2012-2013 Κανονική

Θέμα 1ο

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!}$$!

- "τυχαία μία κληρωτίδα (2 κληρ.)": $P(A) = P(B) = 1/2$
- $n_A = n_B = 8$
- A: { 5 Άσπρα, 3 Μαύρα } B: { 1 Άσπρο, 7 Μαύρα }

* χωρίς επανατοποθέτηση ⇒ υπεργεωμετρική !
** με " ⇒ διωνυμική

- "2 σφαιρίδια ήταν μαύρα": γεγονός → (2M), δεδομένου αυτού ποια η πιθανότητα να βγήκαν απ' την κληρωτίδα Α. → $P(A/2M) = ;$

$$P(A/2M) = \frac{P(A)\cdot P(2M/A)^{*}}{P(2M)^{*}} \quad (1)$$

* ολική πιθανότητα: $P(2M) = P(2M/A)^{*}\cdot P(A) + P(2M/B)^{*}\cdot P(B) \quad (2)$

* (i) [υπεργεωμετρική κατανομή]: $P(2M/A) = \dfrac{\binom{5}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{\dfrac{5!}{5!\,0!}\cdot\dfrac{3!}{1!\cdot 2!}}{\dfrac{8!}{6!\,2!}} = \dfrac{1\cdot 3}{28} = \dfrac{3}{28} \quad (3)$

* (i) [υπεργ. κατανομή]: $P(2M/B) = \dfrac{\binom{1}{0}\binom{7}{2}}{\binom{8}{2}} = \dots = \dfrac{3}{4} \quad (4)$

$$(2) \xRightarrow[(4)]{(3)} P(2M) = \frac{3}{28}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{28} + \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{24}\,12}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

$$(1) \xRightarrow[(3)]{(2)} P(A/2M) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{28}\,4}}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{7}}} = \frac{1}{8} = 0.125 \rightarrow 12,5\%$$

Στην περίπτωση της επανατοποθέτησης:

*(ii) [διωνυμική κατανομή]:

$$P(2M/A) = \binom{2}{2}\left(\frac{3}{5+3}\right)^2\left(1-\frac{3}{5+3}\right)^{\cancel{2-2}\,1} = \binom{2}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow P(2M/A) = \frac{\cancel{2!}^{\,1}}{\cancel{2!}\,0!}\cdot\frac{9}{64} = 9/64$$

*(ii) [διων. κατανομή]

$$P(2M/B) = \binom{2}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^2\left(1-\frac{7}{8}\right)^{\cancel{2-2}\,1} = \frac{49}{64}$$

$$(2) \Rightarrow P(2M) = \frac{1}{2}\cdot 9/64 + \frac{1}{2}\cdot 49/64 = \frac{1}{2}\left[\frac{9+49}{64}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{58}^{\,29}}{64} = \frac{29}{64}$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} P(A/2M) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{\cancel{64}}}{\frac{29}{\cancel{64}}} \Rightarrow P(A/2M) = \frac{9}{2\cdot 29} = \boxed{\frac{9}{58}}$$

Γενικά:

- για την υπεργεωμετρική κατανομή (χωρίς επανατοποθέτηση)

$$P(X=x) = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{v-x}}{\binom{a+b}{v}}$$

στο συγκεκριμένο πρόβλημα π.χ. α: άσπρες συνολικά

β: μαύρες "

ν: όσες παίρνω

x: το γεγονός που επιθυμώ

- για την διωνυμική κατανομή (με επανατοποθέτηση)

$$P(X=x) = \binom{v}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{v-k}$$

ν: πόσες φορές εκτελώ το πείραμα

k: " " βγήκε το αποτέλεσμα που ήθελα

$$p = \frac{\text{πλήθος (π.χ. μαύρων) = επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{όλες τις μπάλες (όλα τα στοιχεία)}}$$

Θέμα 2ο

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y-x^2-y^2) & (x,y)\in(0,1)\times(0,1) \\ 0 & \end{cases}$$

(α) $a=;$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 a(x+y-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 a\left[\frac{x^2}{2}+yx-\frac{x^3}{3}-y^2x\right]_0^1 dy=\int_0^1 a\left[\frac{1}{2}+y-\frac{1}{3}-y^2\right]dy$$

$$=a\left[\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{y}{3}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=a\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad a\cdot\frac{1}{3}=1\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{a=3}$$

