

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρουσιάζονται οι απαραίτητες έννοιες και στοιχεία της Μηχανικής των Ρευστών με έμφαση στα βασικά χαρακτηριστικά των ρευστών, τις κατηγορίες και μορφές ροής και τις μεθόδους ανάλυσης της ροής γενικώς. Αναλύεται η διαδικασία και οι χρησιμοποιούμενοι μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων.

1.1 Βασικές έννοιες και στοιχεία Μηχανικής των Ρευστών

1.1.1 Βασικά χαρακτηριστικά των ρευστών

- **Ρευστό σωματίδιο:** Ο στοιχειώδης όγκος dU ρευστού ο οποίος είναι αρκετά μεγαλύτερος από έναν ελάχιστο όγκο ($\min dU = 10^{-9} \text{ m}^3$), ώστε να περιλαμβάνει ένα ικανό και περίπου σταθερό αριθμό μορίων.
- **Πυκνότητα $\rho = \text{Μάζα} / \text{Όγκος}$**
 - ο Διάσταση - μονάδες $[\rho] \rightarrow [M / L^3]: \text{kg} / \text{m}^3, \text{gr} / \text{cm}^3$
 - ο Η πυκνότητα ενός ρευστού εξαρτάται από την πίεση και τη θερμοκρασία του.
 - ο Η πυκνότητα ενός υγρού είναι σχετικά σταθερή. Η πυκνότητα του νερού είναι περίπου ίση με $1000 \text{ kg} / \text{m}^3$ και όταν αυξήσουμε την πίεση 220 φορές η πυκνότητα αυτή θα αυξηθεί μόνο κατά περίπου 1%.
 - ο Η πυκνότητα των υγρών είναι περίπου τρεις τάξεις μεγαλύτερη της πυκνότητας των αερίων $\rightarrow$ Στην ελεύθερη επιφάνεια ενός αγωγού η παρουσία του υπερκείμενου ρευστού <αέρα> έχει μικρή έως αμελητέα επίδραση.
- **Ειδικό βάρος $\gamma = \text{Βάρος} / \text{Όγκος}$**
 - ο Διάσταση - μονάδες $[\gamma] \rightarrow [F / L^3]: \text{t} / \text{m}^3, \text{kg}^* / \text{m}^3, \text{kN} / \text{m}^3, \text{N} / \text{m}^3$
 - ο $\gamma = \rho \cdot g$, όπου g : επιτάχυνση της βαρύτητας **9,81 m / s²**
 - ο Προσοχή! Πυκνότητα και Ειδικό βάρος έχουν την ίδια αριθμητική τιμή σε διαφορετικά συστήματα: Για το νερό
 - Πυκνότητα ρ : περίπου $1.000 \text{ kg} / \text{m}^3$
 - Ειδικό βάρος γ : περίπου $1 \text{ t} / \text{m}^3 = 1.000 \text{ kg}^* / \text{m}^3 = 9,81 \text{ kN} / \text{m}^3$
- **Πίεση $p = \text{Δύναμη (κάθετη)} / \text{Επιφάνεια}$**
 - ο Διάσταση - μονάδες $[p] \rightarrow [F / L^2]: \text{t} / \text{m}^2, \text{kg}^* / \text{m}^2, \text{N} / \text{m}^2 (= \text{Pa})$
 - ο Είναι η κάθετη – θλιπτική – τάση η οποία προέρχεται από την αντίστοιχη δύναμη, την οποία το ρευστό ασκεί στην επιφάνεια στοιχειώδους όγκου.
 - ο Είναι βαθμωτό μέγεθος το οποίο προέρχεται από διανυσματικό μέγεθος.
 - ο Συνήθως ορίζουμε, για λόγους ευκολίας την ατμοσφαιρική πίεση ως σημείο αναφοράς με τιμή μηδέν και μετράμε τη σχετική πίεση ως διαφορά της απόλυτης και της ατμοσφαιρικής: $p_{\text{σχετ}} = p_{\text{απολ}} - p_{\text{ατμοσφ}}$
Αυτό οδηγεί λογιστικά και σε αρνητικές τιμές της σχετικής πίεσης: υποπίεση.
 - ο Όταν πραγματοποιείται εξάτμιση του νερού σε ένα κλειστό χώρο, όπως π.χ. σε ένα τμήμα σωλήνα με ροή νερού υπό πίεση, τότε η πίεση από τα μόρια των υδρατμών καλείται **πίεση υδρατμών: p_v** . Στην περίπτωση αυτή η συνέχεια της ροής διακόπτεται (σπηλαίωση) και το ρευστό δεν είναι πλέον ένα συνεχές μέσο. Το φαινόμενο είναι ανεπιθύμητο και εις το επόμενο εξάμηνο (Εφαρμοσμένη Υδραυλική) θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους ελέγχου και αποφυγής του.
Η p_v αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.

