Τρίτη 15/1/13

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Έχουμε μια τ.μ. $X \sim f(x, \theta_1, \ldots, \theta_r)$, f γνωστή, θ_i άγνωστα

Έχουμε και ένα τυχαίο δείγμα της X, δηλαδή μετρήσεις της τιμής της X: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους $\theta_1, \ldots, \theta_r$ με βάση το τυχαίο δείγμα (τ.δ.) $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

Ροπή τάξης n $\quad m_n = \mathbb{E}[X^n]$, $n = 1, 2, \ldots$

Από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών έχουμε:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \to \mathbb{E}[X] = g_1(\theta_1, \ldots, \theta_r)$$

$$\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} \to \mathbb{E}[X^2] = g_2(\theta_1, \ldots, \theta_r)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n} \to \mathbb{E}[X^r] = g_r(\theta_1, \ldots, \theta_r)$$

Θεωρούμε το $r \times r$ σύστημα
$$\begin{cases} g_1(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \\ g_2(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \dfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} \\ \quad\vdots \\ g_r(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \dfrac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n} \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος ως προς $\theta_1, \ldots, \theta_r$ μάς δίνει μια εκτίμηση για τις τιμές των $\theta_1, \ldots, \theta_r$.

Παραδείγματα

1) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τ.δ. από μια τμ $X \sim Po(\lambda)$
Να εκτιμηθεί με τη μέθοδο των ροπών η παράμετρος λ.

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \lambda \Rightarrow \tilde{\lambda} = \bar{x}$

η περισπωμένη δηλώνει εκτίμηση με τη μέθοδο των ροπών

2) Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από μια τμ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 άγνωστες παράμετροι
Να εκτιμηθούν τα μ, σ^2 με τη μέθοδο των ροπών

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \mathbb{E}[X] \\ \underbrace{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}_{\text{δεύτερη ροπή των παρατηρήσεων}} = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{\text{δεύτερη ροπή του πληθυσμού}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \bar{x} = \mu \\ M_2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 = M_2 - \bar{x}^2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{\mu} = \bar{x} \\ \tilde{\sigma}^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 - n\bar{x}^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{array}\right.$$

Παρατήρηση
Αν σ^2 γνωστό, τότε αρκεί μία εξίσωση (άγνωστο μόνο το μ).

3) $X \sim Exp(a) = G(a, p=1)$
τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ της τμ X. Να εκτιμηθεί με τη μέθοδο των ροπών η άγνωστη παράμετρος a.

$\bar{x} = \frac{1}{a} \Rightarrow \tilde{a} = \frac{1}{\bar{x}}$

Εφαρμογή

Η διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος είναι τμ X με εκθετική κατανομή άγνωστης παραμέτρου a. 30 παρατηρήσεις έδωσαν $\bar{x} = 254,3$ (σε ώρες).

i) Να εκτιμηθεί η παράμετρος a

ii) Να βρεθεί το ποσοστό εξαρτημάτων από το σύνολο της παραγωγής με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 300 ωρών.

Λύση

i) $\bar{x} = \dfrac{1}{a} \Rightarrow \tilde{a} = \dfrac{1}{\bar{x}} = \dfrac{1}{254,3}$

ii) $\mathbb{P}[X > 300] = \displaystyle\int_{300}^{+\infty} \frac{1}{254,3} e^{-\frac{1}{254,3}x} dx = e^{-\frac{300}{254,3}}$

4) $X \sim U(a, \beta)$, a, β άγνωστες παράμετροι

Να εκτιμηθούν με τη μέθοδο των ροπών τα a, β.

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{x} = \dfrac{a+\beta}{2} \\ M_2 = \mathbb{E}[X^2] = Var(X) + (\mathbb{E}[X])^2 = \dfrac{(a-\beta)^2}{12} + \left(\dfrac{a+\beta}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + a\beta + \beta^2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + \beta = 2\bar{x} \\ a^2 + a\beta + \beta^2 = M_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{a} = \bar{x} - \sqrt{3(M_2 - \bar{x}^2)} \\ \tilde{\beta} = \bar{x} + \sqrt{3(M_2 - \bar{x}^2)} \end{array}\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{\begin{array}{l} \tilde{a} = x + \sqrt{3(M_2 - \bar{x}^2)} \\ \tilde{\beta} = x - \sqrt{3(M_2 - \bar{x}^2)} \end{array}\right\}$$