(β) $f_X(x)=;$

$$a=3\ \Rightarrow\ f(x,y)=3(x+y-x^2-y^2)$$

$$f_X(x)=\int_0^1 3(x+y-x^2-y^2)\,dy=3\int_0^1(x+y-x^2-y^2)\,dy$$

$$\Leftrightarrow f_X(x)=3\left[xy+\frac{y^2}{2}-x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=3\left[x+\frac{1}{2}-x^2-\frac{1}{3}\right]$$

$$f_X(x)=3\left(x-x^2+1/6\right)$$

(γ) $P[X(1-X) \geq 2/9] = ;$

$$P[X(1-X) \geq 2/9) = P(X - X^2 - 2/9 \geq 0)$$

$$X - X^2 - 2/9 = 0 \quad \Delta = 1 - 4 \cdot \frac{2}{9} = 1/9 \quad X_{1,2} = \frac{-1 \pm 1/3}{-2} = \begin{cases} 1/3 \\ 2/3 \end{cases}$$

	1/3		2/3	
−		+		−

$$P(-(X-1/3)(X-2/3) \geq 0) = P((X-1/3)(X-2/3) \leq 0)$$

$$= P((X-1/3) \leq 0 \cup (X-2/3) \leq 0) = P(\cancel{(X-1/3) \leq 0}) + P((X-2/3) \leq 0 - P(\cancel{(X-1/3) \leq 0})$$

$$= P((X-2/3) \leq 0) = P(X \leq 2/3) = F_X(2/3)$$

$$= \int_0^t f_X(x)dx = \int_0^{2/3} 3\left(x - x^2 + \frac{1}{6}\right)dx = 3\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x}{6}\right]_0^{2/3}$$

$$= 3\left[\frac{\frac{4}{9}}{2} - \frac{\frac{8}{27}}{3} - \frac{2/3}{6}\right] = 3\left[\frac{2}{9} - \frac{8}{81} - \frac{1}{9}\right] = 3 \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{27}$$

$$\boxed{P[X(1-X) \geq 2/9] = \frac{1}{27}}$$

(δ) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = ;$

- $E(X,Y) = \int_0^1\int_0^1 xy \cdot 3 \cdot (x+y-x^2-y^2)dxdy = \int_0^1 3\int_0^1 (x^2y + xy^2 - x^3y - xy^3)dxdy$

$$= \int_0^1 3\left[\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^4y}{4} - \frac{x^2y^3}{2}\right]_0^1 dy = \int_0^1 3\left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}y^3\right)dy$$

$$= 3\int_0^1\left(\frac{1}{12}y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^3\right)dy = 3\left[\frac{1}{12}\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{y^4}{4}\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E(XY) = 3\left[\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{E(XY) = \frac{1}{4}}$$

• $$E(X) = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot 3\cdot\left(x - x^2 - \frac{1}{6}\right)dx = 3\int_0^1 x^2 - x^3 - \frac{x}{6}\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{12}\right]_0^1 = 3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right] = 0$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \cancel{0\cdot E(Y)}^{\,0} = \frac{1}{4}.$$

(ε) X, Y ανεξάρτητες;

Εφόσον $Cov(X,Y) \neq 0$ από (δ) ερώτημα, συνεπώς και X, Y **δεν** είναι ανεξάρτητες

Θέμα 3ο

τ.μ. $X \sim$ ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\vartheta)$ στο διάστημα $(0,\vartheta]$

$\Downarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\vartheta - 0} & x \in [0,\vartheta] \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) ν.δ.ο. Ε.Μ.Π. $\hat{\vartheta} = \max\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$

Ε.Μ.Π. του ϑ $\quad L(\vartheta) = f(x_1,\ldots x_\nu;\vartheta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\vartheta) = \prod_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\vartheta} = \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{\nu}$

* Χρησιμοποιώ την βοηθητική: δείκτρια του συνόλου $[0,\vartheta]$ $\quad I_{(0,\vartheta)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,\vartheta] \\ 0 & x \notin [0,\vartheta] \end{cases}$

$$\Rightarrow L(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^{\nu}}\prod_{i=1}^{\nu} I_{(0,\vartheta)}(x_i)$$

$I_{(0,\vartheta)}(x_i) = 1 \quad \forall\, i = 1,\ldots,\nu$ και $0 \leq x_i \leq \vartheta \;\; \forall\, i = 1,\ldots\nu$

Επομένως για να μεγιστοποιήσω την πιθανοφάνεια δηλαδή το $L(\vartheta)$, χρειάζομαι την μικρότερη τιμή του ϑ (λόγω παρονομαστή), που να ικανοποιεί ωστόσο την συνθήκη $x_i \leq \vartheta$ (γιατί αλλιώς θα έχω $I(x) = 0 \to L(\vartheta) = 0$).