- **Συμπιεστότητα:** Είναι η ιδιότητα της μείωσης του όγκου του ρευστού όταν αυξάνεται η πίεση, η οποία ασκείται σε αυτό.
 - ο Χαρακτηρίζεται από το μέτρο ελαστικότητας, ή το (αντίστροφο) μέτρο συμπιεστότητας.
 - ο Το μέτρο ελαστικότητας του νερού είναι πολύ μεγάλο (περίπου 20.000 φορές μεγαλύτερο από του αέρα). Στα συνήθη προβλήματα το νερό (και γενικώς τα υγρά) θεωρείται ασυμπίεστο.
- **Δυναμική συνεκτικότητα (ή ιξώδες) μ :** Είναι η ιδιότητα των ρευστών να παραμορφώνονται συνεχώς υπό την επίδραση διατμητικών τάσεων.
 - ο Διάσταση – μονάδες [μ] $\rightarrow [(F \times T) / L^2]$: gr /cm.s (= poise)
 - ο $\tau = \mu \frac{du}{dy}$
 όπου τ : ασκούμενη διατμητική τάση
 και du / dy : ταχύτητα μεταβολής γωνιακής παραμόρφωσης
 - ο Ρευστό **Νευτώνιο** $\Rightarrow \mu = \text{σταθερά}$ (ανεξάρτητη των τ και du / dy)
 - ο Το νερό συμπεριφέρεται ως Νευτώνιο ρευστό.
 - ο Ιδεατό πλαστικό / Μη Νευτώνιο - θixotropicό / Μη Νευτώνιο – διασταλτικό
 - ο Ρευστό **Ιδεατό** $\Rightarrow$ **ασυμπίεστο + μηδενική συνεκτικότητα**
 - ο Η μ μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.
- **Κινηματική συνεκτικότητα $\nu = \text{Δυναμική συνεκτικότητα} / \text{Πυκνότητα}$**
 - ο Διάσταση – μονάδες [ν] $\rightarrow [L^2] / T$: cm² /s (= stoke)
 - ο Η ν μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.
- **Ταχύτητα ροής $V = \text{Απόσταση} / \text{Χρόνος}$**
 - ο Διάσταση – μονάδες [V] $\rightarrow [L] / T$: m/s
 - ο Ταχύτητα σε *μικροκλίμακα* (σημείο ή ρευστό σωματίδιο).
 - ο Αναλύεται σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (u, v, w), σε σφαιρικό σύστημα (r, θ, ϕ), ή σε κυλινδρικό σύστημα (r, θ, z) και τις αντίστοιχες απλοποιήσεις εάν η ροή θεωρείται δισδιάστατη.
 - ο Ταχύτητα σε *μακροκλίμακα* (διατομή ή τμήμα πεδίου ροής).
 Επηρεάζεται από τα στερεά όρια, συνήθως χρησιμοποιείται η μέση ταχύτητα με συνυπολογισμό ή αμελώντας κατά περίπτωση τους σχετικούς συντελεστές συνόρθωσης.
- **Επιτάχυνση $a = \text{Μεταβολή Ταχύτητας} / \text{Χρόνος}$**
 - ο Διάσταση – μονάδες [a] $\rightarrow [L] / T^2$: m/s²
 - ο Αντιστοίχως με την ταχύτητα ορίζεται σε *μικροκλίμακα* ή *μακροκλίμακα*.
- **Παροχή $Q = \text{Μεταβολή Όγκου}$ (ακριβέστερον μάζας) / **Χρόνος****
 - ο Διάσταση – μονάδες [Q] $\rightarrow [L^3 / T]$: m³/s (σε ομογενές υγρό)
 - ο Σε *μακροκλίμακα* συνδέεται άμεσα με την εκάστοτε διατομή ροής, της οποίας η γεωμετρία είναι πιθανόν σταθερή ή μεταβαλλόμενη.
- **Ενέργεια H :** Είναι η ικανότητα του ρευστού να παράγει έργο.
 Συνήθως λογίζουμε την ενέργεια της ροής ανά μονάδα βάρους του ρέοντος ρευστού και την καλούμε **ύψος ενέργειας**. Στην περίπτωση αυτή:
 - ο Διάσταση – μονάδες [H] $\rightarrow [L]$: m
 - ο Η ολική ενέργεια (ή το ύψος ενέργειας) αποτελείται από τις εξής συνιστώσες:
 - Δυναμική ενέργεια, λόγω θέσης (ύψους).

- Κινητική ενέργεια, λόγω ταχύτητας.
- Ενέργεια πίεσης, λόγω πίεσης.
- **Απώλειες Ενέργειας ή ύψους ενέργειας ΔH :** Προκαλούνται από διάφορους μηχανισμούς τους οποίους θα εξετάσουμε αναλυτικώς στη συνέχεια.
 - Διάσταση – μονάδες $[\Delta H] \rightarrow [L]$: m
 - Απώλειες δεν εμφανίζονται σε ιδεατό ρευστό.
- **Μεταβολές στην Ενέργεια ή στο ύψος ενέργειας ΔH_μ :** Προκαλούνται από τη λειτουργία υδραυλικών μηχανών και θα τις εξετάσουμε αναλυτικώς στη συνέχεια.
 - Διάσταση – μονάδες $[\Delta H_\mu] \rightarrow [L]$: m
 - Η λειτουργία αντλίας αυξάνει το ύψος ενέργειας της ροής.
 - Η λειτουργία στροβίλου μειώνει το ύψος ενέργειας της ροής.
 - Οι υδραυλικές μηχανές (αντλίες ή στροβίλοι) χαρακτηρίζονται από την ισχύ N , το μανομετρικό ύψος h_μ και το συντελεστή απόδοσης η . Στους υπολογισμούς υπεισέρχεται και το ειδικό βάρος του ρέοντος υγρού γ .
- **Μετατροπές συνήθως χρησιμοποιούμενων μονάδων:**
 - **1 t = 9,81 kN**
 - **1 kgr*/m² = 9,81 N /m² = 9,81 Pa**
 - **1 m³ = 1.000 lt** (λίτρα)
- **Συνήθειες ερωτήσεις - απορίες – παρανοήσεις**
 - Τι είναι τα: t , kgr*, gr*;
Είναι μονάδες δύναμης στο (παλαιό) Τεχνικό Σύστημα.
 - Τι είναι τα : t /m², kgr*/m², gr*/cm²;
Είναι μονάδες τάσης (πίεσης) στο (παλαιό) Τεχνικό Σύστημα.
 - Πως είναι δυνατό η πυκνότητα ενός υγρού και το ειδικό του βάρος να έχουν «την ίδια» τιμή, ενώ ισχύει: $\gamma = \rho \cdot g$;
Έχουν την **ίδια τιμή** σε **διαφορετικά Συστήματα** ☹*

1.1.2 Κατηγορίες και Μορφές ροής

- **Ροή Μόνιμη – Μη μόνιμη:** Χαρακτηρισμός ως προς κινηματική – χρονική μεταβολή.
- **Ροή Ομοιόμορφη – Ανομοιόμορφη:** Χαρακτηρισμός ως προς κινηματική – χωρική μεταβολή. Θα ασχοληθούμε κυρίως με την Ομοιόμορφη αλλά θα αναλύσουμε και την Ανομοιόμορφη ροή.
- **Ροή υπό Πίεση – Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια – Ελεύθερη Φλέβα**
 - Ροή υπό Πίεση: Σε αγωγούς με κλειστό γεωμετρικό σχήμα. Οι διατομές του ρέοντος ρευστού ευρίσκονται υπό πίεση (συνήθως μεγαλύτερη, αλλά πιθανώς και μικρότερη από την ατμοσφαιρική).
 - Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια: Πάντοτε σε αγωγούς με ανοιχτό γεωμετρικό σχήμα, αλλά ακόμη και σε αγωγούς με κλειστό! Στην ελεύθερη (άνω) επιφάνεια των διατομών του ρέοντος ρευστού η πίεση είναι ατμοσφαιρική.
 - Ελεύθερη Φλέβα (Ροή στην ατμόσφαιρα): Στην περίμετρο των διατομών του ρέοντος ρευστού η πίεση είναι ατμοσφαιρική.

