{cases}$$

Επανάληψη στην αριθμητική ολοκλήρωση



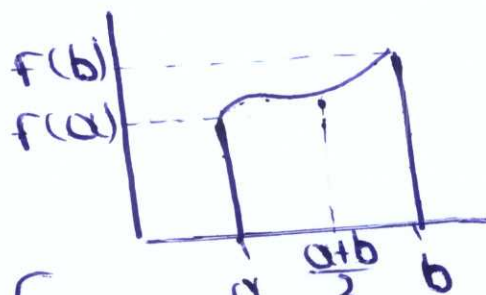
Κανόνας τραπεζίου: $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a) = Q_2$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q_2(f) \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{12} \max_{x_i \leq \xi \leq x_{i+1}} |f''(\xi)|$$

$n+1$ υπολογισμοί της f

Κανόνας Simpson:



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} = Q_3$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left\{ f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right\}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q_3(f) \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} - x_i)^5}{16 \times 180} \max f^{(4)}(\xi)$$

$2n+1$ υπολογισμοί της f

Μέθοδοι Newton-Cotes

Μέθοδοι Gauss

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=0}^{K-1} W_i p(x_i)$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

$$\text{Θέτω } \int_{-1}^1 (ax+b) dx = W_0 (ax_0+b)$$

$$\text{Λογούμενα: } \text{Θέτω } \int_{-1}^1 1 dx = W_0 \cdot 1 \Rightarrow W_0 = 2$$

$$\text{και } \int_{-1}^1 x dx = W_0 x_0 \Rightarrow W_0 x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$\text{Άρα, } \int_{-1}^1 p(x) dx = 2 p(0) \quad \forall \text{ γραμμικό πολυώνυμο } p$$

Τύποι Gauss 1^{ης} τάξης

$$g(x): -1 \rightarrow a \quad [-1, 1] \rightarrow [a, b]$$

$$1 \rightarrow b$$

$$g(x) = \frac{a+b}{2} x + \frac{b-a}{2}$$

Δουλεύει; όχι για $x=-1$
 $g(-1) = -a$

$$g(x) = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2}$$

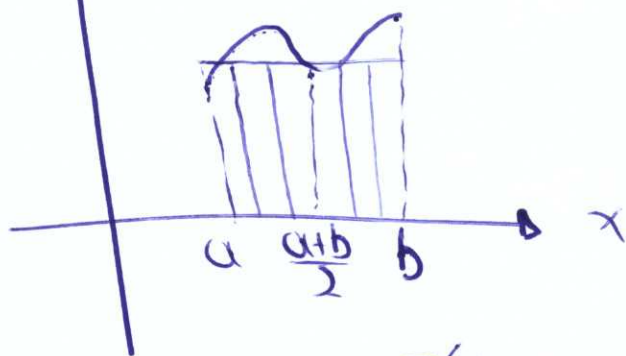
Δουλεύει!

Gauss

$$g([-1, 1]) \rightarrow [a, b]$$

$$u=g(x), \int_a^b f(u) du = \int_{-1}^1 f(g(x)) g'(x) dx \approx \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$y=f(x)$$



Κανόνας
του μέσου

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+1}-x_i}{2} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$$

n υποδιαγραφές της f

$$\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{180} \max |f''(\xi)|$$

$$\Theta \varepsilon \tau \omega \int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=0}^1 w_i p(x_i) = w_0 p(x_0) + w_1 p(x_1)$$

$$\int_{-1}^1 1 dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 \quad (1)$$

$$0 = \int_{-1}^1 x dx = w_0 x_0 + w_1 x_1 \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^1 x^2 dx = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \quad (3)$$

$$0 = \int_{-1}^1 x^3 dx = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \quad (4)$$

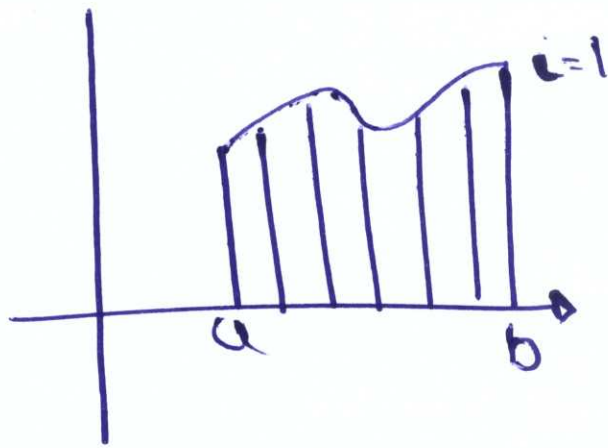
$x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, w_0 = 1$

$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}, w_1 = 1$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(g(x)) g'(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(g(x)) dx$$

$$= \left\{ f\left(g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + f\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \right\} \frac{b-a}{2}$$



αντίστοιχη **Συνθετη** μέσος απαιτεί 2η υπολογισμός της f .

Ο τύπος του Gauss με k σημεία ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμο βαθμού $2k-1$

Προχωρημένη
Αριθμητική
Ανάλυση

2

19-10-15
Δευτέρα

Αριθμητική Ολοκλήρωση Gauss

Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx$$

↳ το πολώνυμο παρεμβάτης της f σε n ισοπέχοντες κόμβους

→ Θέτω $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) \quad x_i \in [a, b]$

έτσι ώστε

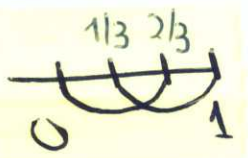
$$\int_a^b q(x) dx = \sum_{i=1}^n \omega_i q(x_i) \quad \text{για } \forall q \in \mathcal{P}_{n-1}([a, b])$$

τα πολώνυμα μέχρι και βαθμού $2n-1$ στο $[a, b]$

Παράδειγμα:

Θέτω να προσεγγίσω την τιμή του $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ με σύνθετους τύπους τραπέζιου, Simpson, μέσου.

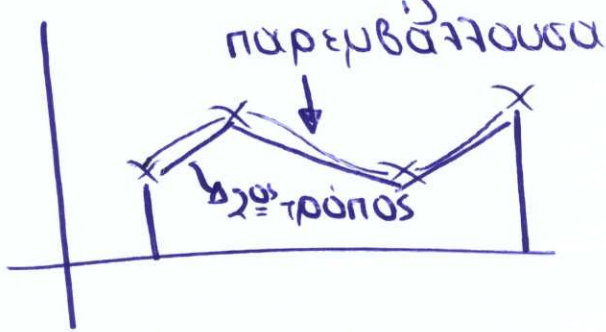
Λύση:



Κανόνας τραπέζιου: $\int_a^b e^{-x^2} dx = \sum_{i=1}^3 \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-x^2} dx \approx$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{[x_{i+1} - x_i] [e^{-x_{i-1}^2} + e^{-x_i^2}]}{2} = 0.739986$$

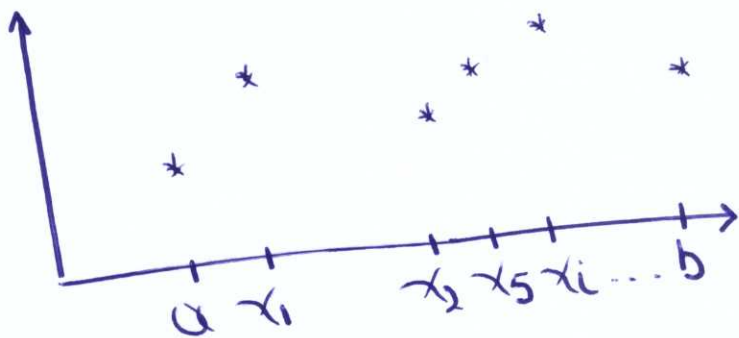
Συχνά δεν ξέρουμε την f ώστε $\int_a^b f(x) dx$
 Μπορεί να ξέρουμε μόνο μερικά $f(x_i)$ $i=1, \dots, n$



Πολυωνυμική
 παραεμβαλλομενα
 παραεμβαλλομενα πολυωνυμο
 βαθμού n στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$

Παραεμβαλλομενα με κατά τμήματα πολυωνυμικές
 συναρτήσεις (spline.)

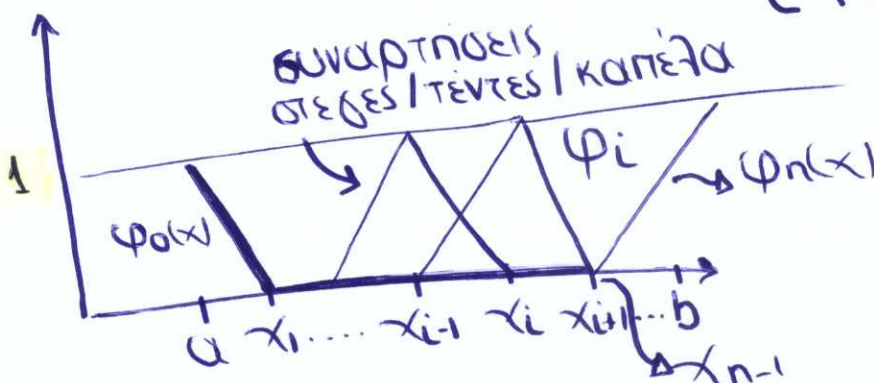
Πρόβλημα Έστω διάστημα $[a, b]$ και τα σημεία /
 κόμβοι $x_0, x_1, \dots, x_n$ και τα δεδομένα $y_0, y_1, \dots, y_n$
 Θέλουμε να κατασκευάσουμε κατά τμήματα γραμμική
 παραεμβαλλομενα στα σημεία (x_i, y_i) $i=0, 1, \dots, n$
 των επιπέδων.



Θέλω:
 παραεμβαλλομενα

$$S(x) = \sum_{i=0}^n y_i \phi_i(x)$$

(Λογισμικό με να βρούμε
 μια βάση για τον $\mathbb{R}^{n+1}$)
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$



Ξεκινάνε με 1
 και καταλήγουν σε 1

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & x_{i+1} \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} < x < x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i < x < x_{i+1} \end{cases}$$

Απ'έξω

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & x \geq x_1 \\ \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & x_0 \leq x < x_1 \end{cases}$$

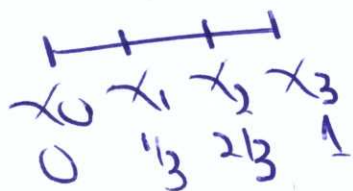
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

Αν $y_i = f(x_i)$
 Σφάγμα = Άθροισμα των σφαγμάτων της γραμμικής
 ποτυωνυμικής παρεμβολής σε κάθε (x_{i-1}, x_i)

Παράδειγμα:

Έστω $f(x) = e^{-x^2}$, και οι κόμβοι $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$
 Υπολογίστε την γραμμική spline που παρεμβάλλει
 την f σε αυτά τα σημεία.