άρα Ε.Μ.Π. είναι το $\hat{\vartheta} = \max_{i=1,\ldots n}\{x_i\}$

(β) ν.δ.ό. $\hat{\vartheta}_n$ σ.π.π. $f(x) = n\vartheta^{-n} x^{n-1}$

Συνάρτηση κατανομής της $\hat{\vartheta} = \max_{i=1,\dots,n} \{X_i\}$ έστω $= T$.

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X_{(\nu)} \leq t) = P(X_1, \dots, X_\nu \leq t) \overset{\text{τυχ.μ.}}{\underset{\text{ανεξάρτητες}}{=}}$$

$$P(X_1 \leq t) \cdot P(X_2 \leq t) \cdot \ldots \cdot P(X_\nu \leq t) \overset{\text{ισόνομες}}{=} [P(X \leq t)]^\nu = [F_X(t)]^\nu$$

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \nu(F_X(t))^{\nu-1} \cdot f_X(t) \quad (1)$$

$$f_X(t) = \frac{1}{\vartheta - 0} \ (\text{για } t \in [0,\vartheta]) \ (2) \quad \text{και} \quad F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{\vartheta} dx \quad \text{για } t \in [0,\vartheta]$$

$$\Leftrightarrow F_X(t) = \frac{x}{\vartheta}\Big|_0^t = \frac{t}{\vartheta} \quad (3)$$

$$(1) \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Longrightarrow}} f_T(t) = \nu \cdot \left(\frac{t}{\vartheta}\right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\vartheta}$$

$$\Leftrightarrow f_T(t) = \nu \frac{t^{\nu-1}}{\vartheta^\nu}, \ \text{για } t \in (0,\vartheta)$$

διαφορετικά $f(t) = 0$.

(γ) $\varepsilon_n = E[(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)]^2 = Var(\hat{\vartheta}_n) + (E[\hat{\vartheta}_n] - \vartheta)^2 = ;$ (μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης)

$$E(\hat{\vartheta}_n) = \int_0^\vartheta x \cdot \nu \cdot \frac{x^{\nu-1}}{\vartheta^\nu} dx = \int_0^\vartheta \frac{\nu}{\vartheta^\nu} x^\nu dx = \frac{\nu}{\vartheta^\nu} \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\Big|_0^\vartheta = \frac{\nu}{\vartheta^\nu}\left(\frac{\vartheta^{\nu+1}}{\nu+1} - 0\right)$$

$$E(\hat{\vartheta}_n) = \frac{\nu}{\nu+1} \cdot \vartheta \quad (1)$$

$$\underset{\uparrow \text{ μεροληψία}}{b(\vartheta)} = E(\hat{\vartheta}_n) - \vartheta \overset{(1)}{=} \frac{\nu}{\nu+1} \cdot \vartheta - \vartheta = \frac{\cancel{\nu\vartheta} - \cancel{\nu\vartheta} - \vartheta}{\nu+1} = \boxed{-\frac{\vartheta}{\nu+1}} \quad (2)$$

$$Var(\hat{\vartheta}_n) = E(\hat{\vartheta}_n^2) - (E(\hat{\vartheta}_n))^2 \quad (3)$$

$$E(\hat{\vartheta}^2) = \int_0^\vartheta x^2 \cdot \frac{\nu x^{\nu-1}}{\vartheta^\nu} dx = \int_0^\vartheta \frac{\nu}{\vartheta^\nu} x^{\nu+1} dx = \frac{\nu}{\vartheta^\nu} \frac{x^{\nu+2}}{\nu+2}\Big|_0^\vartheta = \frac{\nu}{\vartheta^\nu} \cdot \frac{\vartheta^{\nu+2}}{\nu+2} = \boxed{\frac{\nu\vartheta^2}{\nu+2}} \quad (4)$$