απορρίπτεται, αφού $a < \beta$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Έστω X ο αριθμός κλήσεων στο κινητό μου εντός 24ώρου.

$$\mathbb{P}[X=k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k\in\{0,1,\dots\}$$

Σε τρεις μέρες είχα 5, 8 και 3 κλήσεις.

$$\mathbb{P}[X_1=5, X_2=8, X_3=3] \overset{\text{ανεξάρτητες}}{=\!=\!=} \mathbb{P}[X_1=5]\cdot\mathbb{P}[X_2=8]\cdot\mathbb{P}[X_3=3]$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^5}{5!}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^8}{8!}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} =$$

πιθανότητα που είχε να συμβεί αυτό που συνέβη

$$= e^{-3\lambda}\frac{\lambda^{16}}{5!\cdot 8!\cdot 3!} = g(\lambda)$$

Αυτά που παρατηρούμε είναι αυτά που έχουν μεγάλη πιθανότητα να συμβούν. Άρα αναζητώ το λ που μεγιστοποιεί την πιθανότητα.

Παρασκευή 18/1/13

Μέθοδος

Έστω $X \sim f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = f(x, \boldsymbol{\theta})$

Συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \boldsymbol{\theta})\, f(x_2, \boldsymbol{\theta}) \cdots f(x_n, \boldsymbol{\theta}) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta})$$

$$\max_{\theta} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, x_1, \dots, x_n) = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, x_1, \dots, x_n)$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ η τιμή του $\boldsymbol{\theta}$ που μεγιστοποιεί την $\mathcal{L}$

Η τιμή του $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι η ζητούμενη.

Παρατήρηση: Δε μας ενδιαφέρει η τιμή του μεγίστου, αλλά μόνο πού συμβαίνει, δηλαδή το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Θεώρημα

Έστω g συνάρτηση που μεγιστοποιείται στο x_0 και h αύξουσα συνάρτηση.
Τότε η $h \circ g$ μεγιστοποιείται στο x_0.

Παραδείγματα

1) Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $Po(\lambda)$.
Να εκτιμηθεί η παράμετρος λ με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

$$P[X=x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0,1,\dots\}$$

$$L(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} =$$

$$= e^{-\lambda n} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{x_1! \cdots x_n!}$$

Ψάχνουμε την τιμή του λ που μεγιστοποιεί την L.

Έστω $\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = -\lambda n + \sum x_i \cdot \ln\lambda - \ln(x_1! \cdots x_n!)$

$$\frac{\partial \ell(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -n + \frac{1}{\lambda} \sum x_i = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ell(\lambda)}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda = \frac{\sum x_i}{n}} = \left. -\frac{1}{\lambda^2} \sum x_i \right|_{\lambda = \frac{\sum x_i}{n}} < 0$$

Άρα στο $\lambda = \frac{\sum x_i}{n}$ η L έχει μέγιστο.

Άρα $\hat{\lambda} = \bar{x}$

το καπέλο δηλώνει εκτίμηση με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας

Δηλαδή παίρνουμε ίδιο αποτέλεσμα με τη μέθοδο των ροπών.

2) Έστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ και $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 άγνωστες παράμετροι. Να εκτιμηθούν οι μ, σ^2 με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} =$$

$$= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι μεταβλητές είναι το μ και το σ^2, όχι το σ.

Έστω $\ell(\mu, \sigma^2) = \ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2\sigma^2} 2 \sum(x_i-\mu) = 0 \\ -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum(x_i-\mu)^2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum x_i - n\mu = 0 \\ n = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \end{array}\right\}$$

σ^2, όχι σ

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = \frac{\sum x_i}{n} \\ \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2 \partial \mu} & \frac{\partial^2 \ell}{(\partial \sigma^2)^2} \end{vmatrix}\right|_{(\mu=\bar{x}, \sigma^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2)} = \dots < 0$$

Άρα έχω μέγιστο

Άρα $$\left\{\begin{array}{l} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2 \end{array}\right.$$

Βρήκαμε το ίδιο με τη μέθοδο των ροπών.

3) Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ και $X \sim U[\alpha,\beta]$, όπου α,β άγνωστες παράμετροι. Να βρεθούν τα α,β με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & x \in [\alpha,\beta] \\ 0, & x \notin [\alpha,\beta] \end{cases} = \frac{1}{\beta-\alpha} \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}(x)$$

$$L(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta-\alpha)^n}, & \text{αν } x_i \in [\alpha,\beta], \forall i \\ 0, & \text{αν κάποιο } x_i \notin [\alpha,\beta] \end{cases} = \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}(x_i)$$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \mathbb{I}_{(-\infty, \min_i\{x_i\}]}(\alpha) \cdot \mathbb{I}_{[\max_i\{x_i\}, +\infty)}(\beta) =$$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \mathbb{I}_{(-\infty, \min_i\{x_i\}] \times [\max_i\{x_i\}, +\infty)}(\alpha,\beta)$$

όπου $\mathbb{I}_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$

Για να είναι το $\frac{1}{(\beta-\alpha)^n}$ μέγιστο, πρέπει το $\frac{1}{\beta-\alpha}$ να είναι μέγιστο, δηλαδή το $\beta-\alpha$ να είναι ελάχιστο. Όμως τα x_i είναι πάντα ανάμεσα στα α,β ($x_i \in [\alpha,\beta]$).

Άρα $\hat{\alpha} = \min_i\{x_i\}$

$\hat{\beta} = \max_i\{x_i\}$

Παρατηρούμε ότι βρίσκουμε διαφορετικό αποτέλεσμα από ό,τι με τη μέθοδο των ροπών.

Δευτέρα 21/1/13

Θεώρημα (Εκτίμηση ποσοστού p)

Έστω πείραμα τύχης με δύο δυνατά αποτελέσματα «ε» και «α» με πιθανότητα p και 1-p αντίστοιχα, όπου $p \in (0,1)$ άγνωστο. Εκτελώντας n φορές το πείραμα, λαμβάνουμε το τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, όπου $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν έχουμε επιτυχία στην i-οστή προσπάθεια} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$X = \begin{cases} 1 & , p \\ 0 & , 1-p \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X=x] = \underset{\text{σμπ}}{p(x)} = p^x(1-p)^{1-x} \quad , x \in \{0,1\}$$

$$L(p) = \prod_{i=0}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, \ p \in (0,1)$$

$$\ell(p) = \ln L(p) = \ln\left[p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}\right] = \left(\sum x_i\right)\ln p + \left(n - \sum x_i\right)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\text{αριθμός επιτυχιών}}{n}}$$

Πρόταση

Αν $\hat{\theta}$ είναι η εκτίμηση μ.π. της παραμέτρου θ και $a = g(\theta)$, όπου g είναι 1-1 συνάρτηση, τότε $\hat{a} = g(\hat{\theta})$.

Ορισμός

Έστω $X_1, \dots, X_n$ οι n επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης για το μέγεθος X. Ονομάζεται **εκτιμήτρια** της άγνωστης παραμέτρου θ μια οποιαδήποτε παράσταση/συνάρτηση $T(X_1, \dots, X_n)$. Αν οι παρατηρούμενες τιμές των $X_1, \dots, X_n$ είναι $x_1, \dots, x_n$, τότε η τιμή $T(x_1, \dots, x_n)$ λέγεται **εκτίμηση** της θ.

Ορισμός

Μια <u>εκτιμήτρια</u> $T(X_1,\ldots,X_n)$ ονομάζεται <u>αμερόληπτη</u> για την παράμετρο θ (αντίστοιχα για την $a=g(\theta)$), αν και μόνο αν

$$\mathbb{E}[T]=\theta \text{ (αντίστοιχα } g(\theta)), \ \forall\, \theta\in\Theta$$

Θ: χώρος στον οποίο ανήκει η θ.

Ορισμός

Μια <u>εκτιμήτρια</u> $T(X_1,\ldots,X_n)$ λέγεται <u>ελαχίστης διασποράς</u> για την παράμετρο θ, αν και μόνο αν για κάθε άλλη εκτιμήτρια $S(X_1,\ldots,X_n)$ της παραμέτρου <u>θ</u> ισχύει $Var(T)\leq Var(S)$.

Ορισμός

Μια <u>εκτιμήτρια</u> $T(X_1,\ldots,X_n)$ λέγεται <u>οριακά αμερόληπτη</u> ή <u>συνεπής</u> για την παράμετρο θ (αντίστοιχα για την $a=g(\theta)$), αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[T]=\theta \text{ (αντίστοιχα } g(\theta)), \ \forall\, \theta\in\Theta$$

Συμπέρασμα: Προτιμάμε εκτιμήτριες αμερόληπτες (έστω οριακά αμερόληπτες) και μικρότερης διασποράς.

