2013-2014 Επαναληπτική

Θέμα 1ο

$P(A)=0,8$

$P(B)=0,6$

$P(\Gamma)=0,3$

A, B, Γ ανεξάρτητα ενδεχόμενα

(α) πιθανότητα να λυθεί

$P(A\cup B\cup \Gamma) = ;$

1ος τρόπος: $P(A\cup B\cup\Gamma) = 1 - P(A^c\cap B^c\cap\Gamma^c)$

$\Leftrightarrow P(A\cup B\cup\Gamma) = 1 - P(A^c)\cdot P(B^c)\cdot P(\Gamma^c)$

$\Leftrightarrow P(A\cup B\cup\Gamma) = 1-(1-0,8)\cdot(1-0,6)\cdot(1-0,3)$

$\Leftrightarrow P(A\cup B\cup\Gamma) = 1 - 0,2\cdot 0,4\cdot 0,7 = 0,944.$

επειδή είναι ανεξάρτητα άρα και τα συμπληρώματά τους, επομένως η τομή ($\cap$) "σπάει" σε "επί" (*)

2ος τρόπος $P(A\cup B\cup\Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(A\cap B)-P(B\cap\Gamma)-P(A\cap\Gamma) + P(A\cap B\cap\Gamma)$

$\xLeftrightarrow{\text{ανεξάρτητα}} P(A\cup B\cup\Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(A)P(B)-P(B)P(\Gamma)-P(A)P(\Gamma) + P(A)P(B)P(\Gamma)$

...

(β) πιθαν. ο A να έχει λύσει το πρόβλ. δεδομ. ότι έχει λυθεί;

$P(A \mid A\cup B\cup\Gamma) = ;$

$$P(A\mid A\cup B\cup\Gamma) \underset{\text{Bayes}}{\overset{\Theta.}{=}} \frac{P(A\cap(A\cup B\cup\Gamma))}{P(A\cup B\cup\Gamma)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B\cup\Gamma)} = \frac{0,8}{0,944} \simeq 0,85$$

(γ) να το λύσει μόνο ο A: $(A-B)\cap(A-\Gamma) = (A\cap B^c)\cap(A\cap\Gamma^c)$

δεδομένου ότι έχει λυθεί: $P(A\cup B\cup\Gamma)$ $\boxed{\text{(α) ερώτημα}}$

$$P\left[(A\cap B^c)\cap(A\cap\Gamma^c) / A\cup B\cup\Gamma\right] = \frac{P\left[(A\cap B)^c\cap(A\cap\Gamma^c)\cap(A\cup B\cup\Gamma)\right]}{P(A\cup B\cup\Gamma)}$$

$$= \frac{P(A\cap B^c)\cdot P(A\cap\Gamma^c)\cdot \cancel{P(A\cup B\cup\Gamma)}}{\cancel{P(A\cup B\cup\Gamma)}} = P(A)P(B^c)P(A)\cdot P(\Gamma^c)$$

$$= P^2(A)(1-P(B))(1-P(\Gamma)) = 0,8^2(1-0,6)(1-0,3) = 0,1792$$

Θέμα 2ο

$p = 0,36$ $\qquad P[S > 250] = ;$

$S = X_1 + \dots + X_{100}$. $\qquad P[|S| < 250] = ;$

γεωμ. κατανομή άρα ο μέσος:

$$\mu = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.36} = \frac{25}{9}$$

αντίστοιχα: $\sigma^2 = \dfrac{1-0,36}{0,36^2} = \dfrac{0.64}{0.1296} \Rightarrow \sigma = \dfrac{0,8}{0,36} = \dfrac{80}{36} = \dfrac{20}{9}$

- $P[S>250] = P\left[\dfrac{S-\nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} > \dfrac{250-\nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}}\right] = P\left[Z > \dfrac{250-100\cdot\frac{25}{9}}{\frac{20}{9}\cdot 10}\right]$

$= P[Z > -1,25] = 1 - P[Z < -1,25]$

$= 1 - \Phi(-1,25) = 1 - (1-\Phi(1,25)) = \Phi(1,25) = 0,89435$

- $P[|S| < 250] = P[-250 < S < 250] = P\left[\dfrac{-250-\nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} < \dfrac{S-\nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} < \dfrac{250-\nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}}\right]$

$= P\left[\dfrac{-9\cdot 250-100\cdot 25}{200} < Z < -1,25\right] = P[-23,75 < Z < -1,25]$

$= P[Z < -1,25] + P[-23,75 < Z] = \Phi(-1,25) - P[Z < -23,75]$

$= 1 - \Phi(1,25) - (1-\Phi(23,75)) = \Phi(23,75) - \Phi(1,25)$

για τόσο μεγάλες τιμές τείνει στο 1.

$= 1 - 0,89435$

$= 0,10565$

Θέμα 3ο

τ.μ. X σ.π.π. $f(x)=a^2xe^{-ax}$, $x>0$ και $a>0$ άγνωστη παράμετρος.