6

$$Var(\hat{\vartheta}) \overset{(4)}{\underset{(1)}{\Longrightarrow}} Var(\hat{\vartheta}) = \frac{\nu}{\nu+2}\vartheta^2 - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\cdot\vartheta\right)^2 = \frac{\nu}{\nu+2}\vartheta^2 - \frac{\nu^2}{(\nu+1)^2}\vartheta^2 \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_n \overset{(5)}{\underset{(1)}{\Longrightarrow}} \mathcal{E}_n = \frac{\nu}{\nu+2}\vartheta^2 - \frac{\nu^2}{(\nu+1)^2}\vartheta^2 + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\vartheta - \vartheta\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_n = \frac{\nu}{\nu+2}\vartheta^2 - \cancel{\left(\frac{\nu}{\nu+1}\vartheta\right)^2} + \cancel{\left(\frac{\nu}{\nu+1}\vartheta\right)^2} - 2\cdot\frac{\nu}{\nu+1}\vartheta\cdot\vartheta + \vartheta^2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_n = \frac{\nu}{\nu+2}\vartheta^2 - \frac{2\nu\vartheta^2}{\nu+1} + \vartheta^2 = \left[\frac{(\nu+1)\nu - 2\nu(\nu+2) + (\nu+2)(\nu+1)}{(\nu+1)(\nu+2)}\right]\vartheta^2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_n = \left[\frac{\cancel{\nu^2} + \nu - \cancel{2\nu^2} - \cancel{4\nu} + \cancel{\nu^2} + \nu + \cancel{2\nu} + 2}{(\nu+1)(\nu+2)}\right]\cdot\vartheta^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_n = \frac{2\vartheta^2}{(\nu+1)(\nu+2)}}$$

(δ) ν.δ.ό. η $\tilde{\vartheta}_n = 2\,\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ.

... τότε θα πρέπει να ισχύει ότι $E(\tilde{\vartheta}_n) = \vartheta$.

$$\Leftrightarrow E\left(2\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)\right) = \vartheta \Rightarrow E\left(2\,\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{2\cancel{\nu}}{\cancel{\nu}}E(X) = 2E(X) \quad (1)$$

$$E(X) = \int_0^{\vartheta} x\,\frac{1}{\vartheta}\,dx = \frac{x^2}{2\vartheta}\Big|_0^{\vartheta} = \frac{\vartheta^{\cancel{2}}}{2\cancel{\vartheta}} = \frac{\vartheta}{2} \quad (2)$$

$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} E(\tilde{\vartheta}_n) = 2\cdot E(X) = \cancel{2}\cdot\frac{\vartheta}{\cancel{2}} = \vartheta$ άρα $\tilde{\vartheta}_n$ αμερόλ. εκτιμήτρια του ϑ

(ε) μέσο τετρ. σφάλμα εκτίμησης $\delta_n = E[(\tilde{\vartheta}_n - \vartheta)^2]$
και $\varepsilon_n / \delta_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$

$$\delta_n = E((\tilde{\vartheta}_n - \vartheta)^2) = Var(\tilde{\vartheta}_n) + \cancel{(E(\tilde{\vartheta}_n) - \vartheta)^2}^{\to 0}$$
(επειδή από (δ) αφού $\tilde{\vartheta}_n$ αμερ. εκτιμήτρια $E(\tilde{\vartheta}_n) = \vartheta$) !

$$Var(\tilde{\vartheta}_n) = E(\tilde{\vartheta}_n^2) - (E(\tilde{\vartheta}_n))^2$$

$$Var(\tilde{\vartheta}_n) = Var\left(2\,\frac{X_1 + \ldots X_n}{n}\right) = Var(2\bar{X}) = 4\,Var(\bar{X}) = \frac{4}{\nu^2} Var\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right)$$

$$\overset{\text{ανεξαρτ.}}{=} \frac{4}{\nu^2} \sum Var(X_i) \quad (1)$$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 \quad (2)$$

$$E(X_i^2) = \int_0^{\vartheta} x^2 \cdot \frac{1}{\vartheta}\,dx = \left[\frac{x^3}{3\vartheta}\right]_0^{\vartheta} = \frac{\vartheta^{\cancel{3}\,2}}{3\cancel{\vartheta}} = \frac{\vartheta^2}{3} \quad (3)$$

$$E(X_i) = \int_0^{\vartheta} x\,\frac{1}{\vartheta}\,dx = \left[\frac{x^2}{2\vartheta}\right]_0^{\vartheta} = \frac{\vartheta}{2} \quad (4)$$

$$(2) \overset{(3)}{\underset{(4)}{\Longrightarrow}} Var(X_i) = \frac{\vartheta^2}{3} - \frac{\vartheta^2}{4} = \frac{4\vartheta^2 - 3\vartheta^2}{12} = \frac{\vartheta^2}{12}$$