- **Ροή Στρωτή – Турβώδης:** Χαρακτηρισμός από δυναμική άποψη - επίδραση συνεκτικότητας → αριθμός **Reynolds**.
 - Ο αριθμός Reynolds είναι ο λόγος των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις συνεκτικότητας και είναι αδιάστατος. Συμβολίζεται γενικώς ως **R_e** αλλά <εδώ> θα συμβολίζεται για λόγους απλότητας ως **R** προσέχοντας να μη γίνει σύγχυση με την υδραυλική ακτίνα, η οποία επίσης συμβολίζεται ως R .
 - Σε κάθε πεδίο προβλημάτων υπάρχει μια οριακή τιμή **R_{op}** του αριθμού Reynolds (ακριβέστερον: ένα εύρος τιμών περί την οριακή τιμή).
 - Για τιμές μικρότερες της **R_{op}** η ροή είναι στρωτή.
 - Για τιμές μεγαλύτερες της **R_{op}** η ροή είναι турβώδης.
 - Για αγωγούς κυκλικής διατομής σε ροή υπό πίεση το όριο μεταξύ στρωτής και турβώδους ροής είναι: **$R_{op} = 2.000$**
 - Τονίζεται ότι: Η ροή εμφανίζει αδράνεια στην αλλαγή κατάστασης
 - Εάν είναι στρωτή, παραμένει - για κάποιο πεδίο - στρωτή για τιμές $R > R_{op}$.
 - Εάν είναι турβώδης, παραμένει αντιστοίχως турβώδης για τιμές $R < R_{op}$.
- **Ροή Υποκρίσιμη – Κρίσιμη – Υπερκρίσιμη:** Χαρακτηρισμός από δυναμική άποψη - επίδραση βαρύτητας → αριθμός **Froude**.
 - Ο αριθμός Froude είναι ο λόγος των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις βαρύτητας και είναι αδιάστατος. Συμβολίζεται ως **F** .

1.1.3 Μέθοδοι ανάλυσης της ροής

- **Μονοδιάστατη ανάλυση** (ή *όγκου αναφοράς*, ή *όγκου ελέγχου*, ή *Euler*): Είναι η σημαντικότερη είτε αναφερόμαστε σε ροή υπό πίεση είτε σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια. Θα την χρησιμοποιήσουμε σε μεγάλη έκταση <εδώ> και εις τα μαθήματα των επομένων εξαμήνων.
- **Ρευστού σωματιδίου** (ή *Lagrange*): Είναι μέθοδος της Μηχανικής του Στερεού. Θα την χρησιμοποιήσουμε σε κάποια προβλήματα <εδώ>. Χαρακτηριστικό παράδειγμα οι ροές φλεβών στην ατμόσφαιρα.
- Διαφορική ανάλυση: Επιλύονται οι βασικές διαφορικές εξισώσεις ροής, με ολοκλήρωσή τους για τις συγκεκριμένες οριακές συνθήκες του προβλήματος, το οποίο εξετάζουμε. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η στρωτή ροή.
- Διαστατική ανάλυση: Δομείται ένα πειραματικό μοντέλο, το οποίο δοκιμάζεται και εξελίσσεται με εργαστηριακές (ή και σε φυσική κλίμακα) μετρήσεις.

1.2 Διαδικασία και μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων

1.2.1 Διαδικασία

Σε πολλά προβλήματα υπεισέρχονται εξισώσεις ή συστήματα εξισώσεων των οποίων ο χειρισμός ή /και μαθηματική επίλυση είναι αδύνατη ή μάλλον δυσχερής. Επομένως είναι απαραίτητη η χρήση αριθμητικών μεθόδων επίλυσης – σύγκλισης προς **αποδεκτή τιμή** με βάση την εξής διαδικασία:

- Επιλογή του **μεγέθους** του οποίου θα **χειριστούμε** τη **σύγκλιση** προς αποδεκτή τιμή. Προσοχή! Πολλές φορές είναι ευφυέστερη η επιλογή μεγέθους βοηθητικού – διάφορου από το μέγεθος του οποίου εις το πρόβλημα ζητείται η τιμή...
- Επιλογή του **μεγέθους** το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε ως **κριτήριο ελέγχου** της **σύγκλισης**. Το μέγεθος αυτό συνδέεται και με την επιλεγείσα αριθμητική μέθοδο.
- Εκτίμηση της **τιμής απόκλισης** από το ως άνω κριτήριο ελέγχου, η οποία θεωρείται επαρκής ως **όριο**, ώστε να **ικανοποιείται** - αμέσως ή εμμέσως - η **απαίτηση σύγκλισης** προς αποδεκτή τιμή.
- Επιλογή της **αριθμητικής μεθόδου** την οποία θα χρησιμοποιήσουμε ως **εργαλείο** της **σύγκλισης** προς αποδεκτή τιμή (βλ. 1.2.2).
- Εκτίμηση της **αρχικής τιμής** του ως άνω επιλεγέντος μεγέθους του οποίου θα **χειριστούμε** τη **σύγκλιση**.
- Εφαρμογή της **αριθμητικής μεθόδου** με **τιμή εκκίνησης** την ως άνω εκτιμηθείσα αρχική τιμή του μεγέθους του οποίου θα **χειριστούμε** τη **σύγκλιση** και πέρας την ικανοποίηση της ως άνω επιλεγείσας τιμής απόκλισης – ορίου.
- Τελικός προσδιορισμός και στρογγύλευση ☺ της **αποδεκτής τιμής** του **ζητούμενου μεγέθους** ☹. Η στρογγύλευση βασίζεται εις την ακρίβεια της μεθόδου, αλλά και συνολικώς της χρησιμοποιούμενης προσέγγισης και τεχνικών απαιτήσεων εφαρμογής της λύσης.

Εις τα αντίστοιχα κεφάλαια προτείνονται οι κατάλληλες μέθοδοι για τα αντίστοιχα προβλήματα. Η γενική μορφή των εδαφίων επίλυσης προβλημάτων περιλαμβάνει:

- Βήμα προς βήμα ανάλυση της διαδικασίας με παράθεση των χρησιμοποιούμενων σχέσεων, ορίων κ.λπ.
- Τυποποίηση της διαδικασίας με χρηστικό πινακίδιο υπολογισμών.
- Διάγραμμα ροής της διαδικασίας.