$a=;$ $L(a)=\prod_{i=1}^{\nu}\left[a^2xe^{-ax}\right]=a^{2\nu}\prod_{i=1}^{\nu}xe^{-ax}=a^{2\nu}e^{-\sum_{i=1}^{\nu}ax_i}\prod_{i=1}^{\nu}x_i$

• $L(a)=a^{2\nu}\cdot e^{-a\sum_{i=1}^{\nu}x_i}\prod_{i=1}^{\nu}x_i$

$$\ln(L(a))=2\nu\ln a+\ln\prod_{i=1}^{\nu}x_i-a\sum_{i=1}^{\nu}x_i$$

$$\frac{\partial\ln(L(a))}{\partial a}=0\Leftrightarrow\frac{2\nu}{a}-\sum_{i=1}^{\nu}x_i=0\Leftrightarrow\boxed{\hat{a}=\frac{2\nu}{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}}\overset{(\div\nu)}{=}\frac{2}{\bar{x}}$$

άρα και $\hat{\mu}=\bar{x}=\dfrac{2}{\hat{a}}$

Θέμα 4ο

$$E(\bar{X})=\mu\Leftrightarrow E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu=\frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\mu=\mu$$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)\quad(\mathrm{I})$$

$$*\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu)+(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)(\bar{X}-\mu)\cdot n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow E(S^2) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right) = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E((x_i-\mu)^2)}_{V(x_i)=\sigma^2} - n\,\underbrace{E((\bar{x}-\mu)^2)}_{V(\bar{x})}\right]$$

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2 - \cancel{n}\frac{\sigma^2}{\cancel{n}}\right] = \frac{1}{\cancel{n-1}}\cdot\cancel{(n-1)}\,\sigma^2$$

B) $n_1 = 200 \rightsquigarrow 56$ konv. $\qquad \hat{p}_1 = \frac{56}{200} = 0{,}28 \qquad \hat{p}_2 = \frac{32}{160} = 0{,}2$

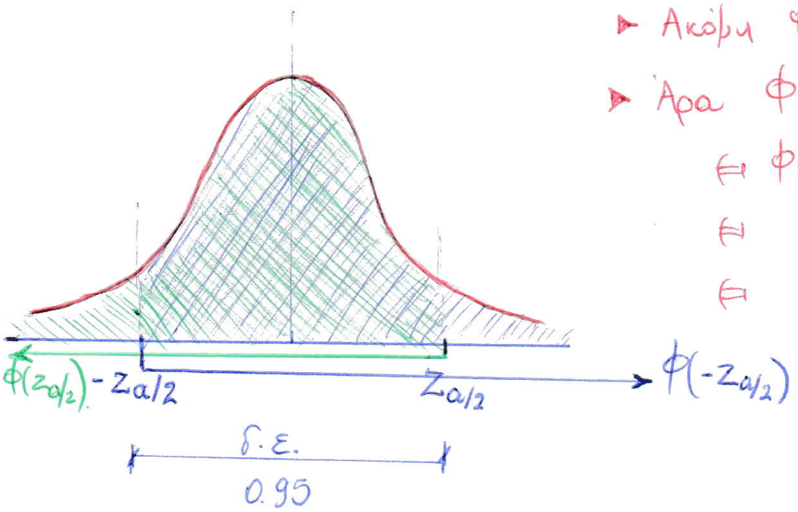
$n_2 = 160 \rightsquigarrow 32$ "

$$P[c_1 < p_1 - p_2 < c_2] = 0.95 = 1-\alpha \qquad \alpha = 0.05$$

$$c_{1/2} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$c_{1/2} = 0{,}28 - 0{,}2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0{,}28(1-0{,}28)}{200} + \frac{0{,}2\cdot(1-0{,}2)}{160}}$$

* Για να βρω το $Z_{a/2}$:



- Το δ.ε. ουσιαστικά προκύπτει από την "τομή" των εμβαδών: $\phi(Z_{a/2})$ και $\phi(-Z_{a/2})$ όπως φαίνονται στο σχήμα
- Ακόμη $\phi(-Z_{a/2}) = 1-\phi(Z_{a/2})$.
- Άρα $\phi(z)-\phi(-z) = 0.95$

$$\Leftrightarrow \phi(z) - 1 + \phi(z) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow 2\phi(z) = 1 + 0.95 = 1.95$$

$$\Leftrightarrow \phi(z) = \frac{1.95}{2} = 0.975$$

από πίνακα βρίσκω ότι: $z = 1,96$.

επομένως: $C_{1/2} = 0,08 \pm 1,96\sqrt{0,001008 + 0,001}$

$$\Leftrightarrow C_{1/2} \simeq 0,08 \pm 0,0878$$

άρα: $\boxed{-0.0078 < p_1 - p_2 < 0,1678}$