

2.4 Κατάσταση οριακής ισορροπίας

2.4.1 Γενικά

- Θεωρούμε κατάσταση **οριακής ισορροπίας** ή **οριακής ευστάθειας**, όταν ένας φορέας δέχεται δράσεις των οποίων διαφορική – ελάχιστη μεταβολή προκαλεί ολική – σημαντική μεταβολή της θέσης του φορέα.
- Αναλόγως των **συνθηκών στήριξης** του φορέα, αυτός **μετατοπίζεται – ολισθαίνει**, ή **περιστρέφεται – ανατρέπεται...**
- Σε οιαδήποτε περίπτωση - προκειμένου περί υγρών - συνήθως **αναιρείται η στεγανότητα** και συνεπώς η **υδροστατική** - με την έννοια απουσίας ροής - κατάσταση!

2.4.2 Επισημάνσεις

- Οι **συνθήκες οριακής ισορροπίας**, **αναλόγως** των **συνθηκών στήριξης** του φορέα, μεταφράζονται σε:
 - Ισορροπία – εξίσωση **δυνάμεων ευσταθείας** και ολίσθησης
 - Ισορροπία – εξίσωση **ροπών ευσταθείας** και ανατροπής
- Οι ως άνω εξισώσεις δυνάμεων ή ροπών είναι πιθανό να περιλαμβάνουν **συντελεστές ασφαλείας**, μετατρεπόμενες σε ανισότητες και αντίστοιχες απαιτήσεις: π.χ. $M_{\text{ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ}} / M_{\text{ΑΝΑΤΡΟΠΗΣ}} = \text{συντελεστής σε ΑΝΑΤΡΟΠΗ} > 1$
- Είναι **προφανές**, ότι στη περίπτωση αμφιέρειστων φορέων:
 - Η **αντίδραση** στην **απλή στήριξη** (κύλιση) μηδενίζεται
 - Η **συνολική δύναμη** από τις δράσεις διέρχεται από την **άρθρωση** – σημείο περιστροφής
- Επισημαίνεται ότι, στους υδραυλικούς φορείς – μηχανισμούς οι απλές στηρίξεις (κυλίσεις) συνήθως προβλέπονται, ώστε να λειτουργούν μόνο με αντιδράσεις σε θλίψη → εφελκυστική δύναμη στη στήριξη συνεπάγεται άρση της στεγανότητας.
- Για την επίλυση προβλημάτων οριακής ισορροπίας ακολουθούμε τις ως ανωτέρω κατευθύνσεις – μεθόδους επίλυσης (βλ. **2.2**) και λαμβάνουμε υπόψη τις ιδιαιτερότητες δράσεων και συγκεκριμένου φορέα.
- Στην επίλυση προβλημάτων οριακής ισορροπίας εμφανίζονται συχνά τριτοβάθμιες εξισώσεις. Ο προσδιορισμός των ριζών τους απαιτεί ανάκληση γνώσεων από το πεδίο Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.
- Στα προβλήματα οριακής ισορροπίας οι **αποδεκτές λύσεις** (πραγματικές και θετικές) περιορίζονται σε **μία**, ή και **καμία**! Η **επιλογή** της **κατάλληλης** και η **απόρριψη** των **υπολοίπων**, ή και **όλων**! βασίζεται στις **συνθήκες – δεσμεύσεις** του συγκεκριμένου προβλήματος καθώς και στην ορθή κρίση και αντίληψη...
Κατά τούτο άλλωστε διαφοροποιείται ο **Σπουδαστής – Μηχανικός** από *Μαθητευόμενο Chef* με *όραμα* απασχόλησης σε *reality shows*...

2.4.3 Μαθηματική λύση συνήθως αποκαλούμενη *Gardano*

ΔΕΝ ΣΥΝΙΣΤΑΤΑΙ Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ

ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΟΝΟ ΓΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ

- $A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D = 0$
- Σημείωση: Είναι προφανές ότι, εάν όλοι οι σταθεροί συντελεστές είναι θετικοί, **δεν** υπάρχει **θετική ρίζα**, άρα και οριακή ισορροπία!..

- Θέτουμε: $p = -\left(\frac{B}{3 \cdot A}\right)^2 + \frac{C}{3 \cdot A}$ και $q = \left(\frac{B}{3 \cdot A}\right)^3 - \frac{B \cdot C}{6 \cdot A^2} + \frac{D}{2 \cdot A}$

- Υπολογίζουμε τον όρο: $\Delta = q^2 + p^3$

- Εάν $\Delta < 0 \rightarrow$ **τρεις** ρίζες **πραγματικές**:

- Υπολογίζουμε τον όρο: ϕ , λογιστικό μέγεθος γωνίας με $\cos \phi = -\frac{q}{|p|^{3/2}}$

- $x_1 = \left[2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$

- $x_2 = \left[-2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3} + 60^\circ\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$

- $x_3 = \left[-2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3} - 60^\circ\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$

- Εάν $\Delta = 0 \rightarrow$ **τρεις** ρίζες **πραγματικές** (η μία διπλή):

- $x_1 = \left[2 \cdot |p|^{1/2} \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$ και $x_2 = x_3 = -|p|^{1/2} - \frac{B}{3 \cdot A}$

- Εάν $\Delta > 0 \rightarrow$ **μία** ρίζα **πραγματική**: x_1 (και δύο μιγαδικές συζυγείς)

- $x_1 = \left(-q + \Delta^{1/2} \right)^{1/3} + \left(-q - \Delta^{1/2} \right)^{1/3} - \frac{B}{3 \cdot A}$

- Τυποποίηση διαδικασίας:

A	B	C	D	p	q	Δ

COS φ	φ	x ₁	x ₂	x ₃

x ₁	x _{2,3}

u	v	x ₁

- Υπενθυμίζεται και η μαθηματική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

- $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$

- Υπολογίζουμε τον όρο: $\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$

- Εάν $\Delta \geq 0 \rightarrow$ **δύο** ρίζες **πραγματικές**: x_1 και x_2

- $x_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}$

- $x_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}$

- Τυποποίηση διαδικασίας:

A	B	C	Δ	x ₁	x ₂

2.4.4 Αριθμητική επίλυση (με διαδοχικές προσεγγίσεις – τύπου *Newton Raphson*)

ΣΥΝΙΣΤΑΤΑΙ Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ $\mathcal{D}_p$

- $A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D = 0$

- Μετασχηματίζουμε: $x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$ (16)

Όπου: $b = \frac{B}{A}, c = \frac{C}{A}, d = \frac{D}{A}$

- Σημείωση 1: Υπενθυμίζεται ότι, εάν όλοι οι σταθεροί συντελεστές είναι θετικοί, δεν υπάρχει **θετική ρίζα**, άρα και οριακή ισορροπία!..

- Επαναληπτική σχέση: $x_{v+1} = x_v - \frac{x_v^3 + b \cdot x_v^2 + c \cdot x_v + d}{3 \cdot x_v^2 + 2 \cdot b \cdot x_v + c}$ (17)

- Επιλέγουμε την 1^η τιμή εκκίνησης **x_1 αμελώντας δύο όρους** με βάση τις παρακάτω οδηγίες.

Σημείωση 2: Η διαδικασία συχνά διευκολύνεται, διότι σε πολλές περιπτώσεις ο ένας εκ των δύο σταθερών συντελεστών **b** ή **c** έχει μηδενική τιμή, οπότε αμελούμε έναν επιπλέον όρο...

- ο **Αμελούμε** τους δύο όρους με **θετικό b , c ή d**
- ο **Αμελούμε** το **θετικό** όρο και τον πιθανολογούμενο μικρότερο αρνητικό όρο (εάν δύο είναι αρνητικοί)
- ο **Αμελούμε** τους δύο πιθανολογούμενους μικρότερους αρνητικούς όρους (εάν και οι τρεις είναι αρνητικοί)
- ο Προκύπτει μία από τις εξής 1^{ες} τιμές εκκίνησης x_1 : $|b|, |c|^{1/2}, |d|^{1/3}$

- Ελέγχουμε, ώστε $3 \cdot x_1^2 + 2 \cdot b \cdot x_1 + c \neq 0$, ούτε καν κοντά στο 0

- Εφαρμόζουμε τη (17), έως ότου το **δεύτερο δεκαδικό** ψηφίο δύο διαδοχικών τιμών ταυτιστεί.

- Είναι απαραίτητος ο έλεγχος συμβατότητας της ρίζας μετά το πέρας της επίλυσης!

- Τυποποίηση διαδικασίας:

A	B	C	D	b	c	d

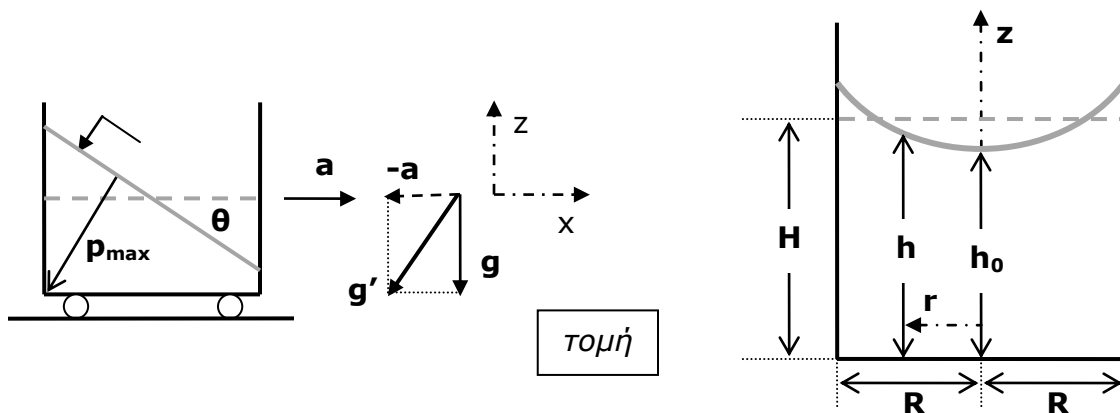
x_1	x_2	x_3	x_4

Η μέθοδος θα γίνει περισσότερο κατανοητή στις εφαρμογές υπολογισμού (βλ. **2.6**)

2.5 Ειδικά θέματα

2.5.1 Γενίκευση της Έννοιας της Ισορροπίας Ρευστών

- Οι αρχές της υδροστατικής μπορούν να εφαρμοστούν και σε ρευστά τα οποία κινούνται ως στερεά σώματα – χωρίς δηλαδή παραμόρφωση σχήματος κατά την κίνησή τους.
- Τούτο συμβαίνει εις την περίπτωση υγρού το οποίο περιέχεται σε δοχείο κινούμενο με σταθερή επιτάχυνση $\mathbf{a}$.
 - Η μελέτη του προβλήματος βασίζεται στην θεώρηση υποθετικού πεδίου βαρύτητας, το οποίο περιλαμβάνει και την αντίθετη – αδρανειακή επιτάχυνση αυτής με την οποία κινείται το δοχείο, άρα και το υγρό
 - Η επιφάνεια του υγρού είναι κάθετη στην επιτάχυνση $\mathbf{g'}$ του υποθετικού πεδίου και σχηματίζει γωνία θ ως προς την οριζόντια (απουσία επιτάχυνσης)
 - $\frac{dz}{dx} = -\frac{a}{g}$ (18) και $\tan \theta = \frac{a}{g}$ (19)



- Τούτο επίσης συμβαίνει εις την περίπτωση υγρού με αρχικό βάθος H , το οποίο περιέχεται σε κυλινδρικό δοχείο ακτίνας R , το οποίο περιστρέφεται (περί τον κατακόρυφο άξονα του) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω .

- Το βάθος στον άξονα είναι: $h_0 = H - \frac{(\omega \cdot R)^2}{4 \cdot g}$ (20)

- Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι: $h = h_0 + \frac{(\omega \cdot r)^2}{2 \cdot g}$ (21)

και έχει σχήμα παραβολοειδούς εκ περιστροφής.