1.2.2 Μέθοδοι

Είναι *προφανές* ότι η **κατάλληλη** μέθοδος, πρέπει να εξασφαλίζει την **ταχύτερη** δυνατή **σύγκλιση** με το **μικρότερο** δυνατό **όγκο πράξεων**, άρα και μικρότερη δυνατή πιθανότητα λάθους!

Οι **άριστες μέθοδοι** επιτρέπουν την ευχερή **εποπτεία** (τουλάχιστον) της **τάξης μεγέθους** των ενδιάμεσων τιμών και διαθέτουν ασφαλιστικές **δικλείδες ελέγχου**

σε κάποια στάδια, ώστε να γίνονται **ορατά** και αντιληπτά εγκαίρως **λάθη** υπολογισμού και να λαμβάνονται **διορθωτικές** ενέργειες.

Όσες χρησιμοποιήσουμε <εδώ> κατατάσσονται σε έξι βασικές κατηγορίες:

- Αριθμητικές - προσεγγιστικές μορφές πεπλεγμένων εξισώσεων
 - Η πεπλεγμένη μορφή αντικαθίσταται από προσεγγιστική – εύχρηστη μορφή, η οποία ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια προσέγγισης μόνο σε κάποιο προκαθορισμένο πεδίο τιμών μιας ή περισσότερων μεταβλητών.
- Επίλυση πεπλεγμένων εξισώσεων με χρήση πινάκων ή γραφημάτων
 - Η πεπλεγμένη μορφή έχει επιλυθεί σε πυκνά διαστήματα μεταβολής των τιμών σταθερών παραγόντων ή έχει αναπαρασταθεί σε γράφημα, όπου αναζητείται η τιμή του ζητουμένου μεγέθους.
- Μέθοδος διχοτόμησης
 - Είναι η **απλούστερη** και **σχετικώς ασφαλέστερη** μέθοδος. Προσφέρει ικανοποιητική εποπτεία της τάξης μεγέθους των διαδοχικών τιμών του χειριζόμενου μεγέθους και της πορείας σύγκλισης.
 - Απαιτείται όμως η εκτίμηση **δύο** και όχι μιας **αρχικών τιμών**.
 - Συνήθως οδηγεί σε **αργή** σύγκλιση (όγκος πράξεων κ.λπ.)
 - Τα δύο αυτά μειονεκτήματα αντιμετωπίζονται με υβριδικές - εμπειρικές προσεγγίσεις προσδιορισμού της δεύτερης τιμής και υβριδικούς τρόπους επιτάχυνσης: γραμμική παρεμβολή (ή προέκταση) αντί της διχοτόμησης.
 - Στην περίπτωση αυτή όμως έχουμε εισέλθει πλέον εις το πεδίο της επόμενης μεθόδου...
- Μέθοδοι α' τάξεως (τύπου *sécante*)
 - Χαρακτηρίζονται από:
 - Τη σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων του **μεγέθους** του οποίου **χειριζόμαστε** τη **σύγκλιση** με το **μέγεθος** το οποίο χρησιμοποιούμε ως **κριτήριο ελέγχου** της **σύγκλισης**.
 - Επομένως, η σύγκριση των **διαδοχικών τιμών απόκλισης** γίνεται με βάση **όριο** το οποίο **συνδέεται** με το ως άνω **σταθερό μέγεθος ελέγχου** της **σύγκλισης**.
 - Η εκτίμηση της **δεύτερης τιμής** γίνεται με υβριδικές - εμπειρικές προσεγγίσεις με βάση την **αρχική τιμή** και την **απόκλιση** της από το **όριο**.
 - Συνήθως οι **επόμενες** - διαδοχικές **τιμές** προκύπτουν από υβριδικούς τρόπους - **συντελεστές διόρθωσης**, με τη σειρά τους βασισμένους στην **προηγούμενη τιμή** και την **απόκλιση** της από το **όριο**.

- Μέθοδοι β' τάξεως (τύπου Newton - Raphson)
 - Χαρακτηρίζονται από:
 - Τη σύγκριση των διαδοχικών αριθμητικών αποτελεσμάτων του **μεγέθους** του οποίου **χειριζόμαστε** τη **σύγκλιση**. Το **μέγεθος** το οποίο χρησιμοποιούμε ως **κριτήριο ελέγχου** της **σύγκλισης** έχει **ενσωματωθεί** στον **αλγόριθμο**.
 - Επομένως, η σύγκριση των **διαδοχικών τιμών απόκλισης** γίνεται με βάση **όριο**, το οποίο **συνδέεται** με αυτές καθαυτές τις ως άνω **διαδοχικές τιμές απόκλισης**.
 - Δεν υπάρχει ανάγκη εκτίμησης της **δεύτερης τιμής**, αυτή γίνεται όπως και όλες οι **επόμενες** προκύπτει από τον **αλγόριθμο**.
 - Οι μέθοδοι *β' τάξεως* απαιτούν προσεκτικό χειρισμό, διότι **δεν** οδηγούν **πάντοτε** σε **σύγκλιση**. Όσες προτείνονται από το γράφοντα έχουν περάσει εξαντλητικές δοκιμές και μπορείτε να τις εμπιστευθείτε.
- Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης (τύπου Simpson)
 - Εφαρμόζεται όταν η ολοκλήρωση διαφορικής εξίσωσης είναι μαθηματικώς αδύνατη ή δυνατή αλλά *δυσχερής*.