Λύση: $\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x \geq \frac{2}{3} \\ 3x & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{2/3 - x}{1/3} & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \end{cases}$

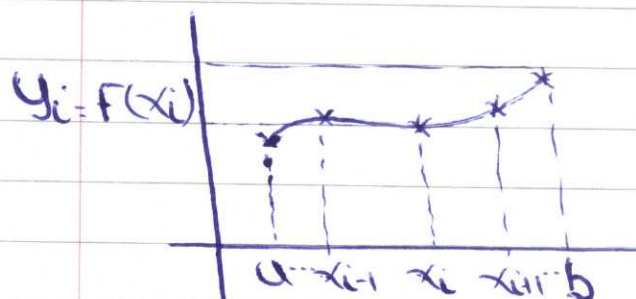


$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ \frac{x - 1/3}{1/3} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \frac{1 - x}{1/3} & x_2 \leq x < x_3 \end{cases}$$

κ.τ.λ για φ_0, φ_3 έτσι ώστε

$$s(x) = \sum_{i=0}^3 e^{-x_i^2} \varphi_i(x)$$

Προχωρημένη Αριθμητική Ανάλυση 26-10-15



$$s(x) = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i(x)$$

φ_i

Ορισμός: Η οικογένεια (είναι διανυσματικός χώρος!) $S_1(\Delta)$ διαμερίσεως $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ του $[a, b]$ ορίζεται ως

$$S_1(\Delta) = \left\{ s \in C^0([a, b]) : s \Big|_{[x_{i-1}, x_i]} \text{ είναι γραμμικό πολυώνυμο } i=1, \dots, n \right\}$$

Θεώρημα (Εκτίμησης σφάλματος κατά τμήματα γραμμικής παρεμβολής / γραμμικών spline)

Έστω $f \in C^1([a, b])$ και έστω διαμερίση $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ με $h_i = x_i - x_{i-1}$

Έστω $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$. Τότε $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - s(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{\substack{\zeta=1, \dots, n \\ a \leq \zeta \leq b}} |f'(\zeta)|$

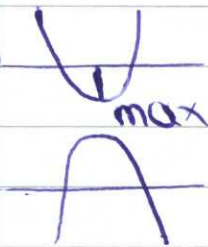
Απόδειξη: Στο κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ η $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ είναι η πολυωνυμική παρεμβολή βαθμού 1!

$$|f(x) - s(x)| = \frac{1}{2} \prod_{i=0}^{(1+1)} (x - x_i) |f^{(1+1)}(\xi(x))|$$

$$\xrightarrow{\frac{h}{2} \rightarrow \frac{h}{2}} = \frac{1}{2} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| |f^{(2)}(\xi(x))|$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \leq \frac{h^2}{8} |f^{(2)}(\xi)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(2)}(\xi)|$$

παρεμβολή



Συγκρίνει η κατά τμήματα γραμμική παρεμβολή

Μέχρι στιγμής, δεν φτιάχνω καρπίδια
αλλά περνάω ευθείες από τα σημεία

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση του Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

Δείξτε ότι η παρεμβολή σου $s \in S_1(\Delta)$
όπου $\Delta: -1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, διαμερίση
με ισαπέχοντες κόμβους, δηλ. $h = x_i - x_{i-1}$
 $\forall i = 1, \dots, n$ συγκρίνει καθώς $n \rightarrow \infty$

Λύση: Από τον τύπο του σφάλματος

$$|s(x) - f(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{-1 \leq \xi \leq 1} \left| \left(\frac{1}{1+25x^2} \right)'' \right|$$

$$h = \frac{2}{n}$$

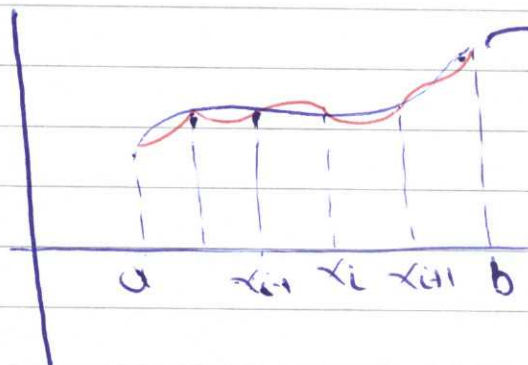
$$|s(x) - f(x)| \leq \frac{4}{n^2 \cdot 8} \max_{-1 \leq \xi \leq 1} \left| \left(\frac{1}{1+25x^2} \right)'' \right|$$

$$\left[\frac{1}{1+25x^2} \right]'' = \frac{50(1+25x^2) - (50x)(1+25x^2)}{(1+25x^2)^3}$$

$$\text{αρα } \max_{-1 \leq x \leq 1} |(f(x))''| \leq \frac{50 \cdot 26 - 0}{1} = 33800$$

$$\text{αρα } |S(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n^2} 16900 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

* * Παρεμβολή με κυβικές spline



πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού
 $\forall [x_{i-1}, x_i]$
 $\downarrow$
 οι κόκκινες

κατά τμήματα
 κυβικά πολυώνυμα
 $S \in C^m([a, b])$

Κυβικές spline είναι τα
 πολυώνυμα 3^{ου} βαθμού
 $S \in C^3([a, b])$ $\max(m) = 3$

Αν ζητήσω $m = 3$ τότε S''' πρέπει να είναι συνε-
 όρως S''' είναι σταθερή σε $\forall [x_{i-1}, x_i]$
 Άρα, η μόνη δυνατότητα είναι η S''' να είναι
 σταθερή στο $[a, b]$

$\Rightarrow S$ είναι πολυώνυμο ταλαχιστον 3 βαθμού

Άρα, οι μόνες δυνατές κυβικές παρεμβολές
 ορατότητας $C^3([a, b])$ είναι τα πολυώνυμα

Μπορώ να έχω $m=2$;
ΝΑΙ

Ορισμός: Ορίζω την οικογένεια (είναι διατεταγμένος χώρος!) $S_3(\Delta)$ των κυβικών splines ως προς μια διαμέριση $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$\text{ως } S_3(\Delta) = \left\{ s \in C^2([a,b]) : s \text{ είναι κυβικό πολυώνυμο στο } [x_{i-1}, x_i], i=1, \dots, n \right\}$$

Θεώρημα: (Παρεμβολή με κυβικές splines)

Έστω $f \in C^1([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$ και μια ομοιομερή διαμέριση $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $h = x_i - x_{i-1}$, $\forall i=1, \dots, n$ δηλ. $h = \frac{b-a}{n}$. Τότε υπάρχει ακριβώς μια

συνάρτηση $s \in S_3(\Delta)$ τέτοια ώστε

$$s(x_i) = f(x_i), i=0, 1, \dots, n$$

$$\text{και } s'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\text{και } s'(x_n) = f'(x_n)$$

Απόδειξη/Κατασκευή

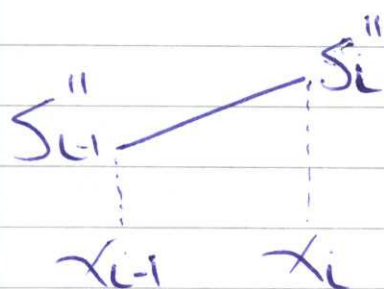
Για συντομία θέτω $y_i := f(x_i)$, $s_i := s(x_i)$

$$s_i' := s'(x_i)$$

$$s_i'' := s''(x_i)$$

$$i=0, 1, \dots, n$$

$$s \in S_3(\Delta) \rightsquigarrow s'' \Big|_{[x_{i-1}, x_i]} \text{ γραμμική } i=1, \dots, n$$



Εξίσωση ευθείας

$$S''(x) = S''_{i-1} \frac{(x-x_i)}{h} + S''_i \frac{(x-x_{i-1})}{h}$$

$$h = x_i - x_{i-1}$$

Πράγματι $S''(x_i) = S''_i$, $S''(x_{i-1}) = S''_{i-1}$
 Ορίζουμε 2 φορές ως προς x

$$S(x) = \frac{S''_i}{h} \frac{(x-x_i)^3}{6} - \frac{S''_{i-1}}{h} \frac{(x-x_i)^3}{6} - \alpha_i x + \beta_i$$

≡ έρουμε ότι $S(x_i) = y_i (= f(x_i))$
 και $S(x_{i-1}) = y_{i-1} (= f(x_{i-1}))$

Άρα, υπολογίζω τα α_i, β_i από τις απαιτήσεις

$$S(x_i) = y_i$$

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1}$$

δηλαδή 2 γραμμικές εξισώσεις με 2 αγνώστους
 τα α_i, β_i

$$\begin{aligned} \text{και παίρνω } S(x) &= \frac{1}{6h} \left(\underset{i+1}{S''} (x - \underset{i}{x_{i-1}})^3 \right. \\ &- \underset{i}{S''_{i-1}} (x - \underset{i+1}{x_i})^3 \Big) + \left[\frac{\underset{i+1}{y_i} - \underset{i+1}{S''} \frac{h}{6}}{h} \right] (x - \underset{i}{x_{i-1}}) - \\ &- \left[\frac{\underset{i}{y_{i-1}} - \underset{i}{S''_{i-1}} \frac{h}{6}}{h} \right] (x - \underset{i+1}{x_i}) \end{aligned}$$

Απαιτούμε $S'(x)$ να είναι συνεχής!

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2h} \left[\underset{i+1}{S''} (x - \underset{i}{x_{i-1}})^2 - \underset{i}{S''_{i-1}} (x - \underset{i+1}{x_i})^2 \right] \\ &+ \frac{\underset{i+1}{y_i} - \underset{i+1}{S''} \frac{h}{6}}{h} - \frac{\underset{i}{y_{i-1}} + \underset{i}{S''_{i-1}} \frac{h}{6}}{h} \end{aligned}$$

και απαιτούμε $s'(x_i^-) = s'(x_i^+)$ $\forall i=1, \dots, n$



$$s'(x_i^-) = s'(x_i^+)$$

$$\frac{1}{2h} s_i'' h^2 + \frac{y_i}{h} - s_i'' \frac{h}{6} + s_{i-1}'' \frac{h}{6} = -\frac{1}{2h} s_i'' h^2 + \frac{y_{i+1}}{h}$$

$$-s_{i+1}'' \frac{h}{6} - \frac{y_i}{h} + s_i'' \frac{h}{6} \approx$$

$$s_{i-1}'' + 4s_i'' + s_{i+1}'' = \frac{6}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \quad \forall i=1, \dots, n$$

Δεν έχω χρησιμοποιήσει ακόμα στο θεώρημα, τα άκρα.

$n-1$ εξισώσεις με $n+1$ αγνώστους, 2 εξισώσεις ακόμα!