2.5.2 Όργανα μέτρησης

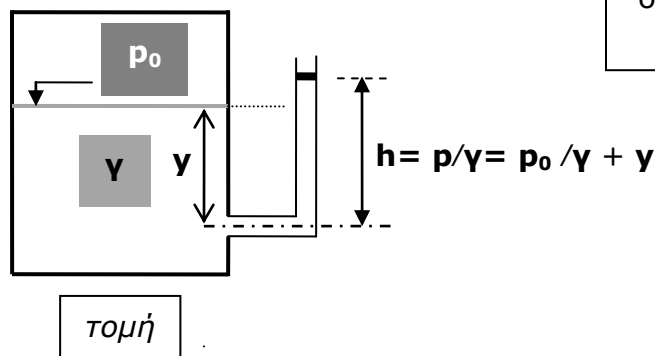
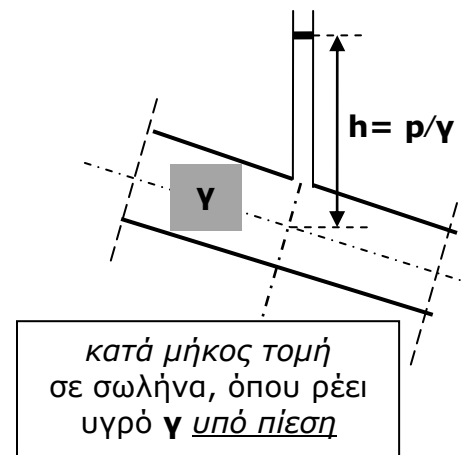
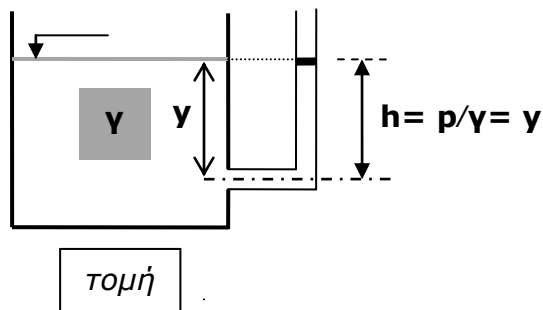
- Παρουσιάζονται εδώ τα δύο όργανα, τα οποία χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση **πιέσεων** ή **διαφορών πιέσεων**.

Σε επόμενα κεφάλαια θα παρουσιαστούν και άλλα όργανα υδραυλικών μετρήσεων, αλλά θα επανέλθουμε και στις χρήσεις των δύο οργάνων του παρόντος εδαφίου σε εφαρμογές, οι οποίες τότε θα είναι κατανοητές (πιέσεις υγρών σε κίνηση).

- **Απλό Πιεζόμετρο**

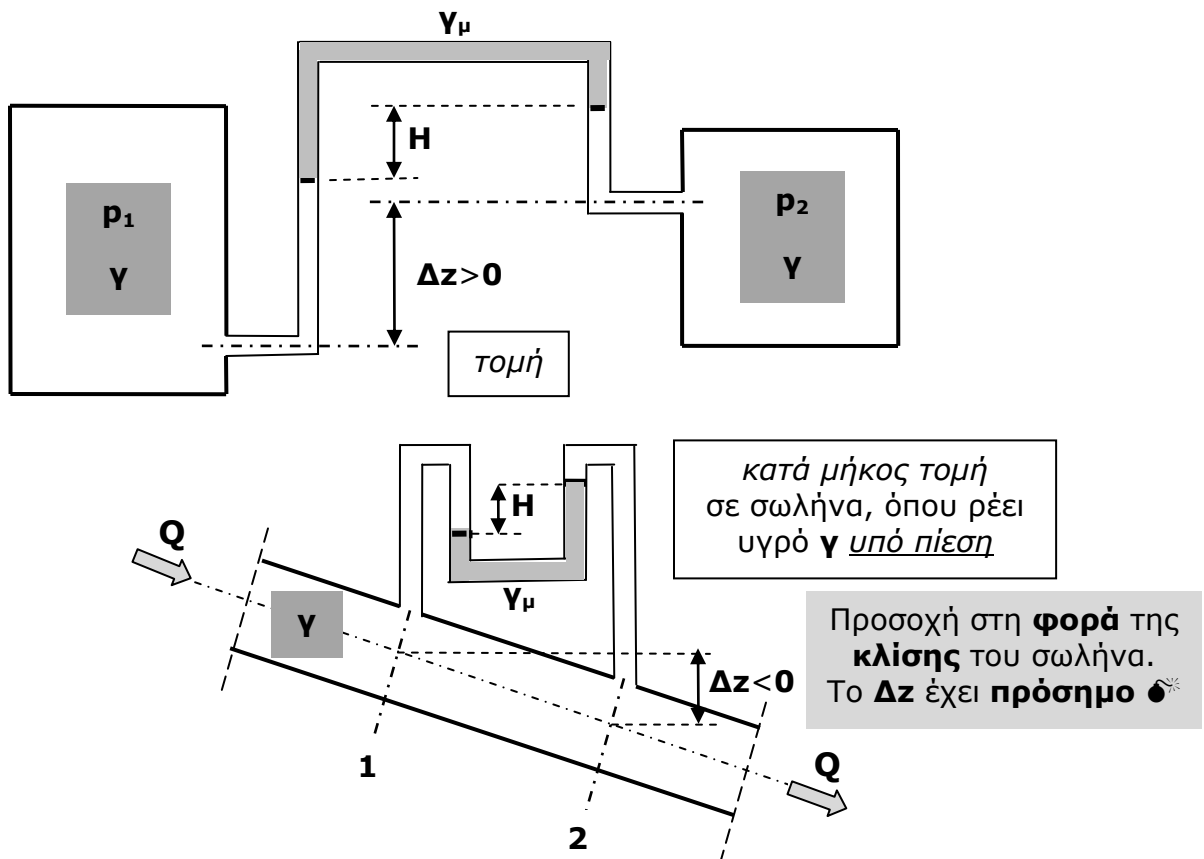
- Σε ένα σημείο δοχείου γεμάτου με υγρό, ή σε μια διατομή αγωγού, όπου ρέει υγρό υπό πίεση, η **πίεση** είναι δυνατό να μετρηθεί με τη χρήση ανοιχτού σωληνίσκου (μικρής διαμέτρου και συνήθως κατακόρυφου)
- Στην ελεύθερη επιφάνεια του σωληνίσκου η πίεση είναι ατμοσφαιρική και Το όργανο αποτελεί ευθεία εφαρμογή της σχέσης (2), (βλ. 2.1.1)
- Ο όρος: **p / γ** έχει διαστάσεις μήκους και ονομάζεται **ύψος πίεσης**

- $$h = \frac{p}{\gamma} \quad (22)$$



• Διαφορικό Μανόμετρο

- Μεταξύ δύο δοχείων που περιέχουν διαφορετικά υγρά, ή μεταξύ δύο διατομών αγωγού, όπου ρέει υγρό υπό πίεση, η **διαφορά** της **πίεσης** είναι δυνατό να μετρηθεί με τη χρήση διάταξης κλειστών σωληνίσκων (μικρής διαμέτρου και συνήθως κατακόρυφων)
- Η διάταξη των σωληνίσκων περιέχει υγρό διαφορετικό - μεγαλύτερης πυκνότητας και μη μίγνυόμενο με τα υπόλοιπα. Το όργανο αποτελεί σύνθετη εφαρμογή της σχέσης (2). Συνήθη (☹ τοξικά!..) υγρά του μανομέτρου είναι:
 - Τετραχλωράνθρακας: $\gamma_{\mu} = 1,60 \text{ t/m}^3$
 - Υδράργυρος: $\gamma_{\mu} = 13,60 \text{ t/m}^3$
- Ο όρος: p / γ έχει διαστάσεις μήκους και ονομάζεται **ύψος πίεσης**
- $$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \left(\frac{\gamma_{\mu}}{\gamma} - 1 \right) \cdot H \pm \Delta z \quad (23)$$
 Προσοχή το Δz είναι προσημασμένο ☹
- Η στάθμη του υγρού στο μανόμετρο σηματοδοτεί ποια πίεση είναι μεγαλύτερη!
 - Στο παρακάτω σχήμα στα δοχεία είναι: $p_1 < p_2$ και $\Delta z > 0$
 - Στο παρακάτω σχήμα στο σωλήνα είναι: $p_1 > p_2$ και $\Delta z < 0$



2.6 Εφαρμογές υπολογισμού

2.6.1 Η εφαρμογή αναφέρεται στο **2.4** (και στα 2.2.3 και 2.2.4)

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ABOA** σε όλο το πλάτος της **b**. Η γωνία του θυροφράγματος στο B είναι 90° .

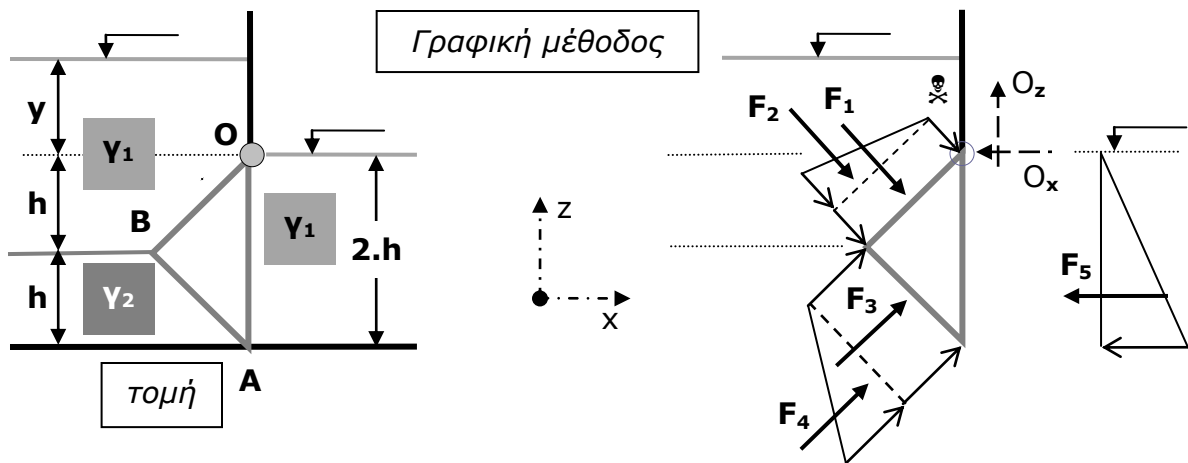
Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **O**, απλώς ακουμπάει στον οριζόντιο άξονα **A** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.

Ανάτη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **y+h** και **h** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Καπάνη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **2.h** και ειδικό βάρος **γ_1** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Το βάθος **$y > 0$** , ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.
2. Η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα, σημείο εφαρμογής)

Αριθμητική εφαρμογή: **$h = 1,5$ m, $b = 8$ m, $\gamma_1 = 1,00$ t/m³, $\gamma_2 = 1,10$ t/m³.**



Αξιοποιούμε τη μεθοδολογία επίλυσης της 2.3.9

Τα μήκη των πλευρών AB και BO είναι: $\sqrt{2} \cdot h$

$$F_1 = \sqrt{2} \cdot \gamma_1 \cdot y \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_3 = \sqrt{2} \cdot \gamma_1 \cdot (y + h) \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}$$

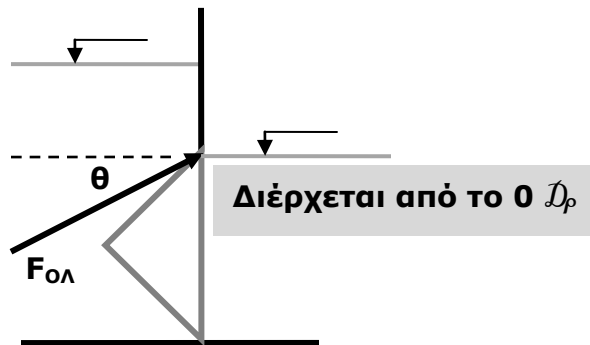
Λόγω της συνθήκης οριακής ισορροπίας η **A_x μηδενίζεται** *Dp*

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^4 M_{OFi} - M_{OF5} = 0 \rightarrow (2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2) \cdot y - \left[\frac{3 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2}{3} \cdot h^3 \right] = 0$$

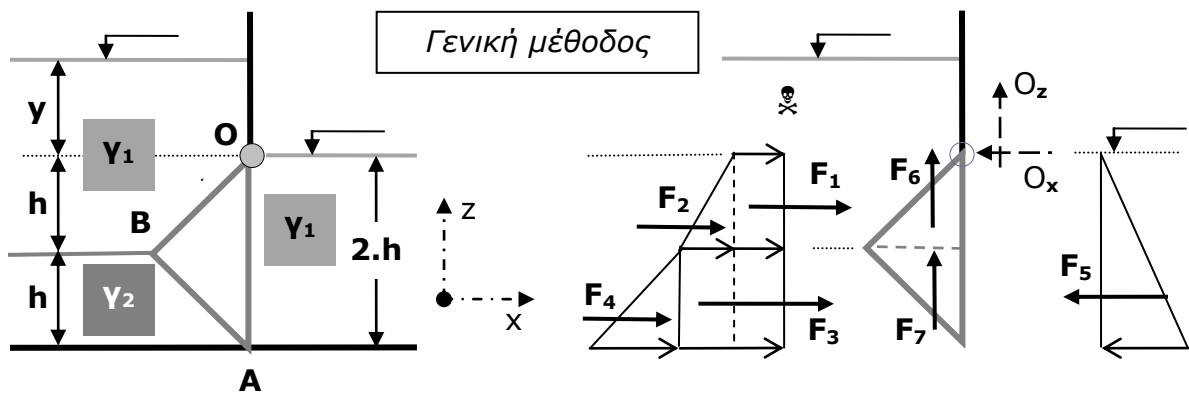
$$\rightarrow y = \frac{3 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2}{6 \cdot \gamma_1} \cdot h \rightarrow \mathbf{y = 1,3 \text{ m}}$$

$$F_{OL} = \left[(\sum F_x)^2 + (\sum F_z)^2 \right]^{1/2} \rightarrow \mathbf{F_{OL} = 37,251 \text{ t} = 365,430 \text{ kN}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sum F_z}{\sum F_x} \rightarrow \tan \theta = \mathbf{0,588785} \rightarrow \theta = \mathbf{30,489^\circ}$$