1.3 Ερωτήσεις κατανόησης

1.3.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Η δυναμική συνεκτικότητα μ είναι μια ιδιότητα του ρευστού, η οποία:
	Εκφράζει την «αντίστασή» του στην επιβολή διατμητικής τάσης
	Εξαρτάται από την πίεση p και τη θερμοκρασία T
	Όταν σε ένα ρευστό παραμένει σταθερά ανεξάρτητη της ασκούμενης διατμητικής τάσης και της αντίστοιχης μεταβολής της γωνιακής παραμόρφωσης, τότε το ρευστό καλείται νευτώνειο
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η κινηματική συνεκτικότητα ν:
	Ταυτίζεται με τη δυναμική συνεκτικότητα μ , όταν το ρευστό κινείται
✓	Ορίζεται ως ο λόγος της δυναμικής συνεκτικότητας προς την πυκνότητα
	Είναι ανεξάρτητη από την πίεση p και τη θερμοκρασία T
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα όλων των ρευστών :
	Έχουν σταθερή πυκνότητα
	Είναι ασυμπίεστα
✓	«Ρέουν», Δηλαδή παραμορφώνονται συνεχώς υπό την επίδραση εφαπτομενικής δύναμης ανεξαρτήτως από το μέγεθος αυτής
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των Νευτώνιων ρευστών:
✓	Έχουν σταθερή δυναμική συνεκτικότητα
	Έχουν σταθερό μέτρο ελαστικότητας
	Έχουν σταθερή κινηματική συνεκτικότητα
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των Ιδεατών ρευστών:
	Είναι Νευτώνια
	Είναι ασυμπίεστα
	Έχουν μηδενική δυναμική συνεκτικότητα
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Το νερό «βράζει», δηλαδή μετατρέπεται από υγρή σε αέρια κατάσταση:
	Στους 180 °F (Φαρενάϊτ)
	Στους 100 °C (Κελσίου)
	Στους 120 °K (Κέλβιν)
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

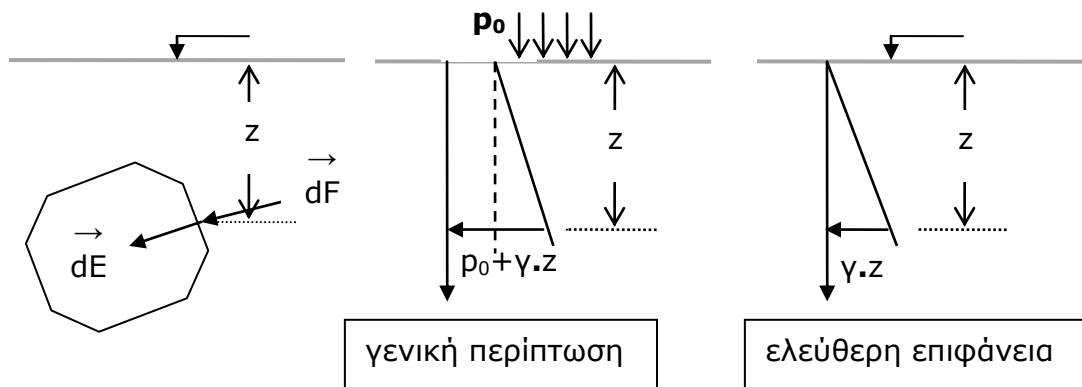
2. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

Η Υδροστατική αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ της Μηχανικής των Ρευστών και της Μηχανικής των Στερεών. Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες οι οποίες αφορούν σε ασυμπίεστα ρευστά. Δίδονται πληροφορίες για την ιδιαίτερη μορφή των δράσεων από ρευστά πάνω σε στερεούς φορείς, των οποίων η επίλυση ακολουθεί στη συνέχεια ήδη γνωστές μεθόδους, οι οποίες εξειδικεύονται, ώστε να διευκολύνεται η επίλυση, συνδυάζοντας την ιδιαίτερη μορφή των δράσεων με ιδιαίτερες μορφές στερεών φορέων. Τεκμηριώνεται θεωρητικά η λειτουργία οργάνων μέτρησης, των οποίων η χρήση αναδεικνύεται σε επόμενα κεφάλαια.

2.1 Βασικές έννοιες

2.1.1 Ομογενές ασυμπίεστο υγρό

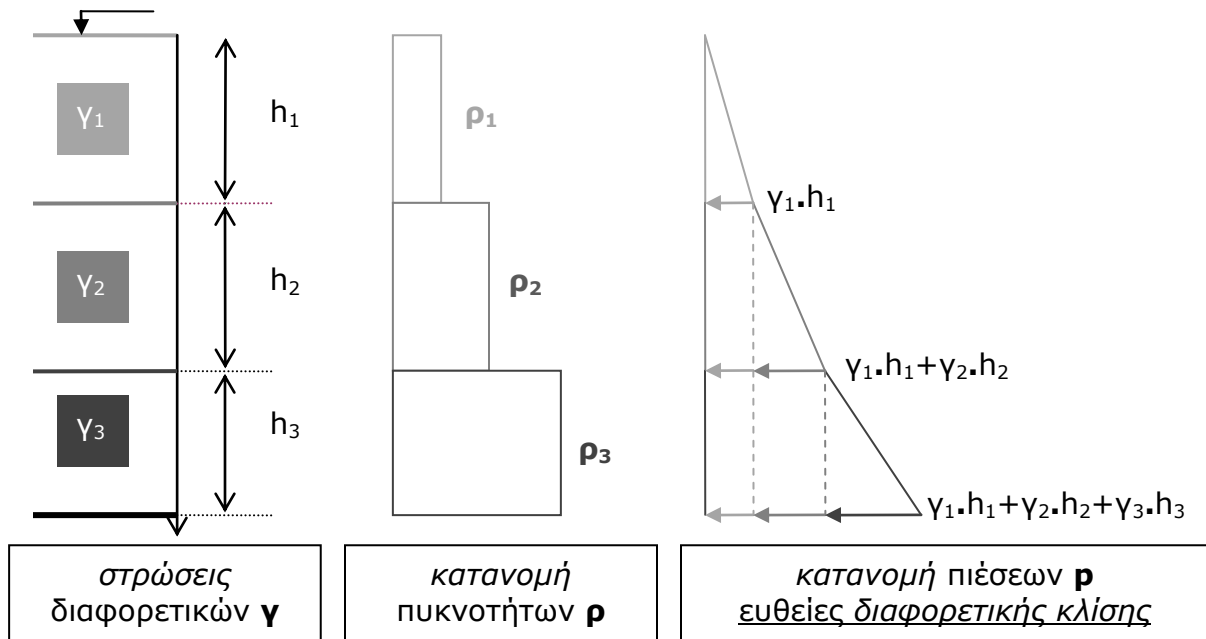
- Η επιφάνεια ενός σώματος βυθισμένου σε ομογενές υγρό, το οποίο ηρεμεί, δέχεται **δυνάμεις**, οι οποίες προέρχονται από **υδροστατικές πιέσεις**.
- Σε ένα διαφορικό στοιχείο επιφάνειας dE η δύναμη είναι dF και ενεργεί κατά την διεύθυνση του διανύσματος της επιφάνειας: **προς το εσωτερικό του σώματος**.