Παράδειγμα

Έστω σ^2 η διασπορά μιας τμ X και $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2$

$$T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2$$

δύο εκτιμήτριες του σ^2.
Να εξεταστεί αν είναι αμερόληπτες.

Λύση

$$T_1=\frac{1}{n}\left(\sum X_i^2-2\bar{X}\sum X_i+n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum X_i^2-2\bar{X}\cdot n\bar{X}+n\bar{X}\right)=\frac{1}{n}\sum X_i^2-\bar{X}^2$$

$$\mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[\bar{X}^2] =$$

$$= \frac{\sum\left(Var(X_i) + \mathbb{E}[X_i]^2\right)}{n} - \left(Var(\bar{X}) + \left(\mathbb{E}[\bar{X}]\right)^2\right)$$

$$= \frac{n(\sigma^2+\mu^2)}{n} - \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i) + \mu^2\right)$$

$$= \sigma^2 - \frac{1}{n^2}n\sigma^2 =$$

$$= \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

Άρα η T_1 δεν είναι αμερόληπτη για τη σ^2. Είναι όμως οριακά αμερόληπτη, όταν $n \to +\infty$.

$$\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}\left[\frac{n}{n-1}T_1\right] = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}[T_1] = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

Άρα η T_2 είναι αμερόληπτη για τη σ^2.

<u>Εφαρμογή</u>

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Η εκτιμήτρια $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ $(=T_2)$ λέγεται εκτιμήτρια S^2.

Δευτέρα
28/1/13

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Εκτιμάμε μια άγνωστη παράμετρο όχι με έναν αριθμό, αλλά με ένα διάστημα $(L(x_1,\dots,x_n), U(x_1,\dots,x_n)) = (L,U)$.

Ορισμός Θα λέμε ότι το (L,U) είναι διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε) της άγνωστης παραμέτρου θ με βαθμό εμπιστοσύνης γ, όταν

$$\mathbb{P}[(L,U)\ni\theta]=\gamma$$

Παράδειγμα
$(X_1,\dots,X_n)$ τ.δ. από μια κατανομή $N(\mu,4)$. Βρείτε ένα 0,95-δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο μ.

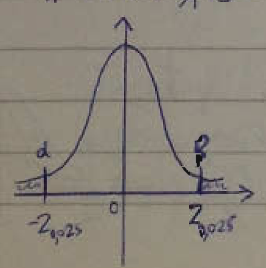
Λύση
Χρειάζεται να βρούμε μια συνάρτηση των $X_1,\dots,X_n$ (ένα στατιστικό) $\Phi(X_1,\dots,X_n)$, τέτοια ώστε η κατανομή της Φ να μην εξαρτάται από τις παραμέτρους που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

$$\bar{X}=\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\sim N\left(\mu,\frac{4}{n}\right)$$

η κατανομή της εκτιμήτριας $\bar{X}$ περιέχει το άγνωστο μ

Όμως η $\Phi(X_1,\dots,X_n)=\frac{\sqrt{n}}{2}(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1)$ ακολουθεί κατανομή που δεν εξαρτάται από το μ.

Άρα μπορούμε να βρούμε τώρα ένα διάστημα (α,β) ώστε
$\mathbb{P}[\Phi\in(\alpha,\beta)]=0{,}95$



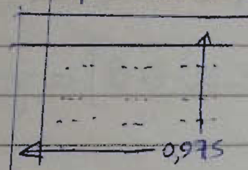
Η επιλογή των α, β δεν είναι μοναδική.

Αν πάρουμε ένα συμμετρικό διάστημα γύρω από το 0, θα πρέπει να διαλέξουμε το α έτσι ώστε $\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \mathbb{P}[\Phi \le \alpha] = 0{,}025$

και το $\beta = -\alpha$ έτσι ώστε $\int_{-\infty}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mathbb{P}[\Phi \le \beta] = 0{,}975$

Θα διαλέξουμε το β από τον πίνακα ώστε $F_{N(0,1)}(\beta) = 0{,}975$

Από πίνακα



$\beta = \dots$

και $\alpha = -\beta = \dots$

$$\mathbb{P}[\Phi \in (-\beta,\beta)] = 0{,}95 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}}{2}(\bar{X}-\mu) \in (-\beta,\beta)\right] = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[-\beta < \frac{\sqrt{n}}{2}(\bar{X}-\mu) < \beta\right] = 0{,}95$$