Η **κλίση** της **F_{OL}**
έχει σχεδιαστεί **ποιοτικά**
Είναι όμως:
από κάτω προς τα πάνω



Αξιοποιούμε τη μεθοδολογία επίλυσης της 2.3.9

$$F_1 = \gamma_1 \cdot y \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{h}{2}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$F_3 = \gamma_1 \cdot (y + h) \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{3 \cdot h}{2}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{5 \cdot h}{3}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}$$

$$F_6 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF6} = \frac{h}{3}$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF7} = \frac{h}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^4 M_{OFi} - \sum_5^7 M_{OFi} = 0$$

Επισημάνση 1: Η άσκηση (όπως και η 2.3.9) είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με τις δύο κατευθύνσεις – μεθόδους και είναι **εμφανέστατη η υπεροχή επιλογής** (κατά σειρά παρουσίασης) των μεθόδων, στο συγκεκριμένο πεδίο! (βλ. 2.2.1)

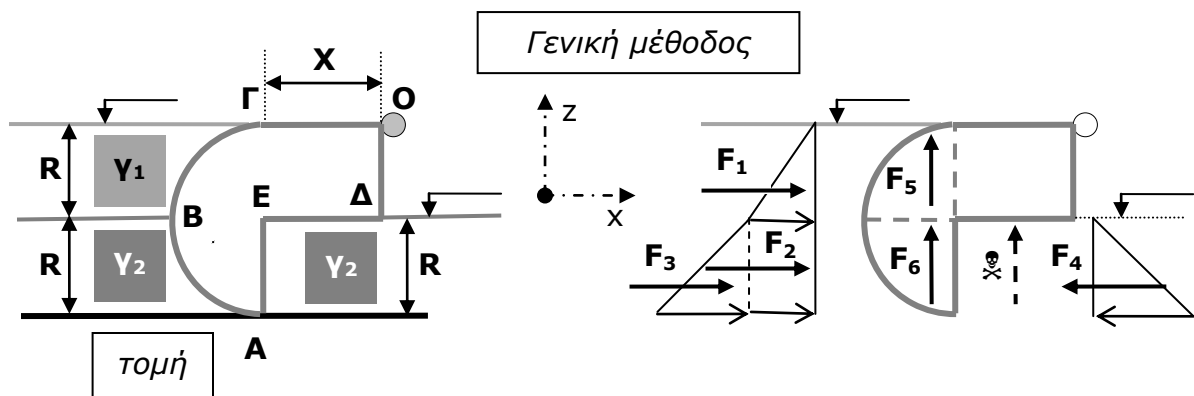
2.6.2 Η εφαρμογή αναφέρεται στο **2.4** (και στο 2.2.4)

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΓΟΔΕΑ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει *σύνθετη* διατομή: ημικύκλιο με ακτίνα **R** + ορθογώνιο με πλευρές **X** και **R**, στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **Ο**, απλώς ακουμπάει στον οριζόντιο άξονα **Α** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.

Ανάπτη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **R** και και ειδικά βάρη **γ₁** και **γ₂**. Καπάνη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **R** και ειδικό βάρος **γ₂** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης – η διάσταση **X**, ώστε το θυρόφραγμα να ισορροπεί οριακά.

Αριθμητική εφαρμογή: **γ₁ = 1,00 t/m³**, **γ₂ = 1,05 t/m³**, **R = 1,4 m**.



Επισημάνση 1: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί **μόνο** με μία από τις κατευθύνσεις – μεθόδους! (βλ. 2.2.1)

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{2 \cdot R}{3}$$

$$F_2 = \gamma_1 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{3 \cdot R}{2}$$

$$F_3 = F_4 \text{ αλληλοαναιρούνται! } \text{♪}$$

$$F_5 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_1 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} + X$$

$$F_6 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_2 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF6} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} + X$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^2 M_{OFi} - \sum_5^6 M_{OFi} = 0$$

$$\rightarrow X = \frac{2 \cdot (9 \cdot \gamma_1 - 2 \cdot \gamma_2)}{3 \cdot \pi \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)} \cdot R \rightarrow \mathbf{X = 1,00 \text{ m.}}$$

2.6.3 Η εφαρμογή αναφέρεται στο **2.4** (και στο 2.2.4)

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΟΓ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει σύνθετη διατομή: ημικύκλιο με ακτίνα **h** + κατακόρυφο τμήμα.

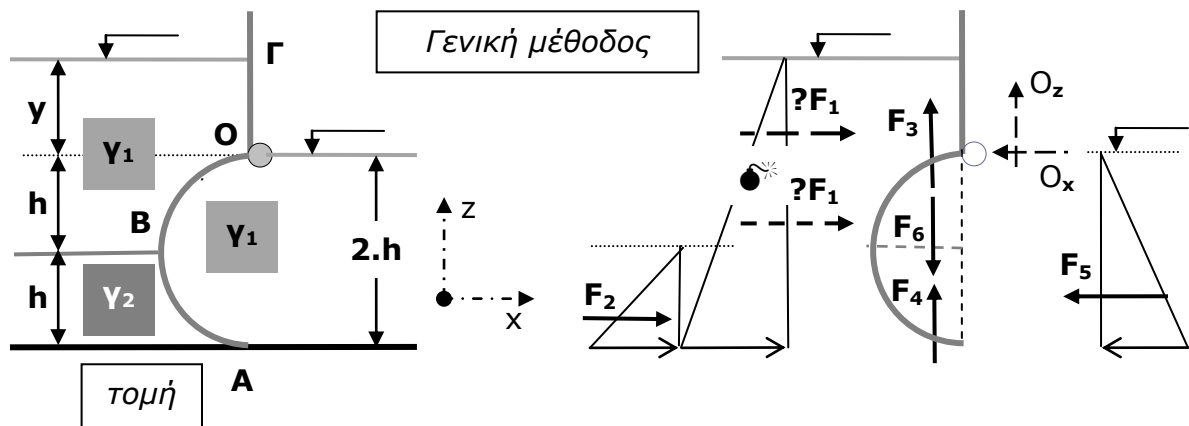
Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα , απλώς ακουμπάει στον οριζόντιο άξονα **A** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.

Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **y+h** και **h** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατάντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **2.h** και ειδικό βάρος **γ_1** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Το βάθος **$y > 0$** , ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.
2. Η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα, σημείο εφαρμογής)

Αριθμητική εφαρμογή: **h = 1,5 m**, **b = 8 m**, **$\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$** , **$\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$** .



Επισήμανση 1: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί **μόνο** με μία από τις κατευθύνσεις – μεθόδους! (βλ. 2.2.1)

Επισήμανση 2: Η χρήση του εναλλακτικού τρόπου εγκυμονεί <εδώ> **κίνδυνο**:

Με άγνωστο το **y** δεν είναι δεδομένη η σχετική θέση της δύναμης **F_1** ως προς το **O** ☹️

Άρα και το πρόσημο της ροπής της!

Επομένως πρέπει να θεωρήσουμε δύο διακριτά πεδία, όπου θα αναζητήσουμε ρίζες και είναι απαραίτητος ο έλεγχος συμβατότητας μετά το πέρας της επίλυσης!

Γενικώς σε περιπτώσεις **ασαφούς γεωμετρίας** δεν προτείνεται η χρήση του εναλλακτικού τρόπου ☹️

Εδώ, θα είχαμε το πεδίο $5 \cdot h > y > 0$ και το πεδίο $y \geq 5 \cdot h$

Θα προτιμήσουμε τον κλασικό τρόπο, με μερική αξιοποίηση της μεθοδολογίας επίλυσης της 2.3.10

Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3 **για ιστορικούς λόγους**

A	B	C	D	p	q	Δ
1	0	-27	-1,01250	-9,000000	-0,506250	-728,743711 < 0

cos φ	φ	γ ₁	γ ₂	γ ₃
0,018750	88,925641	5,214802	-0,037502	-5,177300

→ **γ = 5,215 m**

Εφαρμόζουμε την **αριθμητική επίλυση 2.4.4**

Δεν απαιτείται μετασχηματισμός: $\gamma^3 - 27 \cdot \gamma - 1,0125 = 0$

a	b	c	d
1	0	-27	-1,01250

$$(17) \rightarrow \gamma_{v+1} = \gamma_v - \frac{\gamma_v^3 - 27 \cdot \gamma_v - 1,0125}{3 \cdot \gamma_v^2 - 27}$$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το <-1,0125> → $\gamma_1 = \sqrt[3]{27}$

γ ₁	γ ₂	γ ₃
5,196152	5,214902	5,214802 ✓

→ **γ = 5,215 m**

$$F_{o\lambda} = \left[(\sum F_x)^2 + (\sum F_z)^2 \right]^{1/2} \rightarrow F_{o\lambda} = 234,836 \text{ t} = \mathbf{2.303,745 \text{ kN}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sum F_z}{\sum F_x} \rightarrow \tan \theta = \mathbf{0,006020} \rightarrow \theta = \mathbf{0,345^\circ} \text{ (σχεδόν οριζόντια)}$$



Η κλίση της **F_{oλ}**
έχει σχεδιαστεί **ποιοτικά**
Είναι όμως:
από κάτω προς τα πάνω

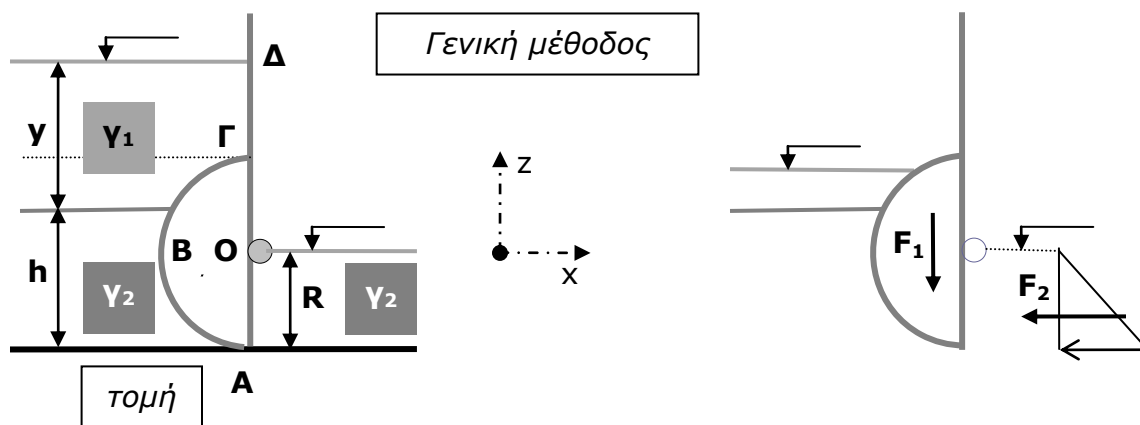
2.6.4 Η εφαρμογή αναφέρεται στο **2.4** (και στο 2.2.4)

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΓΔΓΟΑ**, κατασκευασμένο από φύλλα υλικού βάρους **w** σε t/m^2 , σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει σύνθετη διατομή: ημικύκλιο με ακτίνα **R** + κατακόρυφο τμήμα, στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **Ο** (στο κέντρο του ημικυκλίου), απλώς ακουμπάει στον πυθμένα στον οριζόντιο άξονα **Α** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα. Το τμήμα ΑΒΓ είναι κατασκευασμένο από φύλλα υλικού βάρους **w** (σε t/m^2), ενώ το τμήμα ΑΟΓΔ από φύλλα αβαρή. Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **y** και **h=1,5.R** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατόντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **R** και ειδικό βάρος **γ_2** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Το ελάχιστο βάρος **$w_{\min}$** (σε t/m^2) των φύλλων του υλικού, ώστε το θυρόφραγμα να ισορροπεί οριακά για **$y \leq 0,5.R$** .
2. Το βάθος **y**, ώστε το θυρόφραγμα να ισορροπεί οριακά για δεδομένο **w** και **$y > 0,5.R$**

Αριθμητική εφαρμογή: **$\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$** , **$\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$** , **$R = 1,0 \text{ m}$** , **$w = 0,775 \text{ t/m}^2$**



Επισημάνση 1: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με μία από τις κατευθύνσεις – μεθόδους! (βλ. 2.2.1)