Επίσης απαιτώ $s'(x_0) = f'(x_0)$
και $s'(x_n) = f'(x_n)$

$$\text{Σημειώση } f'(x_0) = s'(x_0) \approx$$

$$\approx 2s_0'' + s_1'' = \frac{6}{h^2} (y_1 - y_0 - hf'(x_0)) \approx x_0$$

$$f'(x_n) = s'(x_n) \approx s_{n-1}'' + 2s_n'' = -\frac{6}{h^2} [y_n - y_{n-1} - hf'(x_n)]$$

Άρα, παίρνω τριτικά και γραμμικές εξισώσεις με $n+1$ αγνώστους!

Θεώρημα: Εκτίμηση σφάλματος παρεμβολής με κυβικές spline

Έστω $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$ οποιοδήποτε διαμέριση $\delta\eta\lambda.$ $h = x_i - x_{i-1}$, $h = \frac{b-a}{n}$

Τότε, αν $f \in C^4([a, b])$ και $s \in S_3(\Delta)$ όπως στο προηγούμενο Θεώρημα.

($\delta\eta\lambda$ $f(x_i) = s(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ και $f'(x_0) = s'(x_0)$

και $f'(x_n) = s'(x_n)$)

Τότε έχουμε $\max |f^{(m)}(x) - s^{(m)}(x)| \leq C_m h^{4-m} \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(4)}(\xi)|$

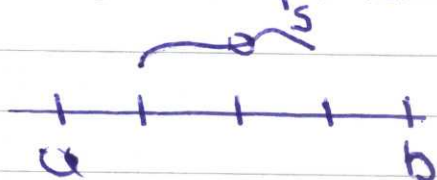
για $m = 0, 1, 2, 3$

με $C_0 = \frac{5}{384}$, $C_1 = \frac{1}{24}$, $C_2 = \frac{3}{8}$, $C_3 = 2$

2-11-15

ΑΙΘΟΥΣΑ 1, ΓΕΩΓΕΙΟ
ΚΤΗΡΙΟ Ε, ΤΟΠ. ΜΑΘ.

Κυβικές splines



$$S_i'' = s''(x_i)$$

↳ αχρυστοι

$$y_i = f(x_i)$$

$$-S_{i-1}'' + 4S_i'' + S_{i+1}'' = \frac{6}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$2S_0'' + S_1'' = \frac{6}{h^2} [(y_1 - y_0) - hf'(x_0)]$$

$$2S_n'' + S_{n-1}'' = \frac{6}{h^2} [-(y_n - y_{n-1}) + hf'(x_n)]$$

Γρ. Σύστημα $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0'' \\ S_1'' \\ \vdots \\ S_i'' \\ \vdots \\ S_n'' \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - y_0 - hf'(x_0) \\ y_0 - 2y_1 + y_2 \\ \vdots \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} \\ \vdots \\ -y_n + y_{n-1} + hf'(x_n) \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η κυβική spline που παρεμβάλλει την f με $f(x) = \frac{\sin(5x)}{1+x^2}$

στα $x_i, i=0,1,2,3,4$, $x_0=0, x_1=\frac{1}{4}, x_2=\frac{1}{2}$
 $x_3=\frac{3}{4}, x_4=1$

Λύση:

$$y_i = f(x_i), \text{ δηλ. } y_0 = f(0) = 0$$

$$y_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.8932$$

$$y_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.4788$$

$$y_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.3658$$

$$y_4 = f(1) \approx 0.4795$$

$$f'(x) = \frac{5 \cos(5x)(1+x^2) - 2x \sin(5x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x_0) = f'(0) = 5$$

$$f'(x_n) = f'(1) = 1.1886$$

$$\boxed{n=4}, h=\frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα, } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0'' \\ S_1'' \\ S_2'' \\ S_3'' \\ S_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -166.0283 \\ 81.6086 \\ -18.8928 \\ -17.7792 \\ 27.4368 \end{pmatrix}$$

$$S - \frac{1}{2}S_1 \rightarrow S_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & b_0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 & 0 & 0 & | & b_1 - \frac{1}{2}b_0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & | & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & | & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & | & b_4 \end{pmatrix} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

*** Επανάληψη στην αριθμητική ανάλυση: τα $S_0'', S_1'', \dots, S_n''$ πώς θα βρω
ΚΥΒΙΚΑ SPLINE $\rightarrow$ ΤΡΟΠΕΡΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΣ

ΦΥΣΙΚΕΣ ΚΥΒΙΚΕΣ SPLINES

Αντί για $S'(x_0) = f'(x_0)$ τα οποία
 $S'(x_n) = f'(x_n)$

ΔΕΝ χλωρίζω S'' , εν γένει, όταν
 παρεμβάλλω σημεία (x_i, y_i) στο
 επίπεδο

Θέτω $S_0'' = 0 = S_n''$

και άρα για να βρω τη φυσική κυβική spline
 λύνω το $n \times n$ γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1'' \\ S_2'' \\ \vdots \\ S_{n-1}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$(n-1) \times (n-1)$

Γραμ. Σύστημα $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0'' \\ S_1'' \\ \vdots \\ S_i'' \\ \vdots \\ S_n'' \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 - 2y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Βασική ιδέα γραμμικής αλγεβρας: ΒΑΣΗ

Γιατί είναι σημαντική;

Γιατί μπορώ να γράψω όλα τα αττα σαν γραμμικό συνδυασμό

Ορισμοί στην διαμερίση Δ :

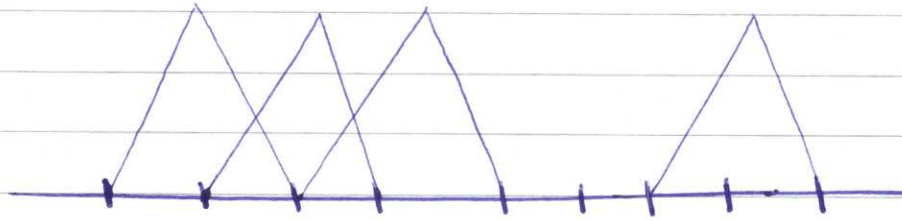
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$h = x_i - x_{i-1} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$S_3(\Delta)$ είναι η οικογένεια των κυβικών splines στη Δ

$$\dim S_3(\Delta) = n+3$$

γιατί πριν είχα γνωστά $n+1$, $f'(x_0)$, $f'(x_n)$
 εδω σε γνωρίζω $f'(x_0)$, $f'(x_n)$



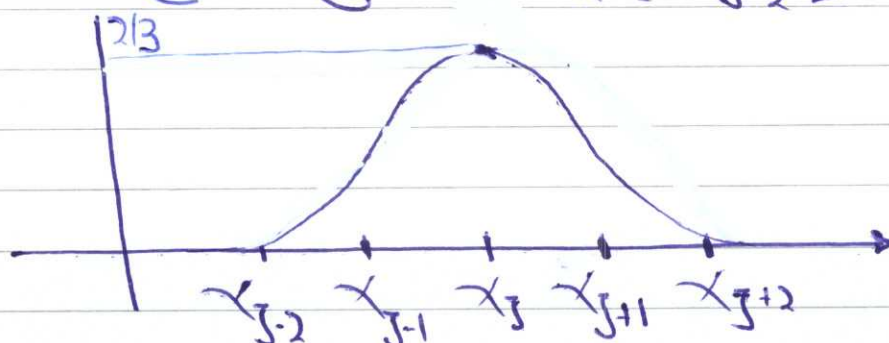
Γραμμικές spline $\rightarrow$ απλά γραμμικές όχι 2 φορές παραχωρίσιμες

Ψοφείας (το διαστήμα στο οποίο η συνάρτηση είναι μη μηδενική)

B-splines (Basis-spline)
 συνάρτησεις
 βάσης των κυβικών spline

Έστω ορισμένη διαμέριση τότε οι συνάρτησεις της μορφής

$$S_j(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{j-2})^3}{6h^3}, & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}] \\ \frac{2}{3} - \frac{(x-x_j)^2}{h^2} - \frac{(x-x_j)^3}{2h^3}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{1}{6} + \frac{x_{j+1}-x}{2h} + \frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h^2} - \frac{(x_{j+1}-x)^3}{2h^3}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ \frac{x_{j+2}-x}{6h^3}, & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}] \\ 0, & x \leq x_{j-2} \text{ ή } x \geq x_{j+2} \end{cases}$$

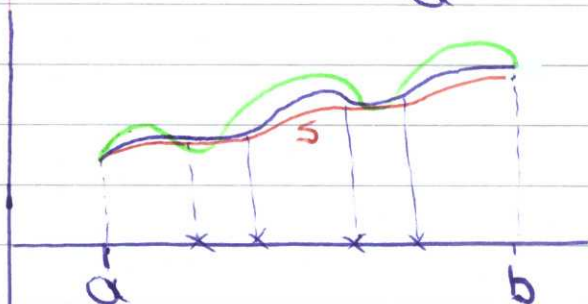


Θεώρημα: Έστω s η φυσική κυβική spline

που παρεμβάλλει μια συνάρτηση $f \in C([a, b])$
στα σημεία $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Τότε η s έχει τη μικρότερη δυνατή ενέργεια κάμψης από όλες τις συναρτήσεις

$U \in C^2([a, b])$, που παρεμβάλλουν την f , δηλ. $\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (U''(x))^2 dx$



Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \int_a^b (U''(x))^2 dx &= \int_a^b [U''(x) - s''(x) + s''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [U''(x) - s''(x)]^2 dx + \int_a^b [s''(x)]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_a^b [U''(x) - s''(x)] s''(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \int_a^b (U''(x) - s''(x)) s''(x) dx \\ = \int_a^b [U(x) - s(x)]'' s''(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Ολοκλήρωση κατά μέρη} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (U(x) - s(x))'' s''(x) dx$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ = - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (U(x) - s(x))' s'''(x) dx \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{[(U(x) - s(x))' s''(x)]}_{=0} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \end{aligned}$$

Γιατί $s'(x_0) = s'(x_n) = 0$
από τις φυσικών κυβικών splines

$$\int_a^b f'g dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b fg' dx$$

$$g(x) = s''(x)$$

$$f(x) = [u(x) - s(x)]'$$

$s''(a) = 0$ φυσική spline

Γιατί ο προηγούμενος όρος είναι 0;

$i=0$

$i=1$

$$[u(x_1) - s(x_1)] s''(x_1) - [u(x_0) - s(x_0)] s''(x_0) + [u(x_2) - s(x_2)] s''(x_2) - [u(x_1) - s(x_1)] s''(x_1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u(x) - s(x)] s'''(x) dx$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} [u(x) - s(x)] s'''(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Άρα, έχουμε $\int_a^b [u(x) - s(x)] s''(x) dx =$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u(x) - s(x)] s'''(x) dx = 0$$

Άρα, $\int_a^b (u''(x))^2 dx = \int_a^b [u''(x) - s''(x)]^2 dx$

$$+ \int_a^b [s''(x)]^2 dx \Rightarrow \int_a^b [u''(x)]^2 dx$$

$$\geq \int_a^b [s''(x)]^2 dx \quad \forall u \in C^2([a, b])$$

παρεμβάθουσα

Κυβικές splines του Hermite

(φυσικό) κυβικές splines $S_3(\Delta)$ είναι

$S \in S_3(\Delta) \subseteq C^2([a,b])$ με κόστος την "μειωμένη τοπικότητα".

