Θέμα 2º

X: ύψος (cm).

$\mu = 168$ cm $\quad \sigma = 20$ cm $\qquad \nu \geq ;$ ώστε $P[166 \leq \bar{X} \leq 170] \geq 0{,}9$

$$P[166 \leq \bar{X} \leq 170] \geq 0{,}9 \Rightarrow P\left[166 \leq \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} \leq 170\right] \geq 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{166\nu - \mu\nu}{\sigma\sqrt{\nu}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i - \mu\nu}{\sigma\sqrt{\nu}} \leq \frac{170\nu - \mu\nu}{\sigma\sqrt{\nu}}\right] \geq 0{,}9$$

Από ΚΟΘ $\quad \frac{\sum x_i - \mu\nu}{\sigma\sqrt{\nu}} = Z$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{-\cancel{2}\nu}{\underset{10}{\cancel{20}}\sqrt{\nu}} \leq Z \leq \frac{\cancel{2}\nu}{\underset{10}{\cancel{20}}\sqrt{\nu}}\right] \geq 0{,}9 \Leftrightarrow P\left[-\frac{\nu}{10\sqrt{\nu}} \leq Z \leq \frac{\nu}{10\sqrt{\nu}}\right] \geq 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow P\left[Z \leq \frac{\nu}{10\sqrt{\nu}}\right] - P\left[Z \leq -\frac{\nu}{10\sqrt{\nu}}\right] \geq 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\nu}{10\sqrt{\nu}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{\nu}{10\sqrt{\nu}}\right) \geq 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\nu}{10\sqrt{\nu}}\right) \geq \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95 = \overset{\text{[από πίνακα]}}{\Phi(1{,}6)} \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\nu}{10\sqrt{\nu}}\right) \geq \Phi(1{,}6)$$

$$\Rightarrow \frac{\nu}{10\sqrt{\nu}} \geq 1{,}6 \Leftrightarrow \frac{\cancel{\nu}\sqrt{\nu}}{10\cancel{\nu}} \geq 1{,}6 \Leftrightarrow \sqrt{\nu} \geq 16 \Rightarrow \boxed{\nu \geq 256}$$

Θέμα 3ο

$$f(x) = \vartheta x^{-2}, \quad 0 < \vartheta \leq x < \infty$$

Μ.Μ.Π. $\hat{\vartheta} = ;$

$$L(\vartheta) = f(x_1, \dots, x_\nu; \vartheta) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i; \vartheta) \overset{\text{ισον.}}{=} \prod_{i=1}^{\nu} \vartheta x_i^{-2} = \vartheta^{\nu} \prod_{i=1}^{\nu} x_i^{-2}$$

** Στην περίπτωση που ζητείται εκτιμήτρια παραμέτρου με μέθ. μεγ. πιθαν. και δίνεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το οποίο εξαρτάται από αυτή, όπως εδώ ($0 < \underbrace{\vartheta \leq x} < \infty$) τότε η μέθοδος μεγιστοποίησης του λογαρίθμου της εκτιμήτριας ($\ln \vartheta$) δεν θα με οδηγήσει σε κάποιο σαφές συμπέρασμα. Τότε παρατηρώ προσεκτικά την σχέση $L(\vartheta)$ και αποφασίζω τι πρέπει να επιλέξω απ'τα x_i ή απ'τα ϑ για να μεγιστοποιήσω αυτή την παράσταση.

