

Εναλλακτικές Διαφορικές

$$\text{να λύσει η } \cos z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Rightarrow e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} - 4 = 0 \Rightarrow (e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0 \\ \Rightarrow w^2 - 4w + 1 = 0 \dots$$

λογαρίσμοι, πάλι κα $\rightarrow$ cos.

$$\{f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\}$$

Συνθήκες Cauchy-Riemann: f αναλυτική $\Rightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x$
 $\Leftrightarrow$ για να είναι αναλυτική στην u, v
να είναι συνεκτικές.

$$f = u + iv \text{ αναλυτική} \Rightarrow u, v \text{ αρμονικές} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$(1) \quad u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2 \\ v(x,y) = ? \quad \text{ώστε } f = u + iv \text{ αναλυτική (ή ολόμορφη)}$$

$$\begin{array}{l|l} u_x = v_y & \rightarrow v_y = 2 - 3x^2 + 3y^2 \quad (1) \\ u_y = -v_x & v_x = -6xy \quad (2) \end{array}$$

$$(2) \Rightarrow \int dx \quad v(x,y) = -6y \cdot \frac{x^2}{2} + c(y) = -3yx^2 + c(y) = \text{const}$$

$$(1) \Rightarrow -3x^2 + c'(y) = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow c'(y) = 2 + 3y^2 \Rightarrow \boxed{c(y) = 2y + y^3 + C}$$

$$\text{τελευταία η } (3) \rightarrow v(x,y) = -3yx^2 + 2y + y^3 + C_0, C_0 \in \mathbb{R}$$

Θ. Liouville: f ομομορφή
 f γραμμική: $|f(z)| \leq M \mid \rightarrow f$ σταθερή.
 $\forall z \in \mathbb{C}$

(*) Ν50 η ανώμαλη $|\sin z| \leq 1$ σε ίσως για $z \in \mathbb{C}$

Απόδειξη.

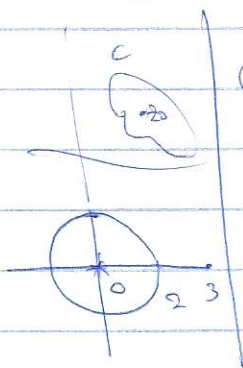
Εστω ότι ίσως $|\sin z| \leq 1$

δηλαδή $f(z) = \sin z$, f ανώμαλη (ναυα ανώμαλη, άρα ίσως ναυα ναυα)
επομένως $|f(z)| \leq 1$

από $\emptyset$ Liouville $\rightarrow f(z) = \text{constante} \rightarrow \underline{\underline{\text{άρα}}}$.

Ολοκλήρωση

Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$



(*) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z-3)} dz = \int_{|z|=2} \frac{\left(\frac{e^z}{z-3}\right)}{z^2} dz =$

↑ ανώμαλη ναυα ναυα με το
GM C

↓ $(z-0)^{n+1}$

$= 2\pi i f^{(n)}(0) = 0$

$f'(z) = \left(\frac{e^z}{z-3}\right)' = \frac{e^z(z-3) - e^z}{(z-3)^2}$

$f'(0) = -\frac{4}{9}$

με γαπες

(*) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz =$

(με Cauchy $f(z) = \sin z$, $z_0 = 0$, $n=1$)

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow \sin 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} 2^{2n+1} \cdot z^{2n+1}$

για $n=0$: $2z$

για $n=1, 2, \dots$: $-\frac{2^3}{3!} z^3 + \frac{2^5}{5!} z^5 - \dots$

επομένως $\frac{\sin 2z}{z^2} = \frac{2}{z} - \frac{2^3}{3!} z + \frac{2^5}{5!} z^3$

μιας άρα με ανισότητα

εναγέρως $\int_{|z|=1} \frac{\sin 2z}{z^2} dz = 2 \cdot \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz - \frac{2^3}{3!} \int_{|z|=1} z dz + \frac{2^5}{5!} \int_{|z|=1} z^3 dz \dots$

ΕΛΘ ΘΥΜΑΜΑΙ: $\oint_C (z-z_0)^n dz = 0 \quad n=0,1$

$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{αν } n=1 \text{ και } z_0 \text{ εντος ms } C \\ 0 & \text{αλλιως} \end{cases}$

εναγέρως $\int_{|z|=1} \frac{\sin 2z}{z^2} dz = 2 \cdot 2\pi i - 0 + 0 \dots = 4\pi i$

Παράδειγμα: $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz = ?$
 $f(z)$

αυτοματες $z_1=1, z_2=0$, εντος ms C

$z_1=1 \rightarrow$ νάτος νάτος 2 σιόν $\lim_{z \rightarrow 1} (z-z_1)^2 \cdot f(z) = c \in \mathbb{C} - \{0\}$

$z_2=0 \rightarrow$ νάτος νάτος 1 σιόν $\lim_{z \rightarrow 0} (z-z_2) f(z) = 1 \in \mathbb{C} - \{0\}$

$\text{Res}(f,1) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-1)^k \cdot f(z) \right) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2 \cdot e^z}{(z-1)^2} = 0$

Ανθ θ. ολ. Υπολ τω Cauchy: $\int_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i \left(\underbrace{\text{Res}(f,0)}_1 + \underbrace{\text{Res}(f,1)}_0 \right) = 2\pi i$

Σεπς Laurent.

$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 2z - 3}$

σεπς Laurent Group Solutions.

(a) $|z| < 1$

(b) $1 < |z| < 3$

(γ) $|z| > 3$

Beispiel: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$, $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1$

Lösung:

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3} \Rightarrow \begin{matrix} A=? \\ B=? \end{matrix}$$

a) $|z| < 1 \Rightarrow |z| < 3 \Rightarrow \left| \frac{z}{3} \right| < 1$

$$f(z) = (-A) \frac{1}{1-z} + \frac{B}{3} \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = (-A) \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{B}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{3}\right)^n = \dots$$

b) $1 < |z| < 3 \rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < 1$ oder $\left| \frac{z}{3} \right| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{A}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{B}{3} \frac{1}{1+\frac{z}{3}} \\ &= \frac{A}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \dots \end{aligned}$$