Αν απαιτήσουμε μόνο C^1 -ομαλότητα τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε κυβικές splines με βελτιωμένη τοπική συμπεριφορά

Ορισμός: (κυβικές splines του Hermite)

Έστω διαμέριση $\Delta: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ του $[a,b]$ και συναρτήσεις $S \in C^1([a,b])$ τέτοιες ώστε $S|_{[x_i, x_{i+1}]}$ είναι κυβικό

πολυώνυμο, $i=0,1,\dots,n-1$

Αυτές ονομάζονται κυβικές splines του Hermite

Θεώρημα: (παρεμβολή με κυβικές splines του Hermite)

Έστω διαμέριση $\Delta: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ του $[a,b]$ και έστω $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f \in C^1([a,b])$. Τότε υπάρχει μοναδική κυβική spline του Hermite S τέτοιες ώστε:

Απόδειξη

S

$x_i \quad x_{i+1}$

4 εξισώσεις
4 αγνώστους

$$\begin{aligned} S(x_i) &= f(x_i) & i=0,1,\dots,n \\ S'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned}$$

Προχωρημένη Αριθμητική Ανάλυση 9-11-15

Κυβικές splines του Hermite

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1([a, b])$$

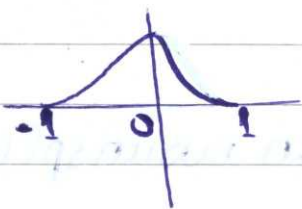
Πρόβλημα: βρες S κυβική σε $\forall$ διάστημα (x_i, x_{i+1})
υιός Δ :

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ τέτοιου ώστε:

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i) \\ S'(x_i) = f'(x_i) \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Διάσταση: $2n+4$

$$V: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$



απαιτώ:

V κυβικό πολυώνυμο

$$V(-1) = 0 = V(1) \quad V(0) = 1$$

$$V'(-1) = 0 = V'(1)$$

$$V'(-1) = 0 = V'(1) = 0$$

$$V(x) = \begin{cases} (x+1)^2(1-x), & -1 \leq x \leq 0 \\ (x-1)^2(1+x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$W: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

απαιτώ:

W κυβική σε κάθε διάστημα $W(-1) = W(0) = W(1) = 0$

$$W'(-1) = 0 = W'(1) \quad W'(0) = 1$$

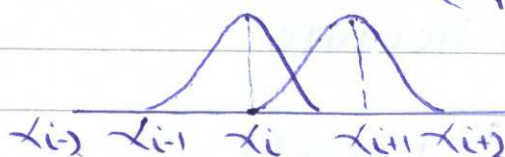
$$W(x) = \begin{cases} (x+1)^2 x, & -1 \leq x \leq 0 \\ (x-1)^2 x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

απεικόνιση: $[-1, 1] \rightarrow [x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x} = \frac{x - x_i}{h}$$

$$h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

Θέτω $V_i(x) = V\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$ $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$



$$S_1(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) V_i(x)$$

$$S_1(x_i) = f(x_i)$$

$$W_i(x) = h w\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

$$h W_i'(x) = h w'\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \frac{1}{h} = 1$$

Αρα $S_2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f'(x_i) W_i(x)$ τ.ω $S_2(x_i) = 0, S_2'(x_i) = f'(x_i)$



Αρα:

$S(x) = S_1(x) + S_2(x)$ είναι παναδική κυβική spline του Hermite άκρων

$$S(x_i) = S_1(x_i) + S_2(x_i) = f(x_i) + 0 = f(x_i)$$

$$S'(x_i) = S_1'(x_i) + S_2'(x_i) = 0 + f'(x_i) = f'(x_i)$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε την κυβική spline του Hermite για την συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ στο διάστημα $[0, 1]$ με $n=3$ με οποιοδήποτε διαμερισμό.

Λύση: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1 \quad h = \frac{1}{3}$$

$$S(x) = \sum_{i=1}^3 f(x_i) V_i(x) + f'(x_i) W_i(x)$$

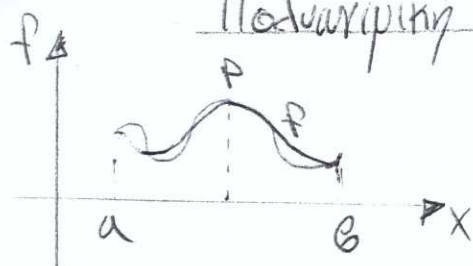
$$f(x_0) = \dots$$

$$f(x_1) = \dots$$

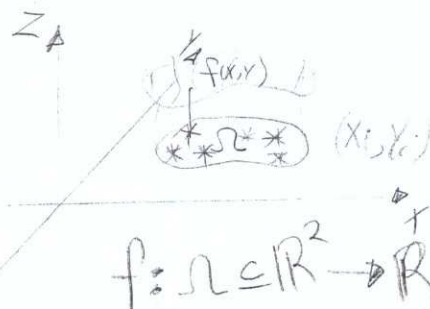
$$f(x_2) = \dots$$

$$f(x_3) = \dots$$

Πολυωνομική παρεμβολή σε πολλές διαστάσεις



$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



$$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Πρόβλημα: πολυωνομικής παρεμβολής σε 2 διαστάσεις:

Έστω $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω κόμβοι $(x_i, y_i), (i, j) \in I$. Βρέ πολυώνυμο 2 μεταβλητών P τέτοιο ώστε:

$$f(x_i, y_i) = P(x_i, y_i) \quad \forall (i, j) \in I$$

Το πρόβλημα πολυωνομικής παρεμβολής σε πολλές διαστάσεις δεν έχει εν γένει μοναδική. Η ύπαρξη μοναδικής λύσης (η όχι) εξαρτάται από την επιλογή των κόμβων (x_i, y_i) .

Παράδειγμα: $f(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ Πέσω να βρω την γραμμική παρεμβάλλουσα της f στα $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$ δηλ $P(x, y) = a + bx + cy$ δεδομένα $f(0, 0) = 0, f(1, 1) = 0, f(2, 2) = 0$.

Για να είναι το P παρεμβάλλουσα στα $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$

$$0 = a + b \cdot 0 + c \cdot 0 = P(0, 0) = f(0, 0)$$

$$a + b + c = P(1, 1) = f(1, 1) = 0$$

$$a + 2b + 2c = P(2, 2) = f(2, 2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 0 \\ b = -c \end{matrix}}$$

Άρα όλα τα σημεία P με $P(x, y) = b(x - y) \quad \forall b \in \mathbb{R}$ παρεμβάλλουν.

Αφού 6 τυχαίο μπορώ να έχω ότι η διαφορά θέτω
σε ένα σημείο (x, y) με $x \neq y$ άρα δεν έχω καθόλου
προσέγγιση !!!

(Δεν έχουμε προσέγγιση δίνω τα σημεία $(0,0), (1,1), (2,2)$
= χαρακτηριστικά για ευθεία και έχουμε απείρες λύσεις)

Θεώρημα: Έστω $P_n = \{P: P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j, a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

δηλαδή το σύνολο των πολυωνύμων 2 μεταβλητών το πολύ
βαθμού n .

Π.Χ. το P_1 περιέχει όλα τα πολυώνυμα

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq 1} a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y$$

το P_2 περιέχει όλα τα πολυώνυμα

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq 2} a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$$

Διάσταση $P_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \binom{n+2}{2}$

Θεώρημα: Έστω (x_i, y_i) κόμβοι με $0 \leq i+j \leq n$

Το πρόβλημα της πολυωνυμικής παρεμβολής σε δύο διαστάσεις
στας κόμβους (x_i, y_i) λύνεται μοναδικά για $P \in P_n$

αν και μόνο αν $\begin{matrix} x_i \neq x_j \\ y_i \neq y_j \end{matrix} \nleftrightarrow (i, j)$

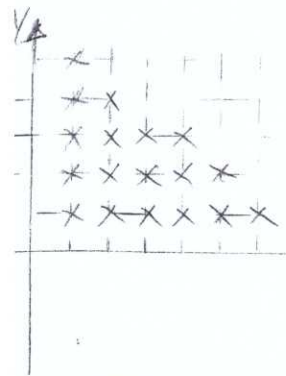
Παράδειγμα

Θέλω να παρεμβάλω την $f(x, y) = x^2 - y^2$ $P \in P_1$
παρεμβάτεται την f στα $(0,0), (1,0), (0,1)$.

$$\left. \begin{aligned} a_{00} + a_{10}x + a_{01}y &= f(0,0) = 0 \\ a_{00} + a_{10}1 + a_{01}0 &= f(1,0) = 1 \\ a_{00} + a_{10}0 + a_{01}1 &= f(0,1) = -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_{00} &= 0 \\ a_{10} &= 1 \\ a_{01} &= -1 \end{aligned}$$

άρα $\Gamma(x,y) = x - y$

Τελικά για μοναδικότητα της παρεμβολής αρκεί να έχω τους κόμβους κατανεμημένους στο επίπεδο ως εξής.

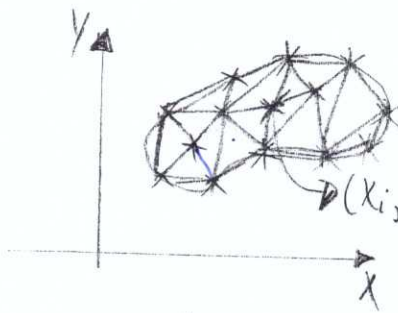
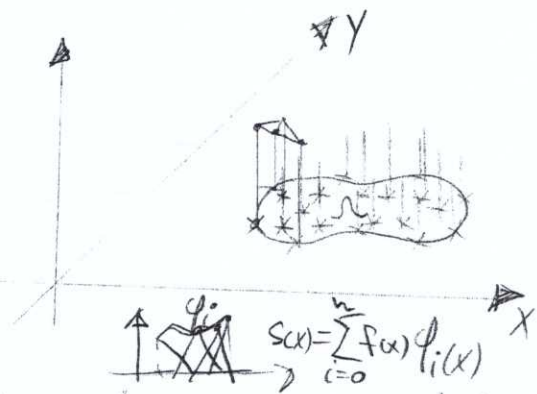


- Δυσκολίες: Πολυωνοική παρεμβολή δεν είναι πρακτική σε 2 ή περισσότερες διαστάσεις, καθώς η θέση των κόμβων επιρρέαζει τη δυνατότητα εύρεσης της παρεμβάλλουσας

- $P(x,y) = C$ Τι γίνεται αν έχω "πολλούς" κόμβους;

- Πόλλοι κόμβοι $\Rightarrow$ μεγάλο γραμμικό σύστημα πυκνό, κακός δείκτης καταστάσης

- Αριθμός των κόμβων πρέπει να είναι $\binom{n+2}{2}$.