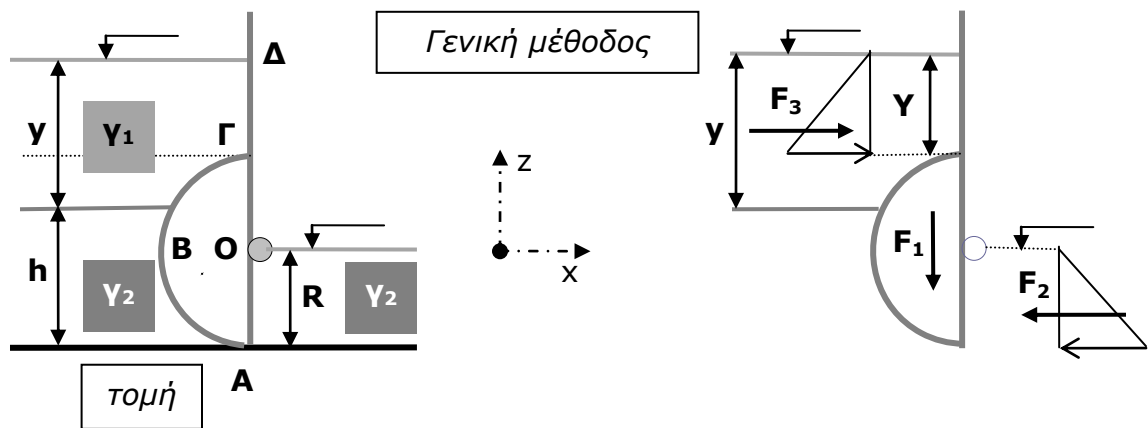
Επισημάνση 2: Τα υγρά τα οποία **βρέχουν** την επιφάνεια **ΑΒΓ**, **ΔΕΝ** συμμετέχουν στην ισορροπία, η συνολική **δύναμη** από πιέσεις **διέρχεται από το Ο** ♪

Περίπτωση 1:

$$F_1 = w_{\min} \cdot \pi \cdot R \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot R}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OF1} - M_{OF2} = 0 \rightarrow w_{\min} = \frac{\gamma_2}{4} \cdot R \rightarrow w_{\min} = 0,275 \text{ t/m}^2$$



Περίπτωση 2:

$$F_1 = w \cdot \pi \cdot R \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot R}{3}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot Y^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{Y}{3} + R, \text{ όπου: } Y = y - \frac{R}{2}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OF1} - M_{OF2} - M_{OF3} = 0$$

$$\rightarrow \gamma_1 \cdot Y^3 + 3 \cdot \gamma_1 \cdot R \cdot Y^2 - [2 \cdot (4 \cdot w - \gamma_2 \cdot R) \cdot R^2] = 0$$

$$\rightarrow Y^3 + 3 \cdot Y^2 - 4 = 0$$

Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3 για ιστορικούς λόγους

A	B	C	D	p	q	Δ
1	3	0	-4	-1,000000	-1,000000	0,00

X ₁	X _{2,3}
1,000	-2,000

$$\rightarrow Y = 1,000 \text{ m} \rightarrow y = 1,500 \text{ m.}$$

Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4

Δεν απαιτείται μετασχηματισμός: $Y^3 + 3 \cdot Y^2 - 4 = 0$

a	b	c	d
1	3	0	-4

$$(17) \rightarrow Y_{v+1} = Y_v - \frac{Y_v^3 + 3 \cdot Y_v^2 - 4}{3 \cdot Y_v^2 + 6 \cdot Y_v}$$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το $<+3.Y^2> \rightarrow Y_1 = (4)^{1/3}$

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
1,587401	1,144908	1,012227	1,000098 ✓

$\rightarrow Y = 1,000 \text{ m} \rightarrow y = 1,500 \text{ m}.$

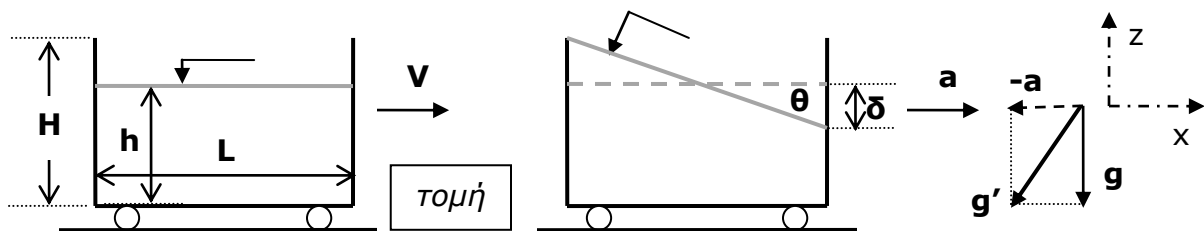
Επισήμανση 3: Τα υγρά τα οποία **βρέχουν** την επιφάνεια **ΑΒΓ**, δεν συμμετέχουν μεν στην ισορροπία, **συμμετέχουν** όμως στον **υπολογισμό** της **συνολικής δύναμης** από πιέσεις $\otimes$ (και της κλίσης της), η οποία βεβαίως **διέρχεται από το Ο**.

2.6.5 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.5.1

Ένα ανοιχτό *όχημα* με πλάτος **b**, ύψος **H** και μήκος **L=2.H** περιέχει υγρό πυκνότητας **p** με βάθος **h=0,75.H** και κινείται με σταθερή ταχύτητα **V** σε οριζόντιο επίπεδο (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της σταθερής επιτάχυνσης **a**, η οποία είναι δυνατό να εφαρμοσθεί στο *όχημα*, ώστε το υγρό να μην υπερχειλίσει.

Αριθμητική εφαρμογή: **H = 1,6 m**, **b = 2 m**, **p = 1.050 kg / m³**.



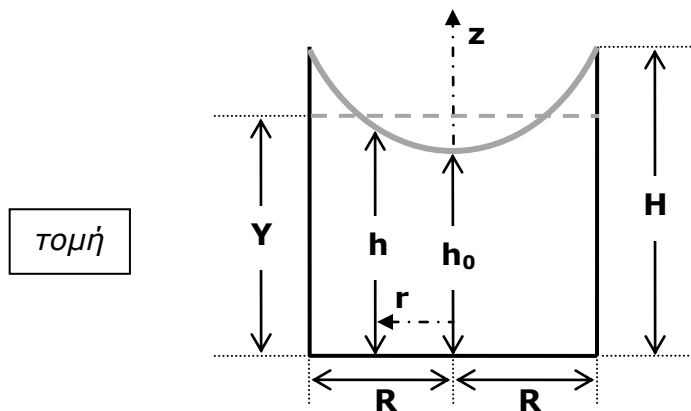
$$(19) \rightarrow a = g \cdot \tan \theta = 2 \cdot g \cdot \frac{\delta}{L} = g \cdot \left(1 - \frac{h}{H}\right) \rightarrow a = 2,4525 \text{ m / s}^2$$

2.6.6 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.5.1

Κυλινδρικό δοχείο, με βάση κύκλο ακτίνας **R** και συνολικό ύψος **H**, βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και το περιεχόμενο νερό φθάνει σε ύψος **Y = 0,75.H** (βλ. σχήμα). Στη συνέχεια το δοχείο τίθεται σε περιστροφική γύρω από τον άξονα συμμετρίας του κίνηση, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της σταθερής γωνιακής ταχύτητας **ω** , η οποία είναι δυνατό να εφαρμοσθεί στο δοχείο, ώστε το νερό να μη μην υπερχειλίσει.

Αριθμητική εφαρμογή: **H = 1,6 m, R = 2 m, $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$.**



$$(20) \rightarrow h_0 = Y - \frac{(\omega \cdot R)^2}{4 \cdot g} \text{ και } (21) \rightarrow H = h_0 + \frac{(\omega \cdot R)^2}{2 \cdot g}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{(g \cdot H)^{1/2}}{R} \rightarrow \omega = \mathbf{1,981 \text{ rad.s}^{-1}}$$

3. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Αναπτύσσονται **συνοπτικώς** οι μέθοδοι περιγραφής της κίνησης των ρευστών και τα χαρακτηριστικά κίνησης και παραμόρφωσης στοιχειωδών ρευστών στοιχείων. **Είναι απαραίτητη η εμβάθυνση σε έννοιες και σχετική ανάλυση με αξιοποίηση των διανεμομένων συγγραμμάτων.**

3.1 Μέθοδοι περιγραφής της κίνησης ρευστού

3.1.1 Εισαγωγή

- Οι μέθοδοι βασίζονται στη θεωρητική οντότητα του **ρευστού σωματιδίου** (βλ. 1.1.1) και την παρακολούθηση του. Δηλαδή την καταγραφή των μεταβολών στις **ιδιότητές** του, στις **πληροφορίες** τις οποίες φέρει.
- Ιδιότητες – πληροφορίες ενδεικτικώς είναι:
 - ο Η **ταχύτητα** (διανυσματικό μέγεθος)
 - ο Η **επιτάχυνση** (διανυσματικό μέγεθος)
 - ο Η **θέση** σε σύστημα τεσσάρων διαστάσεων, συμπεριλαμβανομένης της διάστασης του χρόνου
 - ο Αλλά και η μάζα, η πυκνότητα, η ενέργεια, η ποσότητα κίνησης (ορμή), η θερμοκρασία, το χρώμα, η περιεκτικότητα σε ραδιενέργεια, η γεύση... και ότι άλλο είναι σε θέση να προσθέσει ο νους σας!..

3.1.2 Μέθοδος Lagrange

- Τεκμηριώνει την παρακολούθηση του **ρευστού σωματιδίου** μέσω της καταγραφής της **ιστορίας – χρονικής διαδρομής** του, σε σύστημα τεσσάρων διαστάσεων, όπου τα αρχικά σημεία <0> των τριών χωρικών διαστάσεων και της διάστασης του χρόνου ταυτίζονται.
 - ο Στις 13:00 ένα αυτοκίνητο Renault Mégane χρώματος μπλε αναχωρεί (αρχική ταχύτητα μηδέν – επιτάχυνση μικρή) από το κτίριο Υδραυλικής του ΕΜΠ την Πέμπτη 17/03/2011.
 - ο Στις 13:05 κινείται με σταθερή ταχύτητα (άρα μηδενική επιτάχυνση) στο σημείο διασταύρωσης προς τα κτίρια Διοίκησης και Βιβλιοθήκης.
 - ο Στις 13:10 επιβραδύνει και μετ' ολίγον ακινητοποιείται (ταχύτητα και επιτάχυνση μηδενικές) στην αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη λεωφόρο αμέσως κατόπιν της «πύλης Κατεχάκη». Εκεί ομάδα διαμαρτυρίας το μπουγγελώνει με κόκκινο χρώμα...
 - ο Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Porsche Cayenne χρώματος λευκού ακινητοποιείται στην αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη λεωφόρο αμέσως κατόπιν της «πύλης Κατεχάκη» και βεβαίως η ομάδα διαμαρτυρίας το μπουγγελώνει με κόκκινο χρώμα...
 - ο Στις 13:20 το πρώην μπλε – νυν κόκκινο αυτοκίνητο επιβραδύνει και κατευθύνεται δεξιά προς Παπάγο – Χολαργό στην αντίστοιχη διασταύρωση της λεωφόρου.
 - ο Στις 13:20 το πρώην λευκό – νυν κόκκινο αυτοκίνητο επιβραδύνει και κατευθύνεται δεξιά προς Βύρωνα στην αντίστοιχη διασταύρωση της λεωφόρου.

- Ανάλυση: Σε κάθε χρονική στιγμή t_i αποτυπώνεται η θέση του <επιτηρούμενου> ρευστού σωματιδίου (με βάση κάποιο σύστημα συντεταγμένων) και οι ιδιότητες του:
 - ο π.χ. $\{x_i, y_i, z_i$ - καρτεσιανό}, ή $\{r_i, \theta_i, \varphi_i$ - σφαιρικό}, ή $\{r_i, \theta_i, z_i$ - κυλινδρικό}.
 - ο Με βάση την αρχική θέση στο χώρο: π.χ. $\{x_0, y_0, z_0\}$, ή $\{r_0, \theta_0, \varphi_0\}$, ή $\{r_0, \theta_0, z_0\}$, η οποία αντιστοιχεί στην αρχή του χρόνου: $t_0 = 0$.
 - ο Οι υπόλοιπες πληροφορίες κίνησης: Ταχύτητα – Επιτάχυνση βρίσκονται από τη μεταβολή της θέσης συναρτήσει του χρόνου.
- Εργαλεία γραφικής αποτύπωσης της μεθόδου αποτελούν:
 - ο Η **τροχιά**: Διαδοχικές θέσεις - διαδρομή **ενός** ρευστού σωματιδίου σε διαδοχικές – διαφορετικές χρονικές στιγμές.
 - ο Η **ακολουθία**: Οι θέσεις **όλων** των ρευστών σωματιδίων σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, τα οποία σε προγενέστερες χρονικές στιγμές πέρασαν από συγκεκριμένο - σταθερό σημείο του χώρου.
 - ο Την τροχιά 13:00 έως 13:20 του Renault Mégane η/ο οξυδερκής Μαθητευόμενος Μηχανικός είναι σε θέση νοητικώς να συλλάβει...
 - ο Η ακολουθία στις 13:20 των Renault Mégane και Porsche Cayenne είναι η γραμμή η οποία συνδέει τις δύο διασταυρώσεις της λεωφόρου Κατεχάκη προς Παπάγο – Χολαργό και Βύρωνα...
- Η μέθοδος έχει περιορισμένη εφαρμογή στο παρόν μάθημα.
Θα την αξιοποιήσουμε κυρίως σε ένα πεδίο του Κεφαλαίου **8**.

3.1.3 Μέθοδος Euler

- Τεκμηριώνει την παρακολούθηση της **ροής** μέσω της καταγραφής των διαδοχικώς διερχομένων ρευστών σωματιδίων από **σταθερό σημείο** του **χώρου**.
 - ο Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Renault Mégane χρώματος μπλε εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη λεωφόρο αμέσως κατόπιν της «πύλης Κατεχάκη».
 - ο Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Porsche Cayenne χρώματος λευκού επίσης εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από τη δεξιά λωρίδα στη διασταύρωση με τη λεωφόρο αμέσως κατόπιν της «πύλης Κατεχάκη».
 - ο Στις 13:17 ένα αυτοκίνητο Toyota Prius χρώματος πρασίνου εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη λεωφόρο αμέσως κατόπιν της «πύλης Κατεχάκη».
 - ο Στις 13:20 το μπλε αυτοκίνητο επιβραδύνει και εξέρχεται δεξιά προς Παπάγο – Χολαργό στην αντίστοιχη διασταύρωση της λεωφόρου.
 - ο Στις 13:20 το λευκό αυτοκίνητο επιβραδύνει και εξέρχεται δεξιά προς Βύρωνα στην αντίστοιχη διασταύρωση της λεωφόρου.
 - ο Στις 13:20 το πράσινο αυτοκίνητο επιβραδύνει κινούμενο σε ευθεία πίσω από το μπλε αυτοκίνητο επί της λεωφόρου.
- Ανάλυση: Σε κάθε χρονική στιγμή t_i αποτυπώνονται οι ιδιότητες **όποιου** ρευστού σωματιδίου διέρχεται από την <επιτηρούμενη> σταθερή θέση στο χώρο:
 - ο π.χ. $\{x_A, y_A, z_A\}$, ή $\{r_A, \theta_A, \varphi_A\}$, ή $\{r_A, \theta_A, z_A\}$.
 - ο Οι υπόλοιπες πληροφορίες κίνησης: Ταχύτητα – Επιτάχυνση βρίσκονται από τα διαφορετικά ρευστά σωματίδια συναρτήσει του χρόνου.

- Εργαλείο γραφικής αποτύπωσης της μεθόδου αποτελεί:
 - Η **γραμμή ροής** (ή ροϊκή γραμμή): Ίδια χρονική στιγμή (φωτογραφία) – εφαιπτόμενη σε κάθε ένα από τα διανύσματα της ταχύτητας **όλων** των διαφορετικών ρευστών σωματιδίων. (Ροϊκός σωλήνας βλ. ☐)
 - Η γραμμή ροής κοντά στην έξοδο προς Παπάγο – Χολαργό στις 13:20 (Renault Mégane και Toyota Prius) είναι η καμπύλη γραμμή η οποία συνδέει το <προς τα δεξιά της λεωφόρου> άνυσμα της ταχύτητας του 1^{ου} και το <επί της λεωφόρου> άνυσμα της ταχύτητας του 2^{ου}.
 - Κρατήστε στο νου σας τις παρακάτω εκφράσεις - όρους, τους οποίους θα επανέλθουμε και αξιοποιήσουμε στο Κεφάλαιο **5**:
 - <Είσοδος στη λεωφόρο>, <Έξοδος προς Παπάγο – Χολαργό>, <Έξοδος προς Βύρωνα>.
 - Στις 13:15 ένα μπλε ... από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη λεωφόρο... και ένα λευκό ... από τη δεξιά λωρίδα στη διασταύρωση με τη λεωφόρο...
Οι δύο θέσεις καταγραφής - <επιτήρησης> συμπεριλαμβάνουν ολόκληρη τη <διατομή Εισόδου> της ροής των αυτοκινήτων στη λεωφόρο.
- Η μέθοδος έχει ευρύτατη εφαρμογή στο παρόν μάθημα και όχι μόνο...
Ήδη την εφαρμόσαμε στο 2.2.3!..
 - Επικεντρωθήκαμε στα ρευστά σωματίδια, τα οποία βρέχουν τις επιφάνειες του φορέα, σε κάποια χρονική στιγμή (για την ακρίβεια σε όλες τις χρονικές στιγμές), χωρίς να εξετάσουμε την ιστορία τους: πως βρέθηκαν εκεί...
 - Βεβαίως τα σωματίδια έχουν μηδενικές ταχύτητα και επιτάχυνση, αλλά μας ενδιέφερε η ιδιότητα τους: <πίεση>.
- Αναλόγως με τα χαρακτηριστικά της ροής είναι δυνατό τα ως άνω διακριτά εργαλεία γραφικής αποτύπωσης των δύο μεθόδων να συμπίπτουν «οπτικώς - γραφικώς», όχι να ταυτίζονται εννοιολογικώς!
 - Π.χ. στα παραπάνω παραδείγματα από την «καθημερινή ζωή»: Η τροχιά του μπλε αυτοκινήτου μεταξύ 13:17 και 13:20 και η γραμμή ροής των μπλε και πράσινου αυτοκινήτων στις 13:00 συμπίπτουν σε μεγάλο τμήμα τους.
- Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ τα διανύσματα της ταχύτητας **V** και της επιτάχυνσης **a** αναλύονται αντιστοίχως σε συνιστώσες $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ και $\{\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z\}$ (καλούνται ολικές ή υλικές παράγωγοι):

$$\circ \quad \mathbf{u} = \frac{dx}{dt}, \quad \mathbf{v} = \frac{dy}{dt} \quad \text{και} \quad \mathbf{w} = \frac{dz}{dt} \quad (24)$$

$$\circ \quad \mathbf{a}_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left[\mathbf{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{w} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (25\alpha)$$

$$\circ \quad \mathbf{a}_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left[\mathbf{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{w} \frac{\partial v}{\partial z} \right] \quad (25\beta)$$

$$\circ \quad \mathbf{a}_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \left[\mathbf{u} \frac{\partial w}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial w}{\partial y} + \mathbf{w} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (25\gamma)$$

- Οι συνιστώσες των επιταχύνσεων στην (25) αποτελούνται από **δύο όρους**:

$$\alpha_A = \frac{\partial A}{\partial t} \quad (25\delta)$$

Τοπική επιτάχυνση = **μεταβολή** της **ταχύτητας** (του ρευστού σωματιδίου) στο συγκεκριμένο σημείο, άρα **ως προς το χρόνο**

$$\alpha_A = \left[A \frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial A}{\partial y} + C \frac{\partial A}{\partial z} \right] \quad (25\epsilon)$$

Μεταθετική επιτάχυνση = **μεταβολή** της **ταχύτητας** (λόγω μετάβασης του ρευστού σωματιδίου) σε **γειτονικό σημείο**, άρα **ως προς το χώρο**

- Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η αναλυτική μορφή των γραμμών ροής

προκύπτει από ολοκλήρωση της σχέσης: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (26)$

3.1.4 Κινηματικός χαρακτηρισμός της ροής

- Όταν όλες οι συνιστώσες της **τοπικής επιτάχυνσης** έχουν (σε δεδομένο σημείο) **μηδενική τιμή**, η **ροή** χαρακτηρίζεται ως **μόνιμη**. Η **ταχύτητα είναι δυνατό**:
 - Να **μεταβάλλεται** από **σημείο** σε **σημείο** του **χώρου** του πεδίου ροής
 - Αλλά, παραμένει **αμετάβλητη** στο **ίδιο σημείο** του **χώρου** με την **πάροδο** του **χρόνου**
 - Δηλαδή η **ταχύτητα** είναι συνάρτηση μόνο του **χώρου**
 - Εάν δεν** ισχύει η παραπάνω συνθήκη η ροή χαρακτηρίζεται ως **μη μόνιμη**
 - Στη μόνιμη ροή τροχιά, ακολουθία και γραμμή ροής συμπίπτουν!
- Όταν όλες οι συνιστώσες της **μεταθετικής επιτάχυνσης** (σε δεδομένη χρονική στιγμή) έχουν **μηδενική τιμή**, η **ροή** χαρακτηρίζεται ως **ομοιόμορφη**. Η **ταχύτητα είναι δυνατό**:
 - Να **μεταβάλλεται** στο **ίδιο σημείο** με την **πάροδο** του **χρόνου**
 - Αλλά να έχει την **ίδια διεύθυνση** και **φορά**, **όχι όμως** (οποσδήποτε) το **ίδιο μέτρο** από **σημείο** σε **σημείο** του **χώρου** του πεδίου ροής
 - Εάν δεν** ισχύει η παραπάνω συνθήκη η ροή χαρακτηρίζεται ως **ανομοιόμορφη**
- Είναι προφανές, ότι προκύπτουν τέσσερις (4) πιθανότητες - ζεύγη χαρακτηρισμού της ροής:
 - Μόνιμη και Ομοιόμορφη
 - Μη μόνιμη και Ομοιόμορφη
 - Μόνιμη και Ανομοιόμορφη
 - Μη μόνιμη και Ανομοιόμορφη

3.2 Κίνηση και παραμόρφωση ρευστού στοιχείου σε μόνιμη ροή

3.2.1 Στοιχειώδες επίπεδο ορθογωνικό στοιχείο ABCD

- Ταχύτητες σε κάθε σημείο

- $u_A = u$ και $v_A = v$ (27α)

- $u_B = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ και $v_B = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ (27β)

- $u_C = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ και $v_C = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ (27γ)

- $u_D = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ και $v_D = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ (27δ)

- Επί μέρους συνιστώσες της κίνησης

- **Απλή μετάθεση** (ως άκαμπτο στερεό).

Οφείλεται στους κοινούς όρους: ***u, v*** της ταχύτητας όλων των σημείων

- **Γραμμική παραμόρφωση** (επιμηκύνσεις των πλευρών).

- Οφείλεται στους πρόσθετους όρους στην ίδια διεύθυνση μεταξύ των σημείων κάθε πλευράς, π.χ. ο όρος $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ μεταξύ των σημείων A και B

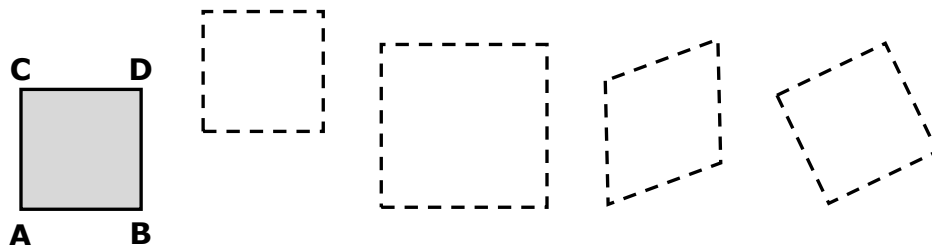
- **Γωνιακή παραμόρφωση** (μετατροπή σε «ρόμβο»).

Οφείλεται στους πρόσθετους όρους στην κάθετη διεύθυνση μεταξύ των σημείων κάθε πλευράς, π.χ. ο όρος $\frac{\partial v}{\partial x} dx$ μεταξύ των σημείων A και B

- **Περιστροφή** (ως άκαμπτο στερεό).

Γωνιακή ταχύτητα περιστροφής περί άξονα z κάθετο στο επίπεδο στοιχείο:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (28)$$



3.2.2 Στοιχειώδες τρισδιάστατο κυβικό στοιχείο

- Γενίκευση των παραπάνω σε οκτώ σημεία, δώδεκα πλευρές, τρεις ταχύτητες και τις αντίστοιχες **τέσσερις** συνιστώσες της κίνησης, με πολλαπλάσιες βεβαίως δυνατότητες...
- Διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής:

$$\vec{\omega} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \vec{k} \right] \quad (29)$$

3.3 Στροβιλότητα - κυκλοφορία

3.3.1 Στροβιλότητα ζ

- Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ισούται με το ήμισυ της στροβιλότητας του

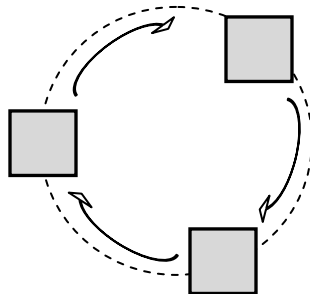
πεδίου ταχυτήτων: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\zeta}$ (30)

- Εάν $\text{rot} \vec{V} = 0 \rightarrow \vec{\omega} = 0$ (31α), το πεδίο καλείται **αστρόβιλο**
- Εάν $\text{rot} \vec{V} \neq 0 \rightarrow \vec{\omega} \neq 0$ (31β), το πεδίο καλείται **στροβιλό**
- Οι αναλυτικές συνθήκες για να ισχύει η (31α) είναι:

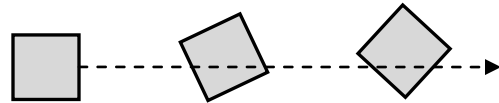
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (32\alpha) - \text{σε τρισδιάστατο πεδίο ροής}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (32\beta) - \text{σε δισδιάστατο πεδίο ροής}$$

- Προσοχή: Στην **αστρόβιλη** ροή τα ρευστά στοιχεία **διατηρούν** τον **προσανατολισμό** τους. Είναι όμως δυνατό να διαγράφουν καμπυλόγραμμη, ακόμη και περιστροφική στο χώρο μετακίνηση $\bullet^*$



αστρόβιλη κίνηση - κυκλική μετακίνηση



στροβιλή κίνηση - ευθύγραμμη μετακίνηση

3.3.2 Κυκλοφορία Γ

- Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας πάνω σε μια τυχούσα κλειστή γραμμή **S** του χώρου:

$$\Gamma = \oint_S (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz) \quad (33)$$

- Σε τυχούσα επιφάνεια **E**, οποία έχει ως όριο την **S**:

$$\Gamma = \iint_E \text{rot} \vec{V} \cdot d\vec{E} = \iint_E 2 \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{E} \quad (34)$$

- Η κυκλοφορία σηματοδοτεί τη στροβιλότητα του πεδίου ανά μονάδα επιφανείας. Επομένως, σε **αστρόβιλο** πεδίο η **κυκλοφορία** είναι **μηδενική**!

3.4 Οριακές συνθήκες ταχυτήτων

3.4.1 Εισαγωγή

- Στα όρια ενός ρευστού, δηλαδή είτε στη διαχωριστική επιφάνειά του με άλλο μη μιννυόμενο ρευστό, είτε στην επιφάνεια επαφής του με στερεό όριο, ισχύουν **οριακές συνθήκες** για την **ταχύτητά** του.
- Είναι κατ' αρχήν προφανές ότι, **δεν** είναι **δυνατό**:
 - Να υπάρχει **κενό** μεταξύ του ρευστού και του άλλου ρευστού ή του στερεού ορίου, *η φύση το απεχθάνεται...*
 - Να υπάρχει **δειξιδυση** στο άλλο ρευστό, *διότι είναι μη μιννυόμενα...*
 - Να υπάρχει **διαφυγή** έξω από το στερεό όριο, *διότι το στερεό όριο δεν είναι σουρωτήρι...*

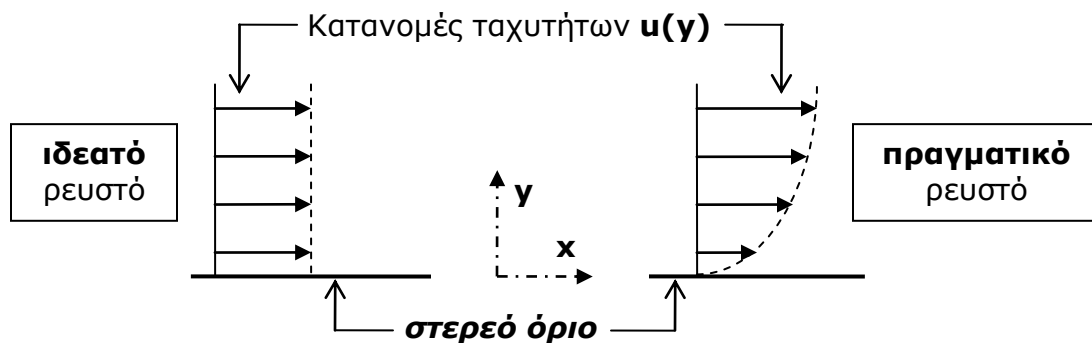
3.4.2 Κινηματική οριακή συνθήκη

- Η **κάθετη συνιστώσα** της **σχετικής ταχύτητας** ρευστού, είτε στη διαχωριστική επιφάνειά του με άλλο μη μιννυόμενο ρευστό, είτε στην επιφάνεια επαφής του με στερεό όριο, είναι **μηδενική**.
- Με βάση την 3.4.1 η συνθήκη ισχύει **πάντοτε**: Σε **ιδεατά** και **πραγματικά** ρευστά (βλ. 1.1.1).

3.4.3 Φυσική οριακή συνθήκη

- Η **εφαπτομενική συνιστώσα** της **σχετικής ταχύτητας** ρευστού, είτε στη διαχωριστική επιφάνειά του με άλλο μη μιννυόμενο ρευστό, είτε στην επιφάνεια επαφής του με στερεό όριο, είναι **μηδενική**.
- Η συνθήκη ισχύει **μόνο** σε **πραγματικά** ρευστά και καλείται επίσης συνθήκη της μη ολίσθησης.

3.4.4 Διαγράμματα κατακόρυφης κατανομής ταχυτήτων στη γειτονία στερεού ορίου

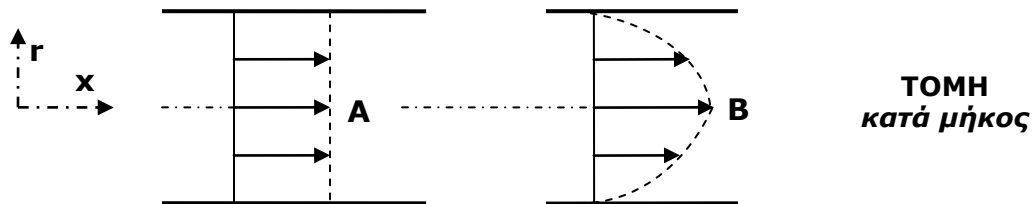


Διάγραμμα - κλειδί κατανόησης 🎵

3.5 Ερωτήσεις κατανόησης και Εφαρμογές υπολογισμού

3.5.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

Κατανομές ταχυτήτων $u(r)$ σε αγωγό κυκλικής διατομής



	Στο παραπάνω σχήμα το διάγραμμα ταχυτήτων:
	Στην περίπτωση A αντιστοιχεί σε πραγματικό ρευστό
	Στην περίπτωση B αντιστοιχεί σε ιδεατό ρευστό
	Στην περίπτωση A η ροή είναι στροβιλή
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω
	Σε ένα πραγματικό ρευστό:
	Η κάθετη προς ακίνητο στερεό όριο συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική
	Η παράλληλη προς ακίνητο στερεό όριο συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική
	Η κινηματική συνεκτικότητα μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω
	Σε ένα ιδεατό ρευστό:
✓	Η κάθετη προς ακίνητο στερεό όριο συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική
	Η παράλληλη προς ακίνητο στερεό όριο συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική
	Η συμπιεστότητα μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω
	Σε ένα ροϊκό σωλήνα:
	Η κάθετη στον άξονά του διατομή είναι κύκλος
	Περιλαμβάνεται ένα πεπερασμένο πλήθος γραμμών ροής
✓	Τα όρια του συμπεριφέρονται ως αδιαπέρατα τοιχώματα
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

3.5.2 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 3.1.4 και 3.3.1

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός δισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων $\vec{V}(u, v)$ δίνονται από τις σχέσεις: $u = \frac{x^2}{2 \cdot L^2} \cdot V_0$ και $v = -\frac{x \cdot y}{L^2} \cdot V_0$, όπου L και V_0 είναι σταθερά μεγέθη μήκους και ταχύτητας αντιστοίχως.

1. Να εξεταστεί εάν η ροή είναι Μόνιμη, Ομοιόμορφη, Αστροβίλη.
2. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση στο σημείο $\mathbf{A}(x = 2 \cdot L, y = L)$.
3. Να προσδιοριστεί η εξίσωση των γραμμών ροής.

1. $(25\delta) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \rightarrow$ ροή μόνιμη

Υπολογίζουμε: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{L^2} \cdot V_0$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$(25\alpha) \rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \left[\left(\frac{x^2}{2 \cdot L^2} \cdot V_0 \right) \cdot \left(\frac{x}{L^2} \cdot V_0 \right) \right] + \left[\left(-\frac{x \cdot y}{L^2} \cdot V_0 \right) \cdot 0 \right] = \frac{V_0^2}{2 \cdot L^4} \cdot x^3 \neq 0$$

$\rightarrow$ ροή ανομοιόμορφη, μη μηδενική τιμή της $\mathbf{a_x}$ αρκεί για το χαρακτηρισμό 🎵

Υπολογίζουμε: $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{L^2} \cdot V_0$, είναι και $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$(28) \rightarrow \omega_z = -\frac{V_0}{L^2} \cdot y \neq 0 \rightarrow$ ροή στροβιλή

2. Έχουμε ήδη υπολογίσει την $\alpha_{Ax} = \frac{V_0^2}{2 \cdot L^4} \cdot x^3 \rightarrow \alpha_{Ax} = \frac{4 \cdot V_0^2}{L}$

Υπολογίζουμε: $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{L^2} \cdot V_0$ και $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{L^2} \cdot V_0$

$$(25\beta) \rightarrow \alpha_y = \left[\left(\frac{x^2}{2 \cdot L^2} \cdot V_0 \right) \cdot \left(-\frac{y}{L^2} \cdot V_0 \right) \right] + \left[\left(-\frac{x \cdot y}{L^2} \cdot V_0 \right) \cdot \left(-\frac{x}{L^2} \cdot V_0 \right) \right] = \frac{V_0^2}{2 \cdot L^4} \cdot x^2 \cdot y$$

$$\rightarrow \alpha_{Ay} = \frac{2 \cdot V_0^2}{L}$$

$$\rightarrow \alpha_A = \sqrt{\alpha_{Ax}^2 + \alpha_{Ay}^2} = \frac{\sqrt{20} \cdot V_0^2}{L}$$

3. $(28) \rightarrow u \cdot dy - v \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{y} \rightarrow 2 \cdot \ln|x| = \ln|y| + C$

4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Αναπτύσσονται **συνοπτικώς** οι θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής και οι αντίστοιχες γενικές διαφορικές εξισώσεις του πεδίου ροής. **Είναι απαραίτητη η εμβάθυνση σε έννοιες και σχετική ανάλυση με αξιοποίηση των διανεμομένων συγγραμμάτων.**

4.1 Βασικές έννοιες

4.1.1 Είδη δυνάμεων

- **Καθολικές:** Δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του θεωρούμενου ρευστού.
 - ο Επίδραση από απόσταση: **Βαρύτητα** ή αδρανειακές.
 - ο Ασκούνται στο κέντρο βάρους του ρευστού σωματιδίου.
 - ο Ανάλογες προς τη μάζα του ρευστού σωματιδίου (ή τον όγκο του).
 - ο Συνήθως εκφράζονται με την ανά μονάδα μάζας δύναμη, δηλαδή έχουν διαστάσεις επιτάχυνσης.
 - ο Συχνά τα πεδία καθολικών δυνάμεων προέρχονται από δυναμικό.
 - ο Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με κατακόρυφο προς τα πάνω άξονα z

$$f_x = 0, f_y = 0 \text{ και } f_z = -g \quad (35)$$

- **Επιφανειακές:** Ασκούνται στην επιφάνεια η οποία περιβάλλει το θεωρούμενο όγκο ρευστού από το γειτονικό - σε επαφή - ρευστό.
 - ο Θεωρούμε στοιχειώδη όγκο μορφής ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$:
 - ο Σε κάθε έδρα ασκούνται κάθετες και εφαπτομενικές δυνάμεις, οι οποίες δίνουν ορθές (σ) και διατμητικές (τ) τάσεις.
 - ο Η εντατική κατάσταση σε σημείο ρευστού περιγράφεται πλήρως από έξι (6) τάσεις: τρεις (3) ορθές και τρεις (3) διατμητικές, όπως στη Μηχανική των Στερεών!..
- Οι Καθολικές και Επιφανειακές δυνάμεις αποτελούν **σημαντικές παραμέτρους** του Κεφαλαίου **5**. Θα τις υπολογίσουμε <εκεί> αξιοποιώντας τις μεθόδους 2.2.4 και 2.2.2 αντιστοίχως!
- **Γραμμικές:** Αποτέλεσμα του φαινομένου επιφανειακής τάσης.
 - ο Στα όρια μεταξύ υγρού – αερίου ή δύο μη μιγνυομένων υγρών
 - ο Δεν υπεισέρχονται στις εξισώσεις κίνησης, παρά μόνο ως οριακές συνθήκες.

4.1.2 Θεμελιώδεις νόμοι

- Αρχή **διατήρησης της μάζας**:
 - ο Σε ένα σύνολο ρευστών σωματιδίων - με στοιχειώδεις μάζες το καθένα - η συνολική τους μάζα παραμένει αναλλοίωτη κατά την κίνησή τους.

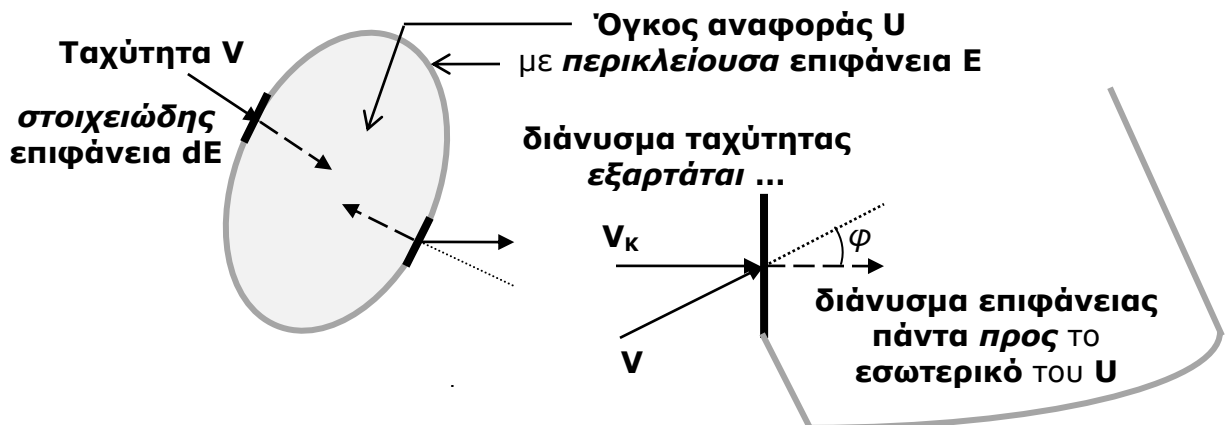
$$\int dm = \text{σταθ} \rightarrow \frac{D}{Dt} \int dm = 0 \quad (36)$$

- Στα **ομογενή** ρευστά συσχετίζονται οι μεταβολές πυκνότητας και ταχύτητας → **εξίσωση συνεχείας** (βλ. 4.2.2).
- Στα ανομοιογενή η αρχή αυτή ισχύει για το καθένα χωριστά.
- Θεώρημα της **ποσότητας κίνησης** - Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα:
 - Το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν σε ένα σύστημα μάζας ρευστού, ισούται με την ολική μεταβολή (παράγωγο) ως προς το χρόνο της ποσότητας κίνησης (ορμής) του συστήματος.
 - $$\vec{F} = \int \vec{\alpha} \cdot dm \rightarrow \vec{F} = \frac{D}{Dt} \int \vec{V} \cdot dm \quad (37)$$
 - Οδηγεί στις εξισώσεις κίνησης, οι οποίες συνδέουν τα κινηματικά και τα δυναμικά χαρακτηριστικά της ροής → **εξίσωση ποσότητας κίνησης** (βλ. 4.2.2).
- Αρχή **διατήρησης** της **ενέργειας**:
 - Η ενέργεια αποτελεί ιδιότητα του ρευστού (βλ. 3.1.1) και ορίζεται πλήρως από την κατάσταση του.
 - Η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος προκύπτει από τις μεταβολές:
 - Της θερμότητας: προστιθέμενη <+> / αφαιρούμενη <->
 - Του έργου: αποδιδόμενο <-> / προσλαμβάνόμενο <+>
 - $\pm \delta Q \mp \delta W = dE \quad (38)$
 - Το ισοζύγιο έργου με το περιβάλλον περιλαμβάνει:
 - Έργο καθέτων τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
 - Έργο διατμητικών τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
 - Έργο μηχανικό που αποδίδεται από (υδροστρόβιλος), ή προσλαμβάνεται στο (αντλία) σύστημα, μέσω μηχανικού άξονα
 - Η **ενέργεια** του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί με την τιμή της ανά μονάδα μάζας και συνίσταται από **τρεις μορφές**:
 - **Δυναμική**, λόγω θέσης - υψομετρικής διαφοράς: $\varepsilon_s = g \cdot h$
 - **Κινητική**, λόγω ταχύτητας: $\varepsilon_k = \frac{V^2}{2}$
 - Εσωτερική, εξαρτώμενη από την τοπική θερμοκρασία: $\varepsilon_i = I$
 - $(38) \rightarrow \pm \frac{\delta Q}{dt} \mp \frac{\delta W}{dt} = \frac{D}{Dt} \int \varepsilon \cdot dm = \frac{D}{Dt} \int \left(g \cdot h + \frac{V^2}{2} + I \right) \cdot dm \quad (39)$
 - Στα ρευστά συσχετίζονται **πυκνότητα, πίεση, ταχύτητα, υψομετρική θέση, μηχανικό έργο**, θερμοκρασία, προστιθέμενη θερμότητα...
Στα <δικά μας> υγρά, τα οποία είναι πρακτικώς ασυμπίεστα και έχουν μεγάλη θερμοχωρητικότητα, η εξίσωση απλοποιείται → **εξίσωση ενέργειας** (βλ. 4.2.2).

4.2 Μέθοδοι ανάλυσης

4.2.1 Χαρακτηριστικά

- Τα παραπάνω συνδέονται ευκόλως με τη μέθοδο περιγραφής της κίνησης κατά Lagrange (βλ. 3.1.2).
Είναι όμως αναγκαίες κάποιες **προσαρμογές**, ώστε να συνδεθούν με την κανόνα χρησιμοποιούμενη στη ρευστομηχανική περιγραφή **κατά Euler** (βλ. 3.1.3).
- Μέθοδος του **ρευστού σωματιδίου**
 - Επιλέγουμε τυχόν σταθερό σημείο (x, y, z) .
 - Παρακολουθούμε την κίνηση ρευστού σωματιδίου απειροστής μάζας dm στη γειτονία του σημείου. Έτσι Περιγράφονται τα χαρακτηριστικά της ροής.
 - Η μεταβολή κάθε ιδιότητας δίνεται από την ολική παράγωγο (βλ. 3.1.3).
- Μέθοδος του **σταθερού διαφορικού όγκου αναφοράς**
 - Επιλέγουμε και πάλι τυχόν **σταθερό σημείο** (x, y, z) .
 - Θεωρούμε διαφορικό όγκο αναφοράς dU **γύρω από το σημείο**.
 - Παρακολουθούμε – καταγράφουμε τις **μεταβολές** των **ιδιοτήτων** του ρευστού, οι οποίες **εισέρχονται, εξέρχονται ή συγκεντρώνονται μέσα** στον όγκο αυτό.
 - Για τη μέθοδο έχει ουσιώδη σημασία η έννοια της εισροής (και εκροής!)
- **Πεπερασμένος όγκος αναφοράς, εισροή – εκροή**
 - Θεωρούμε πεπερασμένο όγκο **U** και την επιφάνεια **E**, η οποία τον περικλείει. Η επιφάνεια αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες dE , των οποίων το **διάνυσμα** έχει **πάντοτε φορά** προς το **εσωτερικό του όγκου**!
 - Στις στοιχειώδεις επιφάνειες αντιστοιχούν ρευστά σωματίδια με ταχύτητα $\vec{V}$, των οποίων η κάθετη συνιστώσα σε κάθε dE είναι V_k .
Τα **διανύσματα ταχυτήτων** έχουν τη **φορά της κίνησης**, άρα:
 - Είτε προς το **εσωτερικό** του **όγκου** → **εισρέουν**
 - Είτε προς το **εξωτερικό** του **όγκου** → **εκρέουν**



- Κάθε **διάνυσμα** της **ταχύτητας** είναι φορέας – **όχημα ιδιοτήτων**!
 - Μεταφέρει Ιδιότητες: π.χ. μάζα, επιτάχυνση, ενέργεια, θερμοκρασία, ακτινοβολία, χρώμα
 - Αλλά και την **ιδιότητα ταχύτητα**!.. **Διακριτή** από το **όχημα ταχύτητα**!!.
 - Περισσότερα στο Κεφάλαιο **5**.
- Η εισροή ιδιότητας λ (ή, η εκροή = αρνητική εισροή) στον όγκο U διαμέσου της στοιχειώδους επιφάνειας dE είναι: $\lambda \cdot V_k \cdot dE$
 Και η ολική εισροή ιδιότητας λ στον όγκο **U** διαμέσου της επιφάνειας **E** είναι:

$$\int_E \lambda \cdot V_k \cdot dE = \int_E \lambda \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E} \quad (40)$$
 - Όπου είναι $\vec{V} \cdot d\vec{E} > 0 \rightarrow$ **εισροή**
 - Όπου είναι $\vec{V} \cdot d\vec{E} < 0 \rightarrow$ **εκροή**
- Η διατύπωση των θεμελιωδών νόμων βασίζεται στο **ισοζύγιο** μεταξύ των **εισερχομένων, εξερχομένων** και **συσσωρευομένων** ποσοτήτων των διαφόρων **ιδιοτήτων** στον όγκο.
 - Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Renault Mégane χρώματος μπλε **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
 - Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Porsche Cayenne χρώματος λευκού επίσης **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από τη δεξιά λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
 - Στις 13:17 ένα αυτοκίνητο Toyota Prius χρώματος πρασίνου **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
 - Στις 13:19 το Toyota Prius **ακινητοποιείται** επί της **Λεωφόρου**.
 - Στις 13:20 το Renault Mégane επιβραδύνει και **εξέρχεται** δεξιά προς Παπάγο – Χολαργό στην αντίστοιχη διασταύρωση της **Λεωφόρου**.
 - Στις 13:20 το Porsche Cayenne επιβραδύνει και **εξέρχεται** δεξιά προς Βύρωνα στην αντίστοιχη διασταύρωση της **Λεωφόρου**.
- Ανάλυση κατά Euler με χρήση πεπερασμένου όγκου αναφοράς του ως άνω σεναρίου οδικής κυκλοφορίας:
 - Μία επιφάνεια εισόδου: Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη». Περιλαμβάνει δύο λωρίδες.
 - Δύο επιφάνειες εξόδου: Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** προς Παπάγο – Χολαργό + Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** προς Βύρωνα.
 - Ο **όγκος αναφοράς** ορίζεται από τις τρεις ως άνω **επιφάνειες** και τα οδικά **όρια** της **Λεωφόρου**.
 - Στις 13:15 **εισρέουν** στον όγκο αναφοράς διάφορες **ιδιότητες** με κάποιες τιμές και **όχημα** την **ταχύτητα** των δύο αυτοκινήτων Renault και Porsche.
 - Στις 13:20 **εκρέουν** από τον όγκο αναφοράς οι ίδιες **ιδιότητες** με διαφορετικές ίσως τιμές, αλλά **πάλι** με **όχημα** την **ταχύτητα** των δύο παραπάνω αυτοκινήτων .

- Στις 13:17 **εισρέουν** στον όγκο αναφοράς διάφορες **ιδιότητες** με κάποιες τιμές και **όχημα** την **ταχύτητα** του ενός αυτοκινήτου Toyota.
- Στις 13:20 οι **ιδιότητες** του Toyota, με κάποιες τιμές, **έχουν συσσωρευθεί** στον όγκο αναφοράς διάφορες.

4.2.2 Εξίσωση Συνεχείας

- Είναι διαφορική εξίσωση, η οποία εκφράζει την **αρχή διατήρησης μάζας** του ρευστού (βλ. 4.1.2).
- Σε **σταθερό διαφορικό όγκο αναφοράς dU** (βλ. 4.2.1) μορφής ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με πλευρές **dx, dy, dz**, η (40) για την ιδιότητα μάζα είναι:

$$\circ \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot dU) = \sum \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E}$$

$$\circ \quad \text{Όπου: } \sum \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E} = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) \right] \cdot dU$$

$$\circ \quad \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad (41)$$

- Η (41) αποτελεί τη **γενική εξίσωση συνέχειας** και μπορεί να παραχθεί επίσης με τη μέθοδο του ρευστού σωματιδίου.
- Άλλες μορφές γραφής της (41) είναι:

$$\circ \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (41\alpha)$$

$$\circ \quad \frac{D\rho}{Dt} + \text{div}\vec{V} = 0 \quad (41\beta)$$

- Η παραπάνω γενική εξίσωση συνέχειας απλοποιείται υπό προϋποθέσεις:

- Για **ασυμπίεστα** ρευστά (μόνιμη και μη μόνιμη ροή!):

$$\circ \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}\vec{V} = 0 \quad (42)$$

$$\circ \quad \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (42\alpha)$$

- Για **συμπιεστά** ρευστά και **μόνιμη** ροή: $\text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (43)$

4.2.3 Εξισώσεις Κίνησης

- Είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις β' βαθμού, οι οποίες εκφράζουν το θεώρημα της **ποσότητας κίνησης** (βλ. 4.1.2).
Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (τρεις κινήσεις + εξίσωση συνεχείας) επιλύεται μόνο με αριθμητικές μεθόδους.

- Για **ασυμπίεστα** ρευστά **σταθερής πυκνότητας** και **συνεκτικότητας** καταλήγουν στις εξισώσεις **Navier - Stokes**:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \cdot \vec{f} - \text{grad}p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (44)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot f_x - \frac{dp}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (45\alpha)$$

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot f_y - \frac{dp}{dy} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (45\beta)$$

$$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = \rho \cdot f_z - \frac{dp}{dz} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (45\gamma)$$

- Ειδικότερα για **ασυμπίεστα** ρευστά **σταθερής πυκνότητας** και **συνεκτικότητας** στο **πεδίο βαρύτητας** της **γης** οι εξισώσεις **Navier - Stokes** είναι:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p + \gamma \cdot h) + \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (46)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (46\alpha)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (46\beta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (46\gamma)$$

- Ειδικότερα για **ιδεατά ρευστά**, όπου $\mu = 0$ οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικώς και είναι γνωστές ως εξισώσεις **Euler**:

$$\circ \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p + \gamma \cdot h) \quad (47)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

$$\cdot \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (47\alpha)$$

$$\cdot \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad (47\beta)$$

$$\cdot \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad (47\gamma)$$

- Οι εξισώσεις Euler είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις α' βαθμού. Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (τρεις κινήσεις + εξίσωση συνέχειας) επιλύεται με μαθηματικές μεθόδους!

4.3 Παρατηρήσεις για τις εξισώσεις συνέχειας και κίνησης

4.3.1 Ασυμπίεστα και ομογενή ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης

- Ισχύουν οι (42) και (46^α, β, γ) (βλ. 4.2.2 και 4.2.3).
 - Το σύστημα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων έχει τέσσερις αγνώστους: τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας (**u, v, w**) και την πίεση **p**.
 - Η επίλυση είναι δυνατή εφ' όσον καθοριστούν:
 - Οι οριακές συνθήκες στα όρια του πεδίου επίλυσης
 - Οι αρχικές συνθήκες στην αρχή του χρόνου
 - Οριακές συνθήκες για την **ταχύτητα** είναι **κινηματικές** και φυσικές (βλ. 3.4)
 - Οριακές συνθήκες για την **πίεση** είναι π.χ. η ελεύθερη επιφάνεια, η οποία υπόκειται σε ατμοσφαιρική πίεση, ή όπου αλλού η πίεση στα όρια είναι γνωστή.
- Οι εξισώσεις **Navier – Stokes** είναι δυνατό να θεωρηθούν ως **εξισώσεις ισορροπίας** μεταξύ των (ανά μονάδα μάζας) **δυνάμεων: αδρανείας, βαρύτητας, πίεσης** και **συνεκτικότητας**.
Επομένως, ακόμη και σε **πραγματικά** ρευστά είναι δυνατό να **απλοποιηθούν**, όταν στο **φυσικό πρόβλημα, κάποια** από αυτές τις δυνάμεις είναι δυνατό να θεωρηθεί **αμελητέα**:

- **Παράλληλη ροή**

- ο Οι γραμμές ροής είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους $\rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$
 - (42) $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\rightarrow$ η $u = u(y, z, t)$ είναι αμετάβλητη κατά μήκος εκάστης γραμμής ροής.
 - (46α) $\rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma \cdot h) + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ (48α)
 - (46β) $\rightarrow 0 = -\frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma \cdot h)$ (48β)
 - (46γ) $\rightarrow 0 = -\frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma \cdot h)$ (48γ)
- ο Δηλαδή σε **παράλληλη** ροή, η **πίεση κατανέμεται υδροστατικά** πάνω σε **διατομές κάθετες** προς τη **διεύθυνση** της **ροής** ♪

- **Κλειστό Σύστημα**

- ο Η ροή περιβάλλεται από παντού από στερεά όρια, επομένως η γεωμετρία του πεδίου ροής **δεν μεταβάλλεται** από αυτή καθ' αυτή τη ροή.
- ο Είναι δυνατό να θεωρήσουμε, ότι η συνολική – πραγματική πίεση είναι άθροισμα δύο όρων:
 - **Στατική πίεση** p_s , η οποία θα υπήρχε ήδη σε κατάσταση ηρεμίας.
 - **(Υδρο)δυναμική πίεση** p_δ , η οποία οφείλεται αποκλειστικώς στην κίνηση.
- ο Σε **ασυμπίεστα ομογενή** ρευστά στο πεδίο **βαρύτητας** της **γης** απαλείφεται ο όρος της βαρύτητας και παραμένει μόνο η συνιστώσα της δυναμικής πίεσης:
 - (46) $\rightarrow \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p_\delta + \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{V}$ (49)
 - Η περαιτέρω επίλυση του συστήματος είναι δυνατό να γίνει ως προς τη δυναμική πίεση, με την προϋπόθεση ότι και οι οριακές συνθήκες είναι δυνατό να εκφραστούν συναρτήσει αυτής.
 - Οι ως άνω προϋπόθεση ικανοποιείται σε συστήματα «ροής υπό πίεση» (σε κλειστούς αγωγούς), ενώ δεν ικανοποιείται σε συστήματα «ροής με ελεύθερη επιφάνεια» (σε ανοικτούς αγωγούς).

- **Έρπουσα ροή**

- ο Είναι σχετικώς **βραδεία**, δηλαδή οι όροι των **επιταχύνσεων** στις εξισώσεις Navier – Stokes είναι **πολύ μικρότερες** από τους όρους των **δυνάμεων συνεκτικότητας**, άρα είναι δυνατό (κατά προσέγγιση) να **αμεληθούν**:

$$(46) \rightarrow \text{grad}(p + \gamma \cdot h) = \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (50)$$

- ο Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η **ροή σε πορώδες έδαφος** (υπόγεια ύδατα).

- **Ιδεατά ρευστά – Οριακό στρώμα**

- ο Στα **ιδεατά** ρευστά ($\mu = 0$) οι εξισώσεις Navier – Stokes απλοποιούνται ως εξισώσεις **Euler** (βλ. 4.2.3).
 - Σε προβλήματα όπου οι όροι **συνεκτικότητας** στις εξισώσεις Navier – Stokes έχουν **μικρό μέγεθος** σε σύγκριση με τους άλλους όρους, η **θεωρία** των **ιδεατών ρευστών** (βλ. Κεφάλαιο 7) είναι **δυνατό** να οδηγήσει σε **ικανοποιητικά αποτελέσματα**. Σε άλλα προβλήματα όχι...
 - Ακόμη και στην περίπτωση όπου η **συνεκτικότητα δεν** είναι δυνατό να **αμεληθεί γενικώς**, η θεωρία των **ιδεατών ρευστών** είναι **δυνατό** να οδηγήσει σε **ικανοποιητικά αποτελέσματα** σε **τμήμα** του **πεδίου** ροής: **Μακριά** από τα **στερεά όρια**, όπου η **φυσική οριακή συνθήκη** (βλ. 3.4.3), δηλαδή η επιρροή των διατμητικών τάσεων **δεν** είναι **σημαντική** ♪
- ο **Κοντά** στα **στερεά όρια**, η **επιρροή** των **διατμητικών τάσεων** (οσοδήποτε μικρή και αν είναι η συνεκτικότητα...) είναι **πάντοτε σημαντική**, διότι εκεί αναπτύσσονται **μεγάλες κλίσεις ταχυτήτων**.
 - Στο **στερεό όριο** η **ταχύτητα** είναι **μηδενική** (βλ. 3.4.4).
 - **Λίγο πιο μακριά** από το όριο η **ταχύτητα** έχει **μη μηδενική** τιμή!
 - Η **μεταβολή** - κλίση της **ταχύτητας** έχει **πολύ μεγάλη τιμή** (θεωρητικώς **άπειρη**), οπότε το **γινόμενο** της ακόμη και με **πολύ μικρή** τιμή **συνεκτικότητας** έχει **μη μηδενική** τιμή και **δεν αμελείται**!
- ο Η ανάλυση (βλ. Κεφάλαια 9 και 12) γίνεται με **διαφορετικές μεθόδους** σε **δύο περιοχές** του **πεδίου** ροής:
 - **Κοντά** στα **στερεά όρια** → **εντός** του **οριακού στρώματος**, οι όροι **συνεκτικότητας δεν** αμελούνται.
 - **Μακριά** από τα **στερεά όρια** → **εκτός** του **οριακού στρώματος**, οι όροι **συνεκτικότητας αμελούνται**.

4.4 Ερωτήσεις κατανόησης και Εφαρμογές υπολογισμού

4.4.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Σε ένα πεδίο ροής πραγματικού ρευστού:
✓	Οι καθολικές δυνάμεις δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του
	Οι επιφανειακές δυνάμεις δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του
	Οι γραμμικές δυνάμεις συνήθως προέρχονται από δυναμικό
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα πεδίο ροής ιδεατού ρευστού το ισοζύγιο έργου με το περιβάλλον περιλαμβάνει:
	Έργο διατμητικών τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
	Μεταβολή της θερμότητας στα όρια του συστήματος
✓	Έργο καθέτων τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η μέθοδος ανάλυσης κατά Euler:
	Εφαρμόζεται μόνο σε ιδεατά ρευστά
	Εφαρμόζεται μόνο σε πραγματικά ρευστά
	Βασίζεται στις εξισώσεις Euler
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Στη μέθοδο ανάλυσης του σταθερού διαφορικού όγκου αναφοράς:
	Παρακολουθούμε μόνο τις μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού, οι οποίες εισέρχονται μέσα στον όγκο αυτό
✓	Παρακολουθούμε τις μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού, οι οποίες εισέρχονται, εξέρχονται ή συγκεντρώνονται μέσα στον όγκο αυτό
	Παρακολουθούμε την κίνηση ρευστού σωματιδίου απειροστής μάζας dm , το οποίο εισέρχεται ή εξέρχεται από τον όγκο αυτό
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η εξίσωση συνεχείας είναι διαφορική εξίσωση, η οποία:
	Ισχύει μόνο για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας
✓	Εκφράζει την αρχή διατήρησης μάζας του ρευστού
	Ισχύει μόνο για ιδεατά ρευστά
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Οι εξισώσεις Navier – Stokes:
	Ισχύουν για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας
	Ισχύουν για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας στο πεδίο βαρύτητας της γης
	Ισχύουν για ιδεατά ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Οι εξισώσεις Euler:
✓	Ισχύουν για ιδεατά ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης
	Είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις β' βαθμού
	Εφαρμόζονται μόνο στη μέθοδο ανάλυσης κατά Euler
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε παράλληλη ροή:
	Οι γραμμές ροής είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους
	Η πίεση κατανέμεται υδροστατικά πάνω σε διατομές κάθετες προς τη διεύθυνση της ροής
	Οι εξισώσεις Navier – Stokes απλοιοούνται
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η ροή πραγματικού ρευστού με ελεύθερη επιφάνεια σε έναν αγωγό κλειστής διατομής:
	Είναι δυνατό να προσεγγιστεί ως κλειστό σύστημα
	Είναι πάντοτε δυνατό να προσεγγιστεί ως έρπουσα
	Είναι δυνατό να επιλυθεί με τις εξισώσεις Euler
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

4.4.2 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 4.2.2

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός δισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων $\vec{V}(u, v)$ δίνονται από τις σχέσεις: $u = \frac{x^2}{2 \cdot L^2} \cdot V_0$ και $v = -\frac{x \cdot y}{L^2} \cdot V_0$, όπου L και V_0 είναι σταθερά μεγέθη μήκους και ταχύτητας αντιστοίχως.

Να εξεταστεί εάν ικανοποιείται η εξίσωση συνεχείας.

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{L^2} \cdot V_0 \text{ και } \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{L^2} \cdot V_0$$

$$(42) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{ικανοποιείται}$$

4.4.3 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 4.2.2

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός δισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων $\vec{V}(u, v)$ δίνονται από τις σχέσεις: $u = 4 \cdot x \cdot y + y^2$ και $v = 6 \cdot x \cdot y + 3 \cdot x$.

Να εξεταστεί εάν οι παραπάνω τιμές είναι δυνατές για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού.

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial u}{\partial x} = 4 \cdot y \text{ και } \frac{\partial v}{\partial y} = 6 \cdot x$$

$$(42) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \rightarrow \text{δεν ικανοποιείται η εξίσωση συνεχείας} \rightarrow \text{η ροή δεν είναι δυνατή}$$