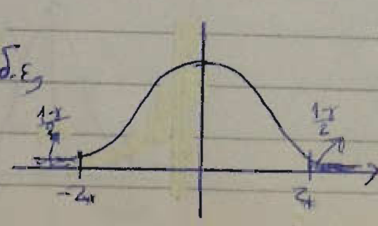
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\bar{X} - \frac{2\beta}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{2\beta}{\sqrt{n}}\right] = 0{,}95$$

Άρα ένα συμμετρικό 0,95-δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο μ είναι το $I = \left(\bar{X} - \frac{2\beta}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\beta}{\sqrt{n}}\right)$

Εν γένει, αν $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ άγνωστο, σ^2 γνωστό:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \Phi(X_1,\dots,X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu) \sim N(0,1)$$

Αν θέλουμε να βρούμε ένα συμμετρικό γ-δ.ε., διαλέγουμε ένα z_* ώστε το εμβαδό από $-z_*$ ως $+z_*$ να είναι γ.



Θα βρούμε ένα z_* ώστε $F_{N(0,1)}(z_*) = \gamma + \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$

Τότε $\mathbb{P}[\varphi \in (-z_*, z_*)] = \gamma$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[-z_* < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu) < z_*\right] = \gamma$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_* < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_*\right]$

Άρα ένα συμμετρικό γ-δ.ε για την άγνωστη παράμετρο μ όταν η σ^2 είναι γνωστή είναι το $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_*, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_*\right)$.

Βρείτε ένα γ-δ.ε. για την σ^2 αν η μ είναι γνωστή

$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \Leftrightarrow n\tilde{S}^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

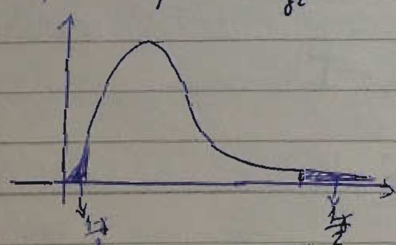
$\Leftrightarrow \frac{n\tilde{S}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n) = G\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$

η κατανομή αυτής της τμ δεν εξαρτάται από το άγνωστο σ^2

άθροισμα ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τ.μ.

Αν θέλουμε να βρούμε ένα γ-δ.ε για τη σ^2:

* Βρίσκουμε ένα διάστημα στο οποίο με πιθανότητα γ ανήκει η $\varphi = \frac{n\tilde{S}^2}{\sigma^2}$



$F_{\chi^2(n)}(z_1) = \frac{1-\gamma}{2} \Rightarrow z_1 = \ldots (= z_1(n))$

$F_{\chi^2(n)}(z_2) = \frac{1-\gamma}{2} + \gamma = \frac{1+\gamma}{2} \Rightarrow z_2 = \ldots (= z_2(n))$

Τότε $\mathbb{P}[\varphi \in (z_1, z_2)] = \gamma$

* Βρίσκουμε τι σημαίνει αυτό για τη σ^2. $\mathbb{P}\left[z_1 < \frac{n\tilde{S}^2}{\sigma^2} < z_2\right] = \gamma$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\frac{n\tilde{S}^2}{z_2} < \sigma^2 < \frac{n\tilde{S}^2}{z_1}\right] = \gamma$. Άρα το γ-δ.ε. για το σ^2 είναι το $\left(\frac{n\tilde{S}^2}{z_{2,n}}, \frac{n\tilde{S}^2}{z_{1,n}}\right)$.

Δ.Ε. για τις μ, σ^2 όταν είναι και οι δύο άγνωστες.

Υποθέτουμε ότι οι $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητες

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) \Leftrightarrow (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})$$

↳ τώρα αυτές δεν είναι ανεξάρτητες!