Προσεγγίζω το πεδίο Ω από πολυγωνική καρδιά και θεωρώ εγγραμμοποιούν τις κορυφές τους δεδομένους κόμβους.

Σε κάθε τρίγωνο $T \in \mathcal{T}$ (πρώτο πεπερασμένο στοιχείο)

θεωρώ γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής στις κορυφές έτσι ώστε η κατά τμήματα γραμμική παρεμβάλλουσα να είναι συνεχής.
δηλ. θεωρώ τον εξής χώρο συνεχών κατά τμήματα γραμμικών spline σε 2 διαστάσεις

$$S'_\gamma = \{u \in C(\Omega) : u|_T \in P_1(T) \forall T \in \mathcal{T}\}$$

Έστω για αρίθμηση των κόμβων (x_k, y_k) του Ω , $k=1 \sim N$.
Ορίσω $\phi_k \in S'_\gamma$ τ.ω.

$$\phi_k(x_k, y_k) = 1 \text{ και } \phi_k(x_i, y_i) = 0 \quad \forall i \neq k$$



συναρτήσεις πυρήνες

Έστω $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, και κόμβοι (X_k, Y_k) , $k=1, \dots, N$ ή $S \in \mathcal{S}$.
Δίνεται από τον τύπο

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^N f(x_k, y_k) \varphi_k(x, y).$$

Προχωρημένη Αριθμητική Ανάλυση 30-11-15

$T = \{T\}$ τριγωνοποίηση ενός πολυγωνικού χωρίου Ω και έστω f_i δεδομένα $i=1, \dots, N$ στους κόμβους (x_i, y_i)
Έστω $S_T^0 = \{ v \in C(\Omega) : v|_T \text{ γραμμική συνάρτηση} \}$ T διαστάσεων
Η παρεμβάλλουσα στα (x_i, y_i, f_i) δίνεται από $s(x) = \sum_{i=1}^N f_i \varphi_i(x, y)$

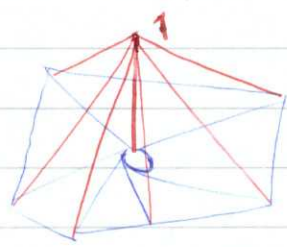
όπου φ_i οι συναρτήσεις βάσης.....

Έστω $1 \dots N$ αρίθμηση των κόμβων της T

wesh (πλέγμα)
κόμβοι (nodes)

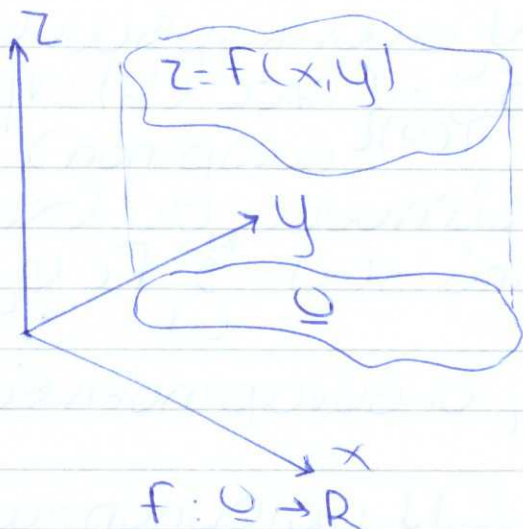
..... δηλ. $\varphi_i \in S_T^0(\Omega)$ και
 $\varphi_i(x_i, y_i) = 1$

$\varphi_i(x_j, y_j) = 0 \quad \forall j \neq i$



Συναρτηση
παρανίδα

Αριθμητική Ολοκλήρωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

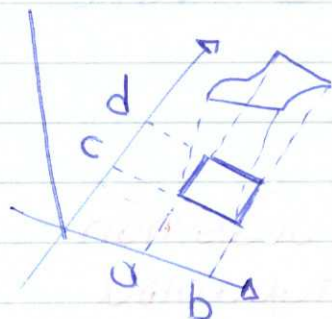


Πρόβλημα

$$\int_U f(x, y) dx dy = ;$$

(Κεντρική λύση: spline-παρεμβάλλουσα)

Έστω $U = [a, b] \times [c, d]$



Θεώρημα Fubini

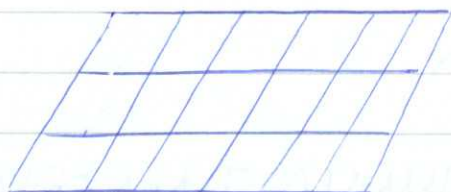
$$\int_U f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Κανόνας τραπεζίου σε 2 διαστάσεις

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \approx \int_a^b \frac{f(x,c) + f(x,d)(d-c)}{2} dx$$

$$\approx \frac{(d-c)(b-a)}{4} [f(a,c) + f(b,c) + f(a,d) + f(b,d)]$$

Σύνθετος κανόνας προκύπτει από τον απλό κανόνα σε υπό διαίρεση του χωρίου σε ορθογώνια.



*** π.χ 2 κανόνας του μέσου σε 2 διαστάσεις σε ορθογώνια χωρία

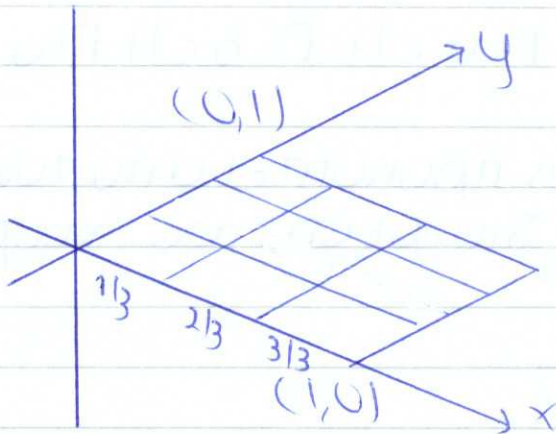
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \approx \int_a^b f(x, \frac{c+d}{2})(d-c) dx \approx (b-a)(d-c) f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$$

Παράδειγμα:

Υπολογίστε προσέγγιση του $\int_0^1 \int_0^1 e^{x^2+y} dy dx$

με σύνθετο κανόνα μέσου, ορισμένου σε πλέγμα ορθογωνίων 3×3
 & ομοιομορφου

Λύση:



ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ : ΤΟΥ ΡΕΙΣΟΥ ΣΕ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΛΕΓΜΑ ΑΝΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y) dy dx$$

ΟΠΟΥ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x} = b$
 $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{N_y} = d$

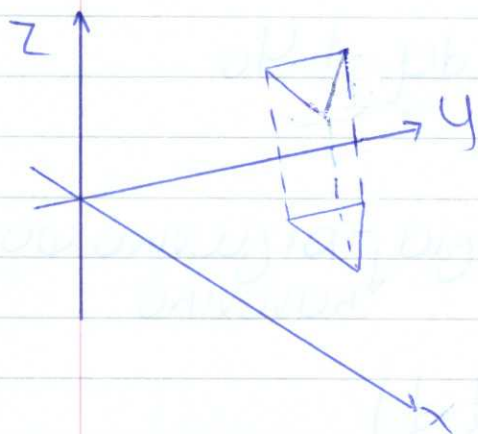
ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΡΕΙΣΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ

$$\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right)$$

ΚΑΙ ΑΡΑ ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΑΣ ΕΧΟΥΜΕ
 $N_x = N_y = 3$

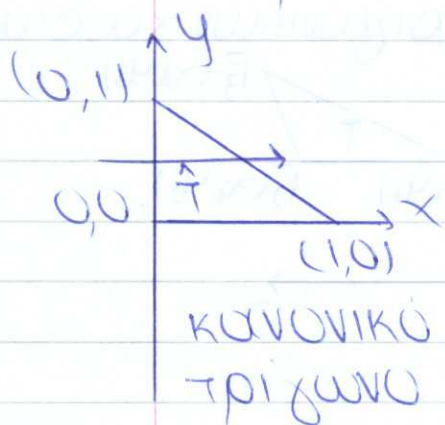
$$\int_0^1 \int_0^1 e^{+x^2 \sqrt{y}} dy dx \approx \frac{1}{9} [f(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}) + f(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}) + f(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}) + f(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}) + f(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})]$$

Αν θέλω (που θέλω!) να ολοκληρώσω
 συναρτήσεις ορισμένες σε τριγωνικά
 χωρία τι κάνω;

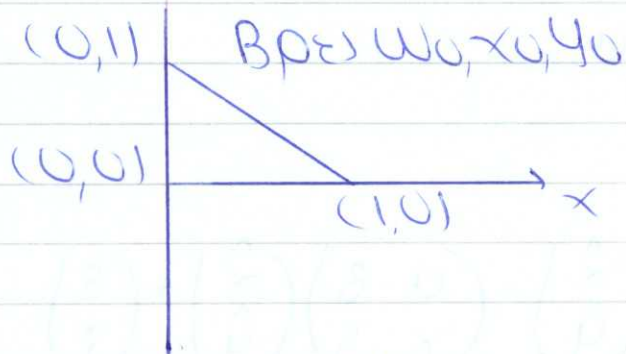


$$\int_0^1 \int_0^{1-y} f(x,y) dx dy$$

Ακόμα πιο απλά



$$\int_{\hat{\Gamma}} f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x,y) dx dy$$



$$\int_{\hat{\Gamma}} p(x,y) dx dy = W_0 p(x_0, y_0)$$

$p(x,y) = a + bx + cy$
 γραμμικό πολυώνυμο

$$\text{Αρκεί: } \frac{1}{|\hat{\Gamma}|} \int_{\hat{\Gamma}} 1 dx dy = W_0$$

$$\frac{1}{|\hat{\Gamma}|} \int_{\hat{\Gamma}} x dx dy = W_0 x_0$$

$$\frac{1}{|\hat{\Gamma}|} \int_{\hat{\Gamma}} y dx dy = W_0 y_0$$

σημ. $1 = \omega_0 \quad |\hat{T}| = 1/2$

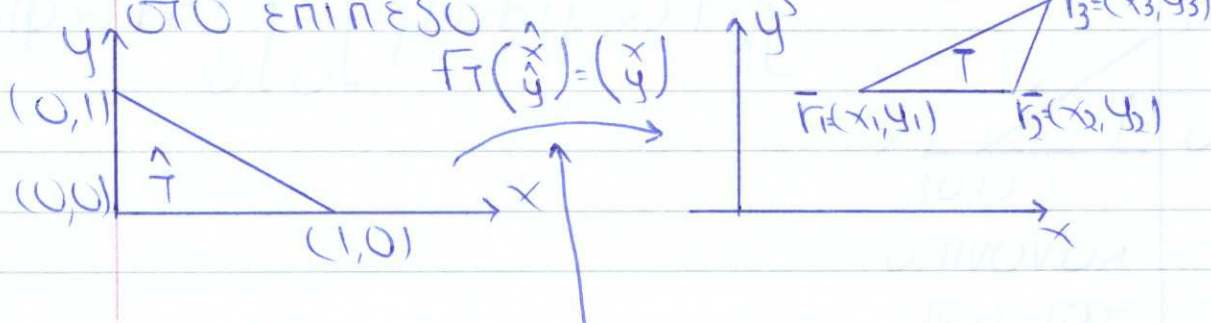
$$\frac{1}{3} = 2 \int_0^1 \int_1^{1-y} x dx dy = 1 \cdot x_0$$

$$\frac{1}{3} = 2 \int_0^1 \int_1^{1-y} y dx dy = 1 \cdot y_0$$

Κανόνες ενός σημείου για $\downarrow$ τριγωνικό
χωρίο ΚΑΝΟΝΙΚΟ

$$2 \int_{\hat{T}} f(x,y) dx dy \approx f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Μετασχηματισμός μεταξύ τριγωνικών χωρίων
στο επίπεδο