άρα $$\delta_n = Var(\tilde{\vartheta}_n) \overset{(1)}{=} \frac{4}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} Var(X_i) = \frac{4}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\vartheta^2}{12} = \frac{4}{\nu^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\nu}\,\frac{\vartheta^2}{\cancel{12}_3} = \frac{\vartheta^2}{3\nu}$$

$$\frac{\varepsilon_n}{\delta_n} \overset{(\gamma)}{=} \frac{\frac{2\cancel{\vartheta^2}}{(\nu+1)(\nu+2)}}{\frac{\cancel{\vartheta^2}}{3\nu}} = \frac{6\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{6\nu}{\nu^2 + 3\nu + 2} \overset{\div \nu}{=} \frac{6}{\nu + 3 + \frac{2}{\nu}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{6}{\underset{\to\infty}{\nu} + 3 + \underset{\to 0}{\frac{2}{\nu}}} \overset{\left(\frac{6}{\infty}\right)}{=} 0$$

Θέμα 4º

$n = 50$

$x = 5$

$\hat{p} = \dfrac{5}{50} = 0{,}1.$

(α) δ.ε. = 99% του p: ποσοστού πολιτών που συμφωνούν.

$$P(c_1 < p < c_2) = 0{,}99$$

$$c_{1,2} = \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}1 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{50}} = 0{,}1 \pm z\sqrt{\frac{18}{10.000}}$$

$$c_{1,2} = 0{,}1 \pm z \cdot \frac{3\sqrt{2}}{100}$$

$$c_{1,2} = 0{,}1 \pm 2{,}58 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{100} \quad \begin{matrix} \nearrow 0{,}2095 \\ \searrow -0{,}0095 \end{matrix}$$

$* \; 2\Phi(z) - 1 = 0.99$

$\Phi(z) = \dfrac{1.99}{2} = 0.995$!

$\overset{\text{από}}{\Longrightarrow}$ πίνακα $z = 2{,}58$ [Βλέπε Επαναληπτική 13-14 Θέμα 4º για αναλυτικότερη επεξήγηση εύρεσης του z]

άρα

$$\boxed{-0{,}0095 < p < 0{,}2095}$$

(β) πόσο πρέπει να αυξηθεί n ώστε εύρος → μισό;

$$L = 2 \cdot z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \iff n = \left(\frac{2 \cdot z}{L}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$$

$$n' = \left(\frac{2 \cdot 2{,}58}{L'}\right)^2 0{,}1 \cdot (1-0{,}1) = \left(\frac{2 \cdot 2{,}58}{0{,}1095}\right)^2 \cdot 0{,}09 \simeq 200$$

$$* \; L' = \frac{c_2 - c_1}{2} = \frac{0{,}2095 + 0{,}0095}{2} = 0{,}1095$$

άρα το δείγμα πρέπει να αυξηθεί κατά 150 $(= \underbrace{200 - 50}_{n' - n})$

(γ) $p = 0{,}1$. προσεγγ. η πιθανότητα σε $n = 500$ τουλάχιστον 70 ελαττ. ;

$$P\left(\Pi \geq \frac{70}{500}\right) = ;$$

$$P\left(\Pi \geq \frac{70}{500}\right) = 1 - P\left(\Pi \leq \frac{70}{500}\right) \underset{\substack{\text{ακολουθεί} \\ \text{κανονική} \\ \text{κατανομή}}}{\overset{\text{προσεγγ. από ΚΟΘ}}{=}} 1 - P\left(\frac{\Pi - \hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq \frac{\frac{7\cancel{0}}{50\cancel{0}} - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{500}}}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{0{,}04}{0{,}0134}\right) = 1 - P(Z \leq 2{,}98) = 1 - \Phi(2{,}98) =$$

$$\underset{\text{πίνακα}}{\overset{\text{από}}{=}} 1 - 0{,}99856 = 0{,}00144$$