Κάνουμε ένα ορθογώνιο μετασχηματισμό των X_i

$$\text{Ορίζουμε } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = U \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{X} \quad \text{με } U^T U = I$$

$$\text{όπου } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & & \frac{-(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} \end{pmatrix}$$

$(c \; c \; c \; -3c \; 0 \ldots 0) \leftarrow$ με $c^2 + c^2 + c^2 + 9c^2 = 1$

Όμως $X \sim N(\mu, \Sigma) \Leftrightarrow AX \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$

Εδώ $X \sim N(\mu, \sigma^2 I)$

$$Y^* = U(X - \mu) \sim N(0, \sigma^2 I)$$

$\to U\sigma^2 I U^T = \sigma^2 U U^T = \sigma^2 I$

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n) = \sqrt{n}\,\bar{X}$$

Όμως $\|Y\|^2 = Y^T Y = (UX)^T(UX) = X^T U^T U X = X^T I X = X^T X = \|X\|^2$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Όμως $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \underbrace{n\bar{X}^2}_{Y_1^2} + \sum_{i=2}^{n} Y_i^2$

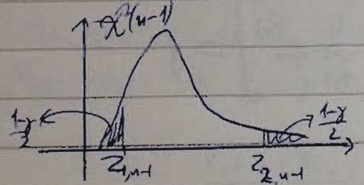
$$\sum_{i=2}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X})^2$$

Άρα $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^{n} \Big(\underbrace{\frac{Y_i}{\sigma}}_{\sim N(0,1) \text{ ανεξάρτητες}}\Big)^2 \sim \chi^2(n-1)$

Άρα η $\Phi = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv G\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$

Όπως πριν, βρίσκουμε z_1, z_2 ώστε $\mathbb{P}[\Phi \in (z_1, z_2)] = \gamma$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\frac{(n-1)S^2}{z_{2,n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{z_{1,n-1}^2}\right] = \gamma$$



$$\underline{Y} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2\end{pmatrix}\right)$$

Επιπλέον η $Y_1 = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \sim N(0,\sigma^2)$

Άρα $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu) \sim N(0,1)$

Επίσης είναι και ανεξάρτητη από τις $Y_2, Y_3, \dots, Y_n$, άρα και ανεξάρτητη από την $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$

Τότε $\Phi = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} = \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$

$$\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}$$

όπου αν $X \sim N(0,1)$

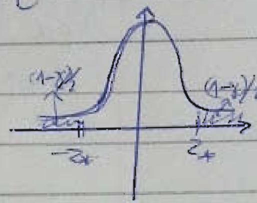
$Y \sim \mathcal{X}^2(n)$ ανεξάρτητη από τη X.

τότε η $\dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ ακολουθεί κατανομή Student $t(n)$

με n βαθμούς ελευθερίας

Είναι $\boxed{f_{t(n)}(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

σππ της Student



$$\mathbb{P}\left[-z_*^{(n)} < \varphi < z_*^{(n)}\right] = \gamma$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[-z_*^{(n)} < \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{S} < z_*^{(n)}\right] = \gamma$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_*^{(n)} < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_*^{(n)}\right] = \gamma$$

Τρίτη 29/1/13 Διαστήματα εμπιστοσύνης

Ιδέα: Εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων από διαστήματα (L,U)

Το (L,U) είναι δ.ε. με βαθμό εμπιστοσύνης $\gamma \Leftrightarrow \mathbb{P}[\theta \in (L,U)] = \gamma$

Μεθοδολογία εύρεσης γ-Δ.Ε.

1) Βρίσκουμε κάποιο στατιστικό $\Phi_\theta(X_1,\dots,X_n)$, του οποίου η κατανομή ΔΕΝ εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους.

2) Από τις ιδιότητες της κατανομής (πίνακες, Η/Υ) βρίσκουμε ένα διάστημα τέτοιο ώστε $\mathbb{P}[\Phi_\theta(X_1,\dots,X_n) \in (z_1,z_2)] = \gamma$

3) Λύνουμε τις ανισότητες που ορίζουν το ενδεχόμενο $\{\Phi_\theta(X_1,\dots,X_n) \in (z_1,z_2)\}$ ως προς την άγνωστη παράμετρο: $\mathbb{P}[\theta \in (L,U)] = \gamma$

Εφαρμογή: Αν $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ ανεξάρτητες, τότε

1) Αν σ^2 είναι γνωστό, τότε η $\Phi(X_1,\dots,X_n) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

2) Αν μ είναι γνωστό, τότε η $\frac{n\tilde{S}_\mu^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

3) Αν το μ και το σ^2 άγνωστα, τότε α) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ ⇓ δ.ε. για το σ^2

β) $\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$ ⟹ δ.ε. για το μ

<u>Πρόβλημα:</u> $X_i \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ανεξάρτητες, $i=1,2,\dots,n_1$
$Y_i \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ανεξάρτητες και ανεξάρτητες από τις X_i
$i=1,2,\dots,n_2$

▶ Έστω ότι τα σ_1^2, σ_2^2 είναι γνωστά.
Μπορούμε να βρούμε ένα δ.ε. για την $\mu_1-\mu_2$;

$Var(\bar{X}-\bar{Y}) =$
$= Var(\bar{X})+Var(-\bar{Y})$
$= Var(\bar{X})+(-1)^2 Var(\bar{Y})$
$= Var(\bar{X})+Var(\bar{Y})$
($\bar{X},\bar{Y}$ ανεξάρτητες)

$$\bar{X}-\bar{Y} = \frac{X_1+\dots+X_{n_1}}{n_1} - \frac{Y_1+\dots+Y_{n_2}}{n_2} \sim N\Big(\mu_1-\mu_2, \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}_{\hat{\sigma}^2}\Big)$$

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-[\mu_1-\mu_2]}{\hat{\sigma}} \sim N(0,1)$$

Δηλαδή το στατιστικό $\Phi_{\mu_1-\mu_2}(X_1,\dots,Y_{n_2}) = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-[\mu_1-\mu_2]}{\hat{\sigma}} \sim N(0,1)$

Βρίσκουμε ένα z_γ : $F_{N(0,1)}(z_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$

Τότε $\mathbb{P}[-z_\gamma < \Phi_{\mu_1-\mu_2}(X_1,\dots,Y_{n_2}) < z_\gamma] = \gamma$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[-z_\gamma < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\hat{\sigma}} < z_\gamma\right] = \gamma$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[\bar{X}-\bar{Y}-\hat{\sigma}z_\gamma < \mu_1-\mu_2 < \bar{X}-\bar{Y}+\hat{\sigma}z_\gamma] = \gamma$$

Άρα δ.ε. είναι το (L,U), όπου $L = \bar{X}-\bar{Y}-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,z_\gamma$

$U = \bar{X}-\bar{Y}+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,z_\gamma$

▶ Έστω ότι τα σ_1^2, σ_2^2 είναι άγνωστα, αλλά ίσα.

$X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$

$Y_i \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

Βρείτε ένα δ.ε. για την $\mu_1 - \mu_2$.

$$\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) \sim N\left(0, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{\sigma}\right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n_1-1} Z_j^2 + \sum_{j=1}^{n_2-1} U_j^2 \quad (*)$$

όπου $Z_j \sim N(0,1)$ ανεξάρτητες — $U_j \sim N(0,1)$ ανεξάρτητες

$Z_j = \sum_{k=1}^{n_1} a_{jk} X_k$ — $U_j = \sum_{k=1}^{n_2} \beta_{jk} Y_k$

Z_j ανεξάρτητες από το $\bar{X}$ — U_j ανεξάρτητες από το $\bar{Y}$

Άρα το $(*)$ είναι το άθροισμα $n_1 - 1 + n_2 - 1$ τυπικών κανονικών

Άρα $(*) \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$

Αν $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ ανεξ. τότε $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$

Άρα
$$\frac{\dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{\sigma^2(n_1+n_2-2)}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

Ορίζουμε
$$\frac{1}{\hat{n}} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Τότε $\sqrt{\hat{n}}\,\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\hat{S}} \sim t(n_1+n_2-2)$

▶ Έστω τα σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα.

Τότε το $\sqrt{\hat{n}}\,\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\hat{S}} \underset{\text{προσεγγιστικά}}{\sim} t(\hat{\nu})$

όπου $\hat{\nu} = \hat{\nu}(X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2})$

Παράδειγμα

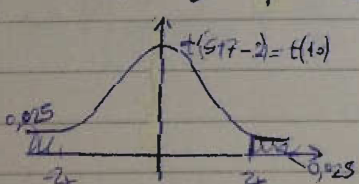
Έχουμε δύο ομάδες παιδιών της ίδιας ηλικίας.
Η πρώτη ομάδα ακολουθεί ένα διαιτολόγιο Α.
Η δεύτερη ομάδα ακολουθεί ένα διαιτολόγιο Β.
Τα ύψη των παιδιών της ομάδας Α όταν είναι 12 ετών $\sim N(\mu_1, \sigma^2)$
Τα ύψη των παιδιών της ομάδας Β όταν είναι 12 ετών $\sim N(\mu_2, \sigma^2)$
Το διαιτολόγιο Α επηρεάζει περισσότερο το ύψος απ' ό,τι το Β;