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑ-
ΤΙΣΜΟΥ $\vec{f}_T$
 $\vec{f}_T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Έστω γραμμικό $\vec{f}_T \left(\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varsigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \zeta \end{pmatrix}$

και θέλω να βρω $\alpha, \beta, \delta, \varsigma, \varepsilon, \zeta$
έτσι ώστε $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \vec{f}_T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{f}_T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{f}_T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{σητ. } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \zeta \end{pmatrix} \leadsto \boxed{\begin{matrix} \varepsilon = x_1 \\ \zeta = y_1 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \varepsilon \\ \delta \cdot 1 + \delta \cdot 0 + \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon \\ \delta + \zeta \end{pmatrix} \leadsto \boxed{\begin{matrix} \alpha = x_2 - x_1 \\ \delta = y_2 - y_1 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \varepsilon \\ \delta \cdot 0 + \delta \cdot 1 + \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta + \varepsilon \\ \delta + \zeta \end{pmatrix} \leadsto \boxed{\begin{matrix} \beta = x_3 - x_1 \\ \delta = y_3 - y_1 \end{matrix}}$$

$$\text{Άρα } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{F}_T \left(\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Σημείωση: δεν έχει σημασία ποιο σημείο αντιστοιχεί στο κάθε $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, σητ. στην κάθε κορυφή. Ο τύπος δουλεύει για κάθε επιλογή.

Αλλαγή μεταβλητής σε πολλαπλά ολοκληρώματα.

$$\int_T f(x,y) dx dy = \int_T f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) dx dy = \int_{\hat{T}} f \left(\vec{F}_T(\hat{q}) \right) dx dy$$

$$(\text{Jacobian}) = \int_{\hat{T}} f \left(\vec{F}_T(\hat{q}) \right) \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\hat{x},\hat{y})} d\hat{x} d\hat{y}$$

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\hat{x},\hat{y})} &= \det \begin{pmatrix} (f_1)_{\hat{x}} & (f_1)_{\hat{y}} \\ (f_2)_{\hat{x}} & (f_2)_{\hat{y}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)\hat{x} + \overbrace{(x_3 - x_1)\hat{y}}^{+f_1} + x_1 \\ (y_2 - y_1)\hat{x} + \underbrace{(y_3 - y_1)\hat{y}}_{+f_2} + y_1 \end{pmatrix}$$

Άρα, μπορώ να εφαρμόσω τον κανόνα του
μέσου στο $\int_{\hat{T}} f \left(F_T \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right) \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\hat{x},\hat{y})} d\hat{x}d\hat{y}$

$$\approx |\hat{T}| f \left(F_T \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) \left((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)$$

Άρα, μπορώ να υποστηρίξω πάνω από
οποιοδήποτε τριγωνικό χωρίο!!!

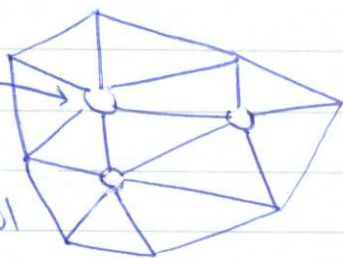
Παρατήρηση: πρέπει η $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\hat{x},\hat{y})} \neq 0$, δηλαδή
τρίγωνα απεικονίζονται σε τρίγωνα.

Κατασκευή παρεμβυσθουσών ομαλότητας
σε 2 διαστάσεις

1 διάσταση Παρεμβυσθή Hermite σε
τρίγωνοποίηση

$$\begin{array}{c|c} \sim & \\ \hline f(x_i) = s(x_i) \\ f'(x_i) = s'(x_i) \end{array}$$

πρώτες
μερικές
παραγώγιοι
συνεχείς
στους κόμβους



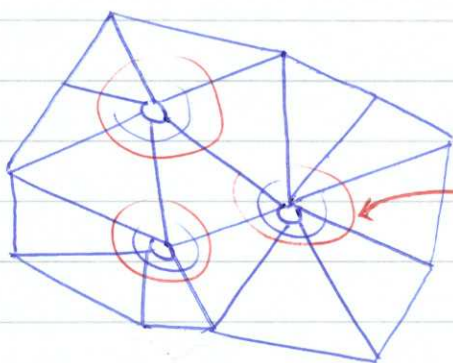
πολυώνυμο 3ου βαθμού
 $\{1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^3, y^3\}$

Δυστηχώς ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ C^1 γενικά. Είναι C^1 μόνο στους κόμβους.

Για στικά C^1 χρειάζονται περισσότεροι βαθμοί ελευθερίας:

Argyris element (στοιχείο Αργύρη)

πολυώνυμο βαθμού 5



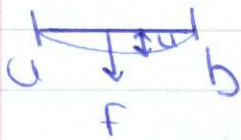
δεύτερες
παραγώγιοι
συνεχείς
στους κόμβους

Προχωρημένη Αριθμητική Ανάλυση 9-12-15

Πεπερασμένα στοιχεία για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

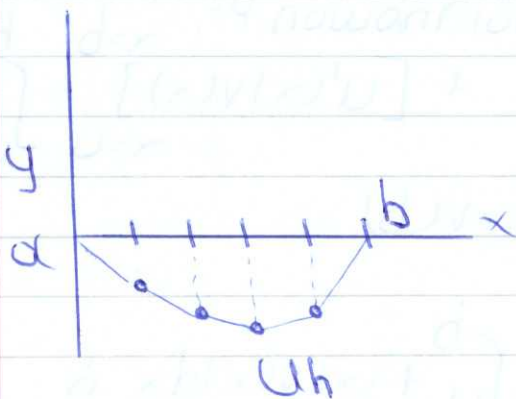
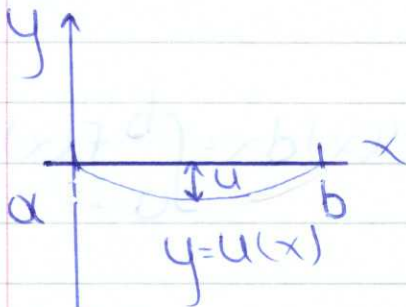
Πρόβληματα συνοριακών τιμών
στατική, ελαστικότητα κ.τ.λ

Πρόβλημα των 2 σημείων



$$-u''(x) = f(x) \text{ για } x \in (a, b) \\ \text{και } u(a) = 0 = u(b)$$

$$-(q(x)u')' + r(x)u(x) = f(x)$$



$$J(u) = \int_a^b \frac{1}{2} (u'(x))^2 - f \cdot u \, dx \rightarrow \min (=) \quad \begin{array}{l} \text{κινητική} \quad \text{δυναμική} \\ \text{σχέση} \end{array} \quad \begin{array}{l} -u''(x) = f(x) \\ u(a) = 0 = u(b) \end{array}$$

για $u(a) = 0 = u(b)$
 u : ελαχιστοποιητής

Απόδειξη Ισότητας

$$I(u+av) \geq I(u) \quad \forall u \in R$$

$$0 = \frac{dI(u+av)}{da} \Big|_{a=0} = \frac{d}{da} \Big|_{a=0} \left(\int_a^b \frac{1}{2} ((u+av)')^2 - f \cdot (u+av) dx \right) =$$

$$\frac{d}{da} \left(\int_a^b \frac{1}{2} (u')^2 + uv'v' + \frac{1}{2} u^3 (v')^2 - fu - fuv dx \right) \Big|_{a=0}$$

$$= \int_a^b u'v' + u(v')^2 - fv dx \Big|_{a=0}$$

$$= \int_a^b (u'v' - fv) dx \quad \forall v$$

Ισότητα:

$$\text{Αρα παίρνω } \int_a^b u'(x)v'(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \forall v$$

$$\int f'g dx = fg - \int fg'$$

Αντικατάσταση κατά μέρη:

$$b \text{ παραχρονική αντικατάσταση με } f(x)=v(x), g(x)=u'(x)$$

$$- \int_a^b u''(x)v(x) dx + [u'(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

$$\text{Έχω το } v: v(a)=0=v(b)$$

Αρα,

$$- \int_a^b u''(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \text{ή}$$

$$\int_a^b (u''(x) + f(x))v(x) dx = 0 \quad \forall v$$

$$\Rightarrow \text{πρέπει αναγκαστικά } u''(x) + f(x) = 0$$

Κατά την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αναζητώ $U_h \in S^0(\omega, b)$:

$$\int_a^b \frac{1}{2} (U_h(x))^2 - f(x) U_h(x) dx \rightarrow \min$$

$$U_h(a) = 0 = U_h(b)$$

Σημειώνω ως συνάρτηση:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ψάχνω $U_h \in S^0$ τ.ω

$$\int_a^b U_h'(x) V_h'(x) dx = \int_a^b f(x) V_h(x) dx \quad \forall V_h \in S^0$$

Αρκεί να βρω $U_h \in S^0$ τ.ω

$$\int_a^b U_h'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, N$$

όπου φ_i οι συνάρτησεις σκεπές.

Αλλά επίσης το $U_h \in S^0$ πρέπει να υπάρχουν $U_i \in \mathbb{R}$ τ.ω $U_h(x) = \sum_{j=1}^N U_j \varphi_j(x) \rightsquigarrow U_h' = \sum_{j=1}^N U_j \varphi_j'(x)$

$$\text{Άρα, παίρνω } \int_a^b \sum_{j=1}^N U_j \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_a^b f \varphi_i(x) dx$$

$$\text{ή } \sum_{j=1}^N U_j \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_a^b f \varphi_i(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\text{ή } \begin{pmatrix} a_{13} = \int_a^b \varphi_j' \varphi_i' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_i \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f \varphi_i dx \end{pmatrix}$$

Εστω $i=j$

$$a_{ii} = \int_a^b (\varphi_i')^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx = \frac{2}{h}$$

αν $|i-j|=1$

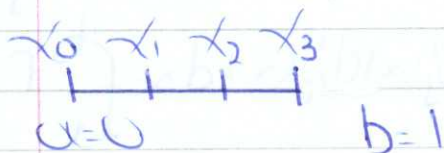
$$a_{i,i-1} = a_{i-1,i} = -\frac{1}{h}$$

αν $|i-j| > 1$

$$a_{ij} = 0$$

άρα $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \\ & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi_1(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) \varphi_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) \varphi_N(x) dx \end{pmatrix}$

Παράδειγμα:

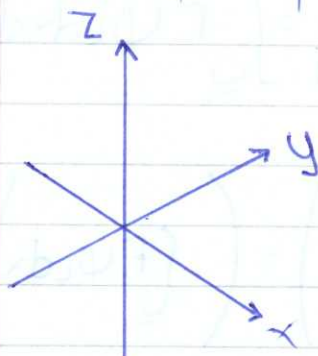


$$x_i = \frac{i}{3}, \quad i=0,1,2,3$$

$N=2$

εφαρμόστε τη μέθοδο
παρασυστημάτων στοιχείων

Πεπερασμένα στοιχεία για ΗΔΕ



$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x,y)|^2 - f(x,y)u(x,y) dx dy \rightarrow \min$$

για $u|_{\partial\Omega} = 0$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \text{ στο } \Omega \\ u(x,y) &= 0 \text{ στο } \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta u = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$$

Κατά την μείωση των πεπερασμένων στοιχείων αναζητώ $U_h \in S_T^0$ τ.ω $\int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla U_h(x,y)|^2 - f(x,y)U_h(x,y) dx dy$

Σητάση λύσεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ψάχνω $U_h \in S_T^0$ τ.ω $\int_{\Omega} \nabla U_h \nabla V_h dx dy =$

$$= \int_{\Omega} f V_h dx dy \quad \forall V_h \in S_T^0$$

Αρκεί να βρω $U_h \in S_T^0$ τ.ω $\int_{\Omega} \nabla U_h \nabla \psi_i dx dy =$

$$= \int_{\Omega} f \cdot \psi_i dx dy \quad \forall i=1, \dots, N \text{ όπου } \psi_i \text{ οι συναρτήσεις}$$

πυραυλές

$U_h \in S_T^0$ Άρα, υπάρχουν $U_j \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$U_h = \sum_{j=1}^N U_j \psi_j \quad \text{Άρα, παίρνω}$$

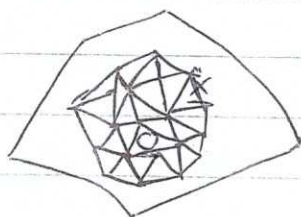
$$\sum_{j=1}^N U_j \int_{\Omega} \nabla \psi_j \nabla \psi_i \, dx \, dy = \int_{\Omega} f \psi_i \, dx \, dy \quad \forall i=1, \dots, N$$

$$\left(a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \psi_j \nabla \psi_i \, dx \, dy \right) \begin{pmatrix} U_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} f \psi_i \, dx \end{pmatrix}$$

14/12/2015

Πρόβλημα της θερμοκρασίας

$$u_t - \Delta u = f(t, x)$$



Θερμοκρασία: $u: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

είσοδος: $u(t, \underline{x}), \underline{x} \in \partial\Omega$

αρχική τιμή θερμοκρασίας: $u(0, \underline{x}) = u_0(\underline{x}), \underline{x} \in \Omega$

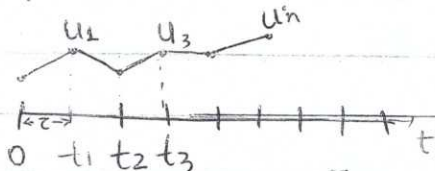
Βρες $u(t), \forall t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} (u_t \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) d\underline{x} = \int_{\Omega} (u_t - \Delta u) v d\underline{x} = \int_{\Omega} f \cdot v d\underline{x} \quad \forall v: v=0 \text{ στο } \partial\Omega$$

$$y'(t) = f(t)$$

$$y(0) = a$$

$$y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\tau}$$



Θεωρία προέκτασης u^n into $u(t^n)$ τέτοιου ώστε $\tilde{u}$ να είναι η γραμμική spline στα σημεία u^n .

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = \tilde{u}'(t) = f(t^n), \quad t \in (t^{n-1}, t^n)$$

(έκθεση μεθόδου του Euler)

$$\int_{\Omega} \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \cdot v_h d\underline{x} + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\underline{x} = \int_{\Omega} f \cdot v_h d\underline{x}, \quad \forall v_h \in S_T$$

$\varphi_i, i=1, 2, \dots, N$

$$\text{αρκεί } \int_{\Omega} \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \varphi_i d\underline{x} + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i d\underline{x} = \int_{\Omega} f(t^n) \varphi_i d\underline{x} \quad \forall i=1, \dots, N \quad (1)$$

$$\exists V_j^n \in \mathbb{R} \text{ τέτοια ώστε } u_h^n = \sum_{j=1}^N V_j^n \cdot \varphi_j$$

$$\sum_{j=1}^N V_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_i \, dx \quad \forall i=1, \dots, N$$

$$(1) \int_{\Omega} u_h^n \cdot \varphi_i \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla u_h^n \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} (\tau \cdot f^n + u_h^{n-1}) \cdot \varphi_i \, dx, \quad \forall i=1, \dots, N$$

$$\exists V_j^n \in \mathbb{R} : u_h^n = \sum_{j=1}^N V_j^n \cdot \varphi_j$$

Αρα,

$$\sum_{j=1}^N V_j^n \left(\int_{\Omega} \varphi_j \cdot \varphi_i \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx \right) = \int_{\Omega} (\tau \cdot f^n + u_h^{n-1}) \varphi_i \, dx \quad i=1, \dots, N$$

Stiffness matrix = $\text{nivakos akathymias}$

$$A = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx$$

$$F^n = (F_i^n), \quad F_i^n = \int_{\Omega} f^n(x) \cdot \varphi_i(x) \, dx$$

$$U^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ U_N^n \end{pmatrix}$$

nivakos katas

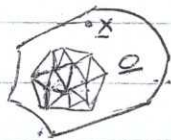
$$M = \{M_{ij}\}, \quad M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \cdot \varphi_i \, dx$$

$$(M + \tau A) \cdot U^n = G^n (= \tau F^n + M \cdot U^{n-1}) \quad \checkmark$$

Πρόβλημα των ταλαντώσεων

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

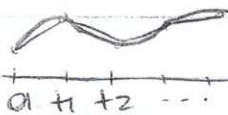
εξίσωση κύματος



συνορ. αν: $u(t, \underline{x}) = 0$ στο $\partial\Omega \quad \forall t$

αρχικ. αν: $u(0, \underline{x}) = u_0(\underline{x})$ στο Ω

1^η παράγ. : $u_t(0, \underline{x}) = v_0(\underline{x})$ στο Ω



Θέλουμε προσέγγιση u^n της $u(t_i^n)$ τέτοια ώστε $\tilde{u}$ να είναι η Hermite spline στα σημεία u .

$$\frac{u^n - 2u^{n-1} + u^{n-2}}{\tau^2} = \tilde{u}''(t) = f(t^n) \quad t \in (t^{n-1}, t^n)$$

$$\int_{\Omega} (u_{tt} \cdot v - \Delta u \cdot v) d\underline{x} = \int_{\Omega} f \cdot v d\underline{x} \quad \checkmark$$

$$\int_{\Omega} (u_{tt} \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) d\underline{x} = \int_{\Omega} f \cdot v d\underline{x}$$

προσέγγιση ως προς τον χρόνο

$$\int_{\Omega} \left(\frac{u^n - 2u^{n-1} + u^{n-2}}{\tau^2} + u \cdot \nabla u^{n-1} \cdot \nabla v \right) d\underline{x} = \int_{\Omega} f^{n-1} \cdot v d\underline{x}$$

προβέχον ως προς το χρόνο (Méthode Leapfrog ή Verlet)

$$\int_{\Omega} \frac{u_h^n - 2u_h^{n-1} + u_h^{n-2}}{\tau^2} \cdot v_h dx + \int_{\Omega} \nabla u_h^{n-1} \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f^{n-1} \cdot v_h dx$$

$$(*) \int_{\Omega} u_h^n \cdot v_h dx = \tau^2 \int_{\Omega} f^{n-1} \cdot v_h dx - \tau^2 \int_{\Omega} \nabla u_h^{n-1} \cdot \nabla v_h dx + \int_{\Omega} (2u_h^{n-1} - u_h^{n-2}) v_h dx$$

Εστω βάση φ_i του S_T^0 , άρα αρκεί

$$\int_{\Omega} u_h^n \varphi_i dx = \tau^2 \int_{\Omega} f^{n-1} \varphi_i dx - \tau^2 \int_{\Omega} \nabla u_h^{n-1} \cdot \nabla \varphi_i dx + \int_{\Omega} (2u_h^{n-1} - u_h^{n-2}) \varphi_i dx$$

$i = 1, \dots, N$

ενός $\exists V_j^n : u_h^n = \sum_{j=1}^N V_j^n \cdot \varphi_j$

$$\sum_{j=1}^N V_j^n \int_{\Omega} \varphi_j \cdot \varphi_i dx = \tau^2 \int_{\Omega} f^{n-1} \varphi_i dx - \tau^2 \int_{\Omega} \nabla u_h^{n-1} \cdot \nabla \varphi_i dx + \int_{\Omega} (2u_h^{n-1} - u_h^{n-2}) \varphi_i dx$$

H^n

$$M \cdot V_j^n = H^n$$

Για $n=1$?