Για να μεγιστοποιηθεί η $L(\vartheta)$ πρέπει το ϑ να πάρει την μέγιστη τιμή του.
όμως $\vartheta \leq x$ (από π.ο. συνάρτησης f) άρα $\forall i \quad x_i \geq \vartheta$.
οπότε η μέγιστη τιμή του ϑ θα είναι η ελάχιστη των x δηλ. η $x_{(1)}$

άρα $\hat{\vartheta} = \min x_i$

Μέθοδος Ροπών

$$E(x) = \bar{x} \Leftrightarrow \int_{\vartheta}^{\infty} x \vartheta x^{-2} dx = \vartheta \int_{\vartheta}^{\infty} x^{-1} dx = \vartheta \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_{\vartheta}^{+\infty} = \vartheta \left(0 - \frac{\vartheta^{-2}}{-2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \vartheta \cdot \frac{\vartheta^{-2}}{2} = \frac{\vartheta^{-1}}{2} = \frac{1}{2\vartheta} = \bar{x} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{\vartheta} = \frac{1}{2\bar{x}}}$$

Θέμα 4ο

Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$

$n = 7$ $\begin{cases} \bar{x} = 1038{,}71 \\ S = 81{,}93 \Rightarrow S^2 = 6712{,}53 \end{cases}$ (μετά από υπολογισμό...)

(i)
δ.ε. = ; $95\% = 0{,}95$

$$[P(c_1 < \mu < c_2) = 0{,}95 = 1 - a]$$

▶ Επειδή έχω μ, σ^2 άγνωστα και έχω κανον. κατανομή:

S^2 αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2 και $\bar{x}$ Ε.μ.π. του μ.

▶ Επομένως θα επιλέξω κατανομή Student $t(r)$

βαθμός ελευθερίας

όπου $T = \dfrac{(\bar{x} - \mu)}{S/\sqrt{n}}$

$$P(c_1 < \mu < c_2) = 0{,}95$$

$0{,}95 = 1 - a \Rightarrow a = 0{,}05$

$\dfrac{a}{2} = 0{,}025 \Rightarrow \dfrac{a}{2} + (v-1) = 6{,}025$

$$\Rightarrow P\left[\bar{x} - t_{(a/2 + (v-1))} \cdot \frac{S}{\sqrt{v}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{(a/2+(v-1))} \cdot \frac{S}{\sqrt{v}}\right] = 0{,}95$$

$$\Rightarrow P\left[1038{,}71 - t_{6{,}025} \cdot \frac{81{,}93}{\sqrt{7}} \leq \mu \leq 1038{,}71 + t_{6{,}025} \cdot \frac{81{,}93}{\sqrt{7}}\right] = 0{,}95$$

(από πίνακα)

τότε $c_1 = 1038{,}71 - 2{,}447 \cdot \dfrac{81{,}93}{\sqrt{7}} = 962{,}93$

$c_2 = 1038{,}71 + 2{,}447 \cdot \dfrac{81{,}93}{\sqrt{7}} = 1114{,}49$

(ii) δ.ε. =; αν $\sigma = 70$. ν =; με 0,95 και $L = 20$ €

Κανονικός πληθυσμός με άγνωστο μ και σ γνωστό, τότε:

Επιλέγω κανονική τυποποιημένη κατανομή με $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{\nu}}$

$$P\left[\bar{x} - z_{a/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{a/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right] = 1 - a = 0,95$$

$$\frac{a}{2} = 0,025$$

- $\bar{x} - z_{a/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = 1038,71 - 0,509975 \cdot \dfrac{70}{\sqrt{7}}$

$= 1025,21733$

$$\left(z_{0,025} = \frac{z_{0,02} + z_{0,03}}{2}\right)$$

$= 0,509975$

- $\bar{x} + z_{a/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = 1052,20267.$

δ.ε. $\rightarrow$ [1025,21733 , 1052,20267]

εύρος $\rightsquigarrow$ $L = 2 \cdot z_{a/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \Leftrightarrow \overset{10}{\cancel{20}} = \cancel{2} \cdot z_{a/2} \cdot \dfrac{7\cancel{0}}{\sqrt{\nu}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\nu} = 7 \cdot z_{a/2}$

$\Leftrightarrow \nu = 49 \cdot z^2 = 49 \cdot 0,509975^2 = 12,7437$

$\nu \simeq 13$