Μετρήσεις: 5 παιδιά στην Α με ύψη: 160, 155, 150, 162, 163
7 παιδιά στη Β με ύψη: 154, 152, 148, 161, 158, 148, 150

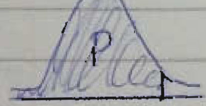
Ένα 0,95-δε για την $\mu_1-\mu_2$ είναι: το

$$P\left[\mu_1-\mu_2 \in \left(\bar{X}-\bar{Y}-\frac{S}{\sqrt{\hat{n}}}z_*, \bar{X}-\bar{Y}+\frac{S}{\sqrt{\hat{n}}}z_*\right)\right] = 0{,}95$$

όπου $\dfrac{1}{\hat{n}} = \dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7} = \dfrac{12}{35} \Rightarrow \hat{n} = \dfrac{35}{12}$



$\nu \backslash P$	0,75	0,9	0,95	0,975
1				
2				⋮
10	0,7...			2,228



Άρα $z_* = 2{,}228$

Άρα $\mathbb{P}\left[\mu_1-\mu_2 \in \left(\bar{X}-\bar{Y}-\sqrt{\frac{12}{35}}\,2{,}228\,\hat{s},\ \bar{X}-\bar{Y}+\sqrt{\frac{12}{35}}\,2{,}228\,\hat{s}\right)\right]=0{,}95$

όπου $\bar{X}=158$

$\bar{Y}=153$

$$\hat{s}^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{118+150}{10}=26{,}8 \Rightarrow \hat{s}=\sqrt{26{,}8}$$

Άρα το Δ.Ε. είναι $\left(158-153-\sqrt{\frac{12}{35}}\,2{,}228\sqrt{26{,}8},\ 158-153+\sqrt{\frac{12}{35}}\,2{,}228\sqrt{26{,}8}\right)$

$$=(-1{,}75\ ,\ 11{,}75)$$

Δηλαδή $\mathbb{P}\left[\mu_1-\mu_2 \in (-1{,}75,\ 11{,}75)\right]=0{,}95$

περιλαμβάνει το 0: δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τα διαστήματα

Αν θέλαμε $\gamma=0{,}5$, τότε $\mathbb{P}\left[\mu_1-\mu_2 \in (3{,}9,\ 7{,}1)\right]=0{,}5$

στενότερο Δ.Ε.: δεν περιέχει το 0

<u>Πρόβλημα</u>: $X_1,\dots,X_{n_1} \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ανεξάρτητες

$Y_1,\dots,Y_{n_2} \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ανεξάρτητες και ανεξ. από τις X_i

Βρείτε Δ.Ε. για το $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

$$\Phi=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim \chi^2(n_1-1)$$

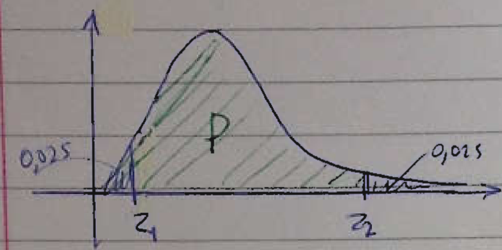
$$\Psi=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim \chi^2(n_2-1)$$

Όμως, αν $X\sim \chi^2(n)$

$Y\sim \chi^2(m)$

τότε $\frac{X/n}{Y/m}\sim F(n,m)$ <u>Κατανομή Snedecor</u>

Άρα $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$



Έστω $n_1=5,\ n_2=7,\ \gamma=0,95$

Ο πίνακας για $P=0,975$

$\nu_1 \backslash \nu_2$	...	6
⋮		
4		9,1973

Δίνει $z_2 = 9,1973$

Θέλω $\Omega = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$

$$\mathbb{P}[\Omega \le z_1] = 0,025$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[\Omega > z_1] = 0,975$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\frac{1}{\Omega} < \frac{1}{z_1}\right] = 0,975$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[F(m,n) < \frac{1}{z_1}\right] = 0,975$$

$P=0,975$

$\nu_1 \backslash \nu_2$	...	4
⋮		
6		6,2272

Από τον πίνακα: $\dfrac{1}{z_1} = 6,2272 \Rightarrow z_1 = \dfrac{1}{6,2272}$

Άρα $\mathbb{P}\left[\dfrac{1}{6,2272} < \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < 9,1973\right] = 0,95$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{9,1973} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\,6,2272\right] = 0,95$$