Έχω τη δεικτή αρχική συνθήκη

$$u_t(0, x) = v_0(x)$$

$$*** \quad \frac{u^1 - u^{-1}}{2\tau} = v_0(x) \Rightarrow u^{-1} = u^1 - 2\tau \cdot v_0(x) \quad \begin{matrix} t=1 \\ t=0 \end{matrix} \tau$$

και από την πρώτη αρχική συνθήκη

$$u = u_0(x)$$

βρίσκω το u^1 από την $(*)$ για $n=1$.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Προχωρημένη
Αριθμητική Ανάλυση

21-12-15

Περιγραφική ερώτηση - ερώτηση κατανόησης

π.χ πώς διαφέρει η μέσος πεπερασμένων στοιχείων

Ίσως μία απόδειξη

Πεπερασμένα στοιχεία: πώς φτάνω μέχρι τον πίνακα

Επαναλήψη:

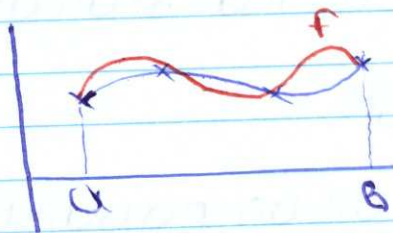
▷ Παρεμβολή

▷ Ομακότητα

▷ Αριθμητική επίλυση Δ.Ε

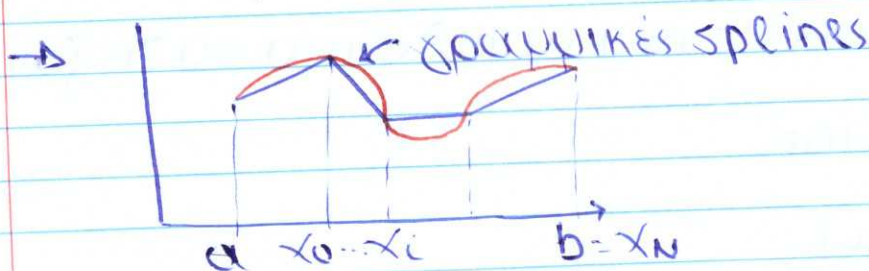
Παρεμβολή

→ επανάληψη στην πολλαμετρική παρεμβολή



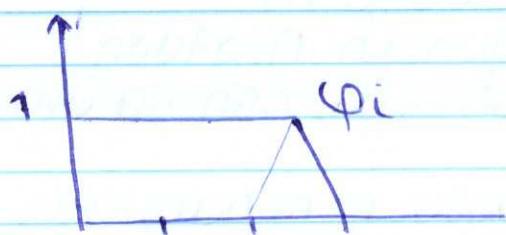
Θέλω να περάσω
από κάποια σημεία
ένα πολλαμετρο

→ παρεμβολή με κατά τμήματα πολλαμετρικές
συναρτήσεις / splines



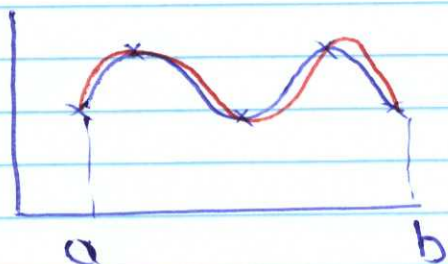
Αν αθροίσω
την τιμή σε
ένα σημείο
δεν αθροίζει
στα αθρο

συνεχείς και κατά τμήματα γραμμικές
σκληρές επιφάνειες - Δεν έχω καμία
παραγωγή



S.O.S
$$s(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \phi(x_i)$$

Πολλές φορές χρειαζόμαστε παρεμβά-
ζουσες υψηλότερης / ομαλότητας
π.χ κυβικές splines



Αν αλλαξω σε
έναν κόμβο, αλλάζει
και σε άλλους, όχι
σε όλους

Κατά τμήματα κυβικά πολυώνυμα
και έχουν συνεχείς πρώτες και δεύτερες

Λεπτές επιφάνειες - στέρνες

Ελαχιστοποιούν την δεύτερη παράγωγο

την
$$\int_a^b (s''(x))^2 dx$$

Ελαχιστοποιούν την καμπυλότητα, το ζικ-ζακ

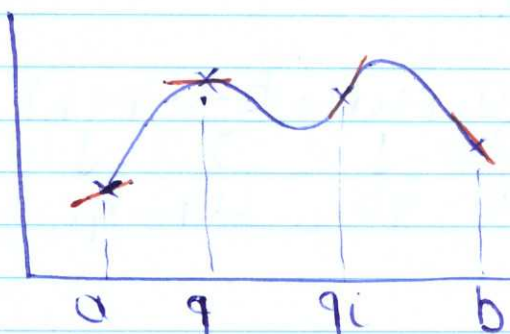
Φυσικές splines

$$s(x_i) = f(x_i)$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$

$$s''(a) = 0 = s''(b)$$

Δεν ξέρω που είναι συνεχώς παραγωγίζεται



S κατά τμήματα κυβική

τ.ω
$$\begin{aligned} S(x_i) &= f(x_i) \\ S'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned} \quad i=0,1,\dots,N$$



πρώτη παράγωγος συνεχής μόνο

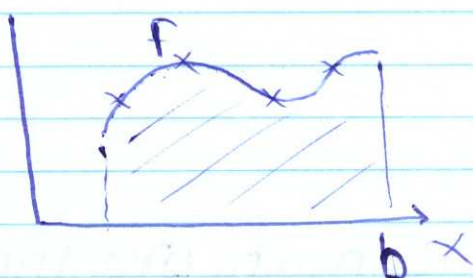
Παρεμβολή Hermite

έχει πρώτη παράγωγο

{ έρω ότι ~~είναι~~ συνεχής και πρώτη είναι

π.χ αυτοκίνητος με πολλές στροφές

Αριθμητική ολοκλήρωση



$$\int_a^b f(x) dx$$

Δεν έχω την f σε όλα τα σημεία, αλλά σε μερικά και ζητάω τον όγκο κάτω από αυτά.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{κύβος}}}{f(q_i)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{βάση}}}{w_i}$$

Κανόνες Τραπεζίου

$$\int_a^b f(x) dx \approx \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{w_0} \underbrace{f(a)}_{q_0} + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{w_1} \underbrace{f(b)}_{q_1}$$

Newton-Cotes

Κανόνος Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

↪ μέχρι και τρίτης τάξης

Κανόνες κατά Gauss

↪ μέχρι και τρίτης τάξης για 2 σημεία

Θετω $\int_a^b f(x) dx = f(q_0) w_0$

για f γραμμική

↪ βρήκαμε $q_0 = \frac{a+b}{2}$, $w_0 = b-a$

↪ $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Κανόνος του Ρέσου

~~~~~  
Σύνθετοι κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης  
(για μεγαλύτερη προσέγγιση), δηλαδή

εφαρμογή των παραπάνω κανόνων σε υποδιαστήματα.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

ΒΕΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΒΕΒΛΩΣΗΣ ΜΕ ΕΠΕΚΤΑΣΗ  
ΤΟΥ (ΚΑΝΟΝΕΣ ROMBERG)

$$\int_a^b f(x) dx - Q_h(f) = \alpha_0 h^2 + \alpha_1 h^4 + \alpha_2 h^6 + \dots$$

Τότε για  $\frac{h}{2}$ ,  $\int_a^b f(x) dx - Q_{h/2}(f) = \alpha_0 \frac{h^2}{4} + \alpha_1 \frac{h^4}{12} + \alpha_2 \frac{h^6}{64} + \dots$

$$\int_a^b f(x) dx = 4 \int_a^b f(x) dx - Q_h(f) - 4Q_{h/2}(f) = \frac{5}{4} \alpha_1 h^4 + \dots$$

$$-3 \int_a^b f(x) dx - Q_h + 4Q_{h/2} = \frac{5}{4} \alpha_1 h^4$$

$$\times (-1/3)$$

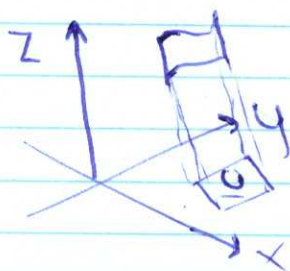
$$\int_a^b f(x) dx - \frac{(4Q_{h/2} - Q_h)}{3} = c \cdot h^4 - \dots$$

\* \* Διπλάσιαζω την ακρίβεια της τάξης ακρίβειας \* \*

5.0.5 απόδειξη

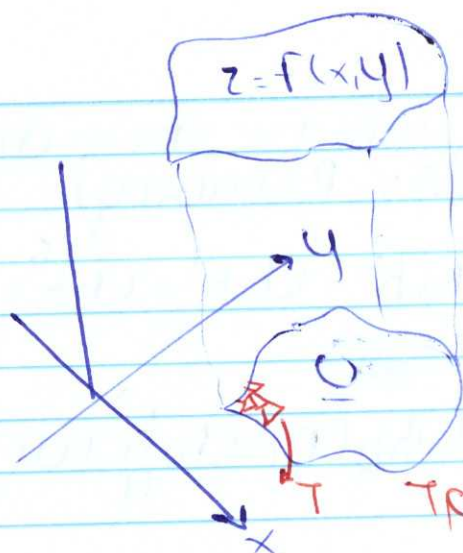
Αριθμητική ολοκλήρωση σε 2 ή περισσότερες  
διαστάσεις

$$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

και χρήση παραπάνω  
κανόνων πιας μεταβλητής

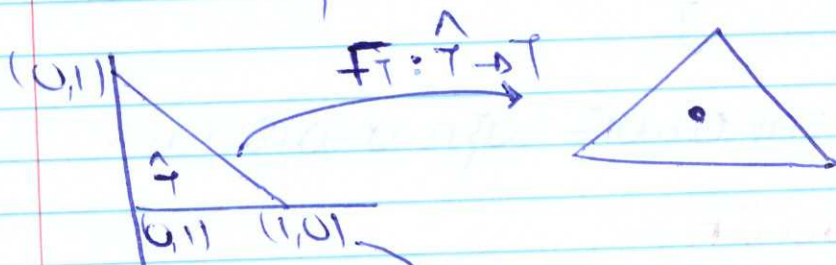


Ορίζω το χώρο με  
τριγώνια και υπο-  
οίρω το εμβαδόν κάθε  
τριγώνου

$$\int_D f(x, y) dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T f(x, y) dx dy$$

$$\int f(x, y) dx dy \approx f(b) |T|$$

Ξεκινάμε από



Απεικονίζω το  $\hat{T}$  σε οποιοδήποτε τρίγωνο

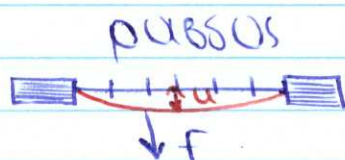
$$\int_{\hat{T}} f(F_T(\hat{x}, \hat{y})) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\hat{x}, \hat{y})} \right| d\hat{x} d\hat{y} \approx f\left(F_T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) \frac{1}{2}$$

↳ Πεπερασμένα στοιχεία

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ Δ.Ε

-  $u'' = f$  ( $\Rightarrow$ ) προσεγγίζουμε με το να ελαχιστοποιήσουμε

$$u(a) = 0 = u(b)$$



το  $J(u) = \int_a^b \left( \frac{1}{2} (u')^2 - f u \right) dx$  για  $u(a) = 0 = u(b)$   
 $\downarrow$  min!

$\Downarrow$  προσέγγιση

$$J(u_h) = \int_a^b \left( \frac{1}{2} u_h' - f \cdot u_h \right) dx$$

$\downarrow$  min!  
 $u_h(a) = 0 = u_h(b)$

1. Introduction

2. Background

3. Methodology

4. Results

5. Discussion

6. Conclusion

7. References

8. Appendix

9. Acknowledgements

10. Bibliography

11. Glossary

12. Index

13. Summary

14. Notes