

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (3 μονάδες). (α) Για τα ενδεχόμενα A και B δίνεται ότι:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad P(A|B) = P(A|B^c).$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A \cup B^c)$. Δικαιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.

(β) Αν η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ , να υπολογιστεί η μέση τιμή

$$E\left[\frac{1}{Y+1}\right].$$

(γ) Για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y δίνεται ότι είναι ανεξάρτητες και ότι $V[X] = V[Y] = \sigma^2$. Αν

$$U = X - Y \quad \text{και} \quad W = 7X - Y$$

να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(U, W)$ των U και W . Τι πληροφορία μας δίνει ο $\rho(U, W)$ για τις τυχαίες μεταβλητές U και W ;

ΘΕΜΑ 2 (3 μονάδες). Σε μια πόλη έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός X των νέων αυτοκινήτων που μπαίνουν κάθε ημέρα στην κυκλοφορία είναι τυχαία μεταβλητή με $E[X] = 10$ και $V[X] = 40$.

(α) Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα μετά από 360 ημέρες να κυκλοφορούν στην εν λόγω πόλη τουλάχιστον 3500 περισσότερα νέα αυτοκίνητα από σήμερα.

(β) Μετά από πόσες το λιγότερο ημέρες θα κυκλοφορούν στην εν λόγω πόλη πάνω από 3500 νέα αυτοκίνητα με πιθανότητα (τουλάχιστον) 90%;

(γ) Έστω Y ο αριθμός των αυτοκινήτων που αποσύρονται ημερησίως από την πόλη αυτή. Από παρατηρήσεις έχει βρεθεί ότι $E[Y] = 9$ και $V[Y] = 10$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα μετά από 360 ημέρες να κυκλοφορούν στην εν λόγω πόλη τουλάχιστον 500 περισσότερα αυτοκίνητα από σήμερα.

Για τα παραπάνω ερωτήματα μπορείτε να υποθέσετε ανεξαρτησία όπου την χρειάζεστε.

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες). Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 2\theta^2 x^{-3}$, $x \geq \theta$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Με την βοήθεια τυχαίου δείγματος X_1, \dots, X_n :

(α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια του θ με την μέθοδο των ροπών.

(β) Να εξεταστεί αν η παραπάνω εκτιμήτρια είναι αμερόληπτη.

(γ) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του θ .

(δ) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της ποσότητας $1/\theta$.

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες). Υπάρχει μια καταγγελία ότι ένα ποτάμι μολύνεται από λύματα του βιολογικού καθαρισμού μιας παραποτάμιας πόλης. Για να ελέγξει αυτόν τον ισχυρισμό ένας περιβαλλοντολόγος έχανε 5 τυχαίες μετρήσεις της συγκεντρώσης διαλυμένου οξυγόνου σε κάθε ένα από δύο σημεία του ποταμού. Το ένα σημείο (Α) βρίσκεται πάνω από την πόλη και το άλλο (Β) κάτω από την πόλη (πλησιέστερα προς τις εκβολές του ποταμού). Τα αποτελέσματα, σε μέρη στο εκατομμύριο δίνονται στον επόμενο πίνακα.

Σημείο Α	5.2	4.8	5.0	4.9	5.1
Σημείο Β	4.7	5.0	4.9	4.8	4.9

Υποθέστε ίσες διασπορές για τις συγκεντρώσεις στα δύο σημεία του ποταμού και ότι οι συγκεντρώσεις στα δύο σημεία Α και Β είναι ανεξάρτητες.

(α) Να βρεθεί Δ.Ε. με συντελεστή εμπιστοσύνης 95% για τη διαφορά των μέσων συγκεντρώσεων διαλυμένου οξυγόνου στα σημεία Α και Β. Τι άλλες υποθέσεις χρειάζεται να ισχύουν για να είναι τεχνηρωμένο το Δ.Ε. που κατασκευάσατε;

(β) Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε αν οι μέσες συγκεντρώσεις στα δύο σημεία Α και Β είναι ίσες;

(γ) Αν ο συντελεστής εμπιστοσύνης αυξηθεί σε 99% τι θα αλλάξει στο πιο πάνω διάστημα και γιατί; Να μην κατασκευαστεί ξανά το διάστημα.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά
ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