- $\gamma = \rho \cdot g$ (1) και $p_z = p_0 + \gamma \cdot z$ (2)
- $d\vec{F} = p_z \cdot d\vec{E} = (p_0 + \gamma \cdot z) \cdot d\vec{E}$ (3) και $\vec{F} = \int d\vec{F}$ (4)
 - **p**: συνολική (απόλυτη) πίεση
 - **p₀**: υπερκείμενη πίεση (στην επιφάνεια του υγρού)
 - **ρ**: πυκνότητα του ομογενούς υγρού (σταθερή, ανεξάρτητη του βάθους)
 - **γ**: ειδικό βάρος του ομογενούς υγρού (σταθερό, ανεξάρτητο του βάθους)
 - **z**: βάθος (κατακόρυφο) του στοιχείου dE από την επιφάνεια
 - **F**: συνολική δύναμη από υδροστατική πίεση
- Εάν το υγρό έχει **ελεύθερη επιφάνεια**, τότε **p₀** είναι η **ατμοσφαιρική πίεση** την οποία συνήθως λαμβάνουμε ως **πίεση αναφοράς**, δηλαδή συμβατικά η τιμή της είναι **μηδέν**.

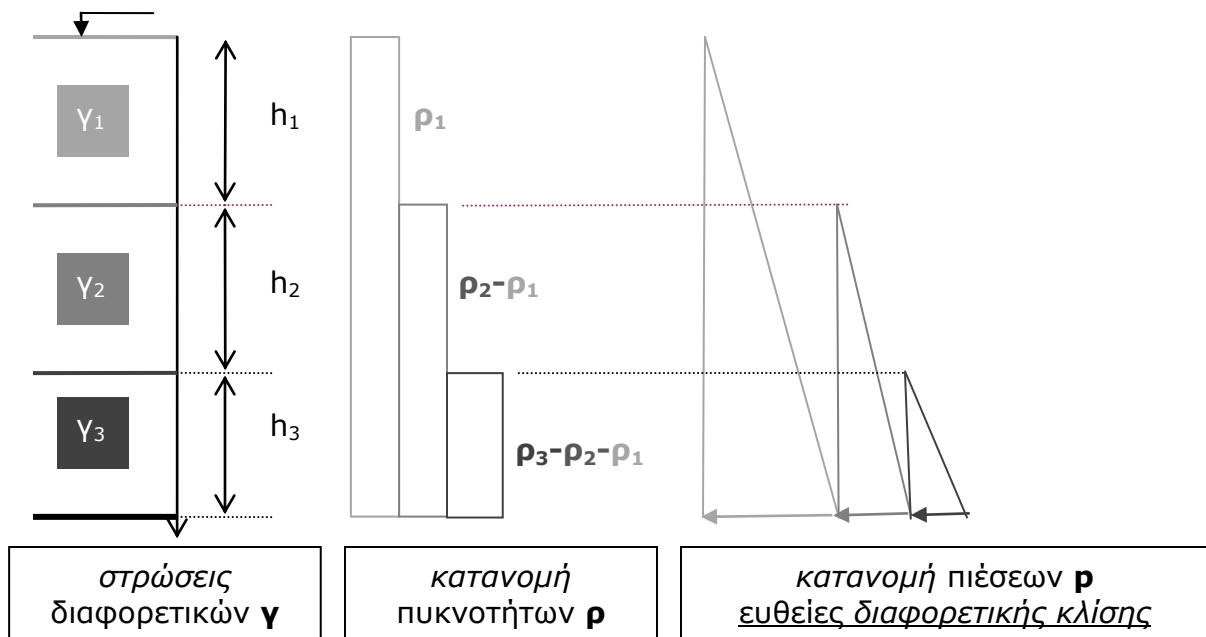
2.1.2 Μη ομογενές ασυμπίεστο υγρό

- **Διακριτές στρώσεις με διαφορετική πυκνότητα** → Στρωματοποιημένο υγρό

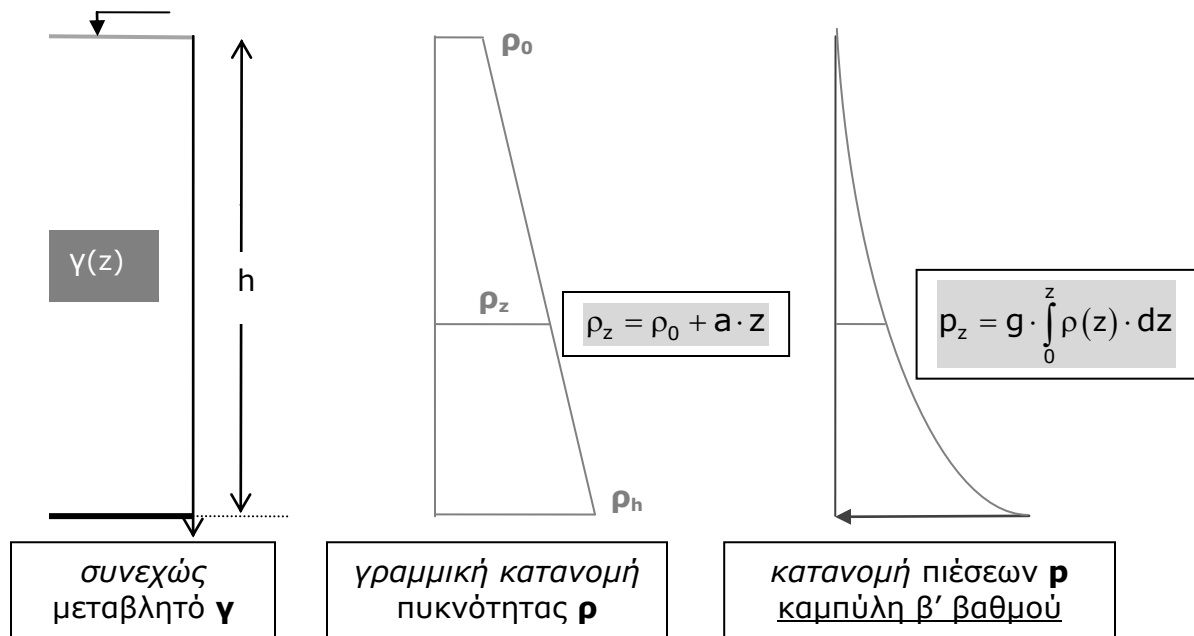


Εναλλακτικός τρόπος χάραξης του διαγράμματος των πιέσεων

Θεωρούμε την πυκνότητα της ανώτερης στρώσης ως ενιαία πυκνότητα του υγρού σε όλο το βάθος και προσδιορίζουμε τις πυκνότητες των υπολοίπων στρώσεων ως πυκνότητες υποθετικών υγρών.



- **Συνεχής μεταβολή της πυκνότητας, συνήθως γραμμική**



- $\gamma_z = g \cdot \left(\rho_0 + \frac{\rho_h - \rho_0}{h} \cdot z \right)$ (5) και $p_z = g \cdot \left(\rho_0 + \frac{(\rho_h - \rho_0) \cdot z}{2 \cdot h} \right) \cdot z$ (6)

- $d\vec{F} = g \cdot \left(\rho_0 + \frac{(\rho_h - \rho_0) \cdot z}{2 \cdot h} \right) \cdot z \cdot d\vec{E}$ (7)

$$F_z = b \cdot g \cdot \left(\rho_0 + \frac{(\rho_h - \rho_0) \cdot z}{3 \cdot h} \right) \cdot \frac{z^2}{2} \quad (7a) \text{ και } \vec{F} = \int d\vec{F} \quad (8)$$

- Σημείο εφαρμογής της F : Κέντρο Βάρους της παραβολής

$$z_c = \frac{h}{4} \cdot \frac{3 \cdot \rho_h + 5 \cdot \rho_0}{\rho_h + 2 \cdot \rho_0} \quad (7\beta)$$

- Ροπή στη βάση:

$$M_h = b \cdot \frac{g \cdot h^3}{24} (3 \cdot \rho_0 + \rho_h) \quad (7\gamma)$$

2.2 Κατευθύνσεις – μέθοδοι επίλυσης

2.2.1 Εισαγωγή

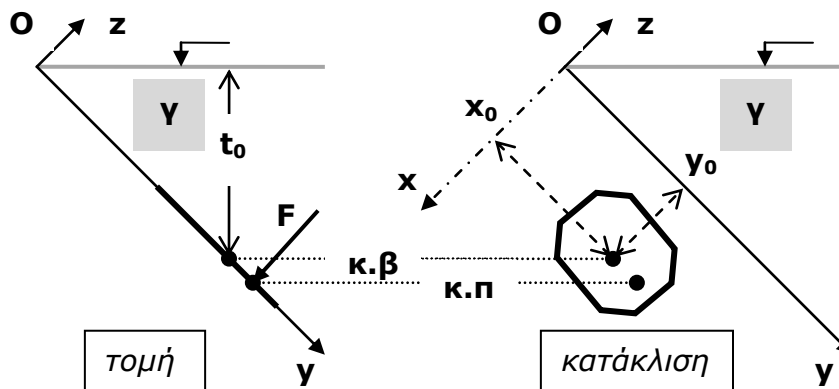
Υπάρχουν τρεις κατευθύνσεις – μέθοδοι – επίλυσης. Κάθε μία έχει το δικό της προνομιακό – ενδεδειγμένο – πεδίο εφαρμογής, αναλόγως της μορφής του φορέα όπου ασκούνται οι πιέσεις, χωρίς να σηματοδοτεί αυτό πλήρη οριοθέτηση: οι **μέθοδοι** έχουν **αλληλοεπικάλυψη**. Ας σημειωθεί, ότι η **ονοματολογία** των μεθόδων **δεν αντικατοπτρίζει την ουσία** τους!..

2.2.2 Αναλυτική μέθοδος

- Πεδίο εφαρμογής: (Προσοχή! <εδώ> παρουσιάζεται μόνο για ομογενές υγρό ☹)
 - Προνομιακό: **Επίπεδα σχήματα** (θυρίδες)
 - Γενικότερο: Επίπεδες επιφάνειες
- Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:
 - Συνολικώς ορισμένο σύστημα αξόνων** ☹
 - Αρχή** του **συστήματος** στην **επιφάνεια** του υγρού
 - Άξονες **x** και **y** στο **επίπεδο** του **φορέα**, στον άξονα **z** οι υδροστατικές **πιέσεις** και η **συνολική δύναμη F** από υδροστατικές πιέσεις.
- $F = \gamma \cdot t_o \cdot E^*$ (9) με σημείο εφαρμογής (κέντρο πίεσης):

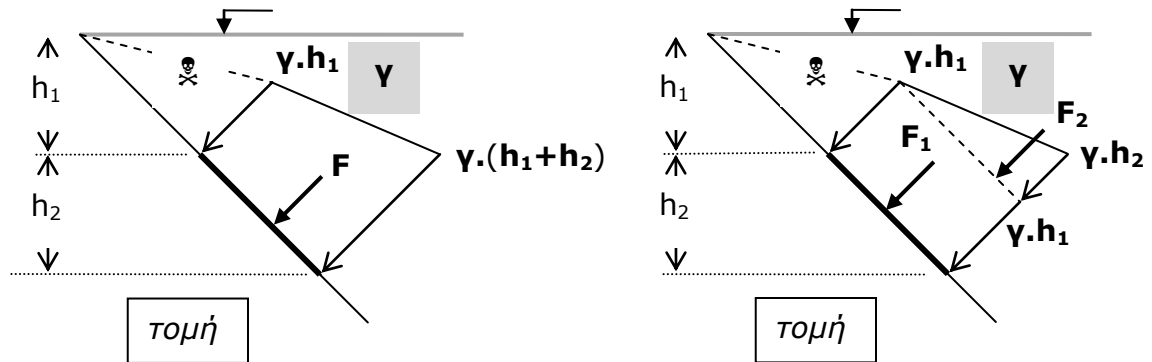
$$Y_{\pi} = Y_o + \frac{J_{xx}}{\gamma_o \cdot E^*} \quad (10) \quad \text{και} \quad X_{\pi} = X_o + \frac{J_{xy}}{\gamma_o \cdot E^*} \quad (10a) \quad \text{όπου:}$$

- t_o το βάθος, x_o και y_o οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του φορέα
- E^* : εμβαδό της βρεχόμενης επιφάνειας του φορέα
- X_{π} και Y_{π} οι συντεταγμένες του κέντρου πίεσης
- J_{xx} : ροπή αδρανείας του φορέα ως προς κεντροβαρικό άξονα παράλληλο του **x**
- J_{xy} : φυγόκεντρη ροπή αδρανείας του φορέα
(Η J_{xy} είναι μηδέν εάν ο **y** είναι άξονας συμμετρίας του φορέα!)
- Το κέντρο πίεσης είναι πάντοτε **βαθύτερα** από το κέντρο βάρους, διότι $J_{xx} > 0$



2.2.3 Γραφική μέθοδος

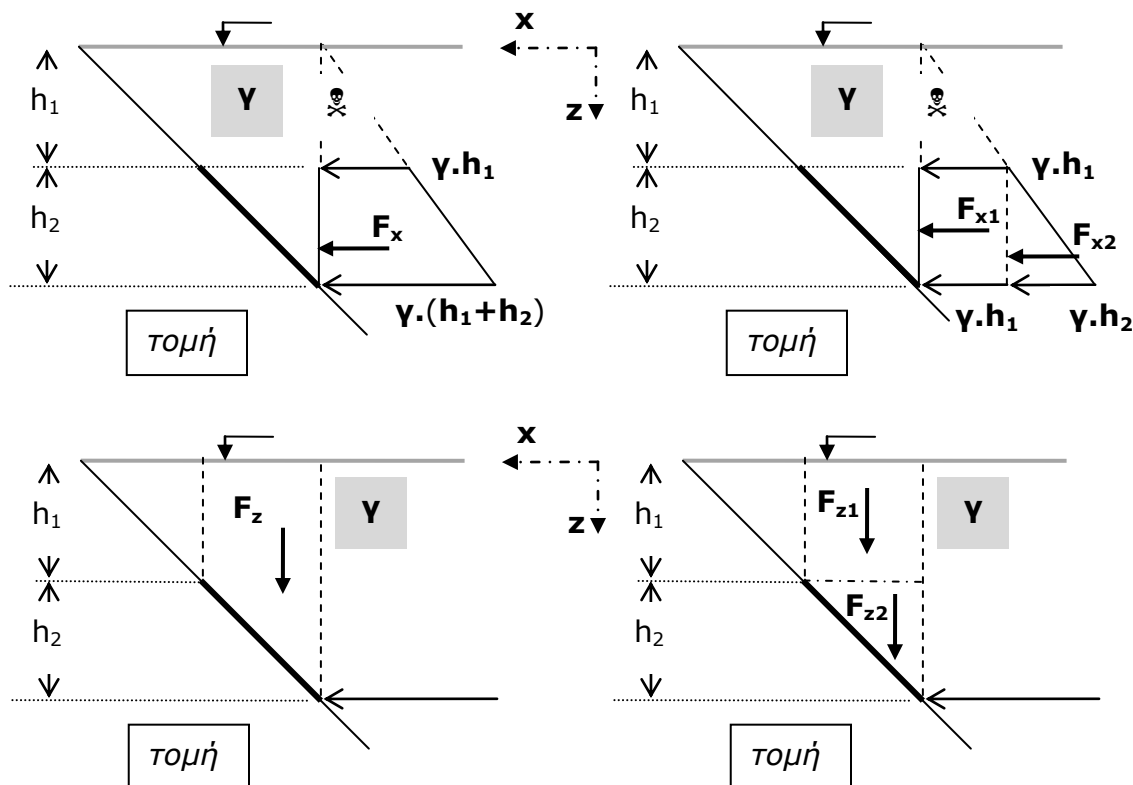
- Πεδίο εφαρμογής:
 - Προνομιακό: **Επιπεδογενείς επιφάνειες**
 - Γενικότερο: Επίπεδες επιφάνειες
- Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:
 - **Απουσία** ορισμένου **σύστηματος αξόνων**
 - Το **διάγραμμα** – πρίσμα **πιέσεων** **σχεδιάζεται γραφικά κάθετα** σε κάθε επιφάνεια του **φορέα**, με αρχή την ελεύθερη επιφάνεια
 - Όμως λαμβάνεται υπόψη **μόνο** το **τμήμα** του, το οποίο **βρέχει** τον φορέα ☹
- $F = b \cdot E$ (11) είναι η συνολική δύναμη **F** από υδροστατικές πιέσεις, κάθετη στο επίπεδο του φορέα, (ή κάθετη κατά τμήματα σε όλα τα επίπεδά του), με σημείο εφαρμογής το κέντρο βάρους του διαγράμματος – πρίσματος πιέσεων.
 - b: πλάτος της βρεχόμενης επιφάνειας του φορέα
 - E: εμβαδό του διαγράμματος πιέσεων



- Είναι **προτιμότερη** η ανάλυση του διαγράμματος πιέσεων σε επιμέρους απλούστερα διαγράμματα: **ορθογώνια – τρίγωνα**, των οποίων ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους και γενικώτερον ο λογιστικός χειρισμός είναι **ευχερέστερος!**
- $F = b \cdot \sum E_i$ (11a), όπου E_i : επιμέρους εμβαδά του διαγράμματος πιέσεων.

2.2.4 Γενική ή γενικευμένη μέθοδος

- Πεδίο εφαρμογής:
 - Προνομιακό: **Καμπύλες επιφάνειες**
 - Γενικότερο: Επίπεδες και επιπεδογενείς επιφάνειες
- Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:
 - **Χαλαρά ορισμένο σύστημα αξόνων**
 - Άξονας **z** κατακόρυφος
- $F_x = b_{yz} \cdot E_x$ (12) και $F_y = b_{xz} \cdot E_y$ (13) είναι οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης **F** από υδροστατικές πιέσεις, δηλαδή οι κάθετες προβολές της **F** στα επίπεδα **yz** και **xz** αντιστοίχως.
 Με σημεία εφαρμογής τα κέντρα βάρους των αντιστοίχων προβολών του διαγράμματος - πρίσματος πιέσεων.
 - b_{yz} και b_{xz} : πλάτη της προβολής της βρεχόμενης επιφάνειας του φορέα
 - E_x και E_y : εμβαδά των προβολών του διαγράμματος πιέσεων



- $F_z = \gamma \cdot U_z$ (14) είναι οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης **F** από υδροστατικές πιέσεις - κάθετη προβολή της **F** στο επίπεδο **xy**.
 Με σημείο εφαρμογής το κέντρο βάρους του όγκου U_z .

- Είναι **προτιμότερη** η ανάλυση των διαγράμματος πιέσεων και του όγκου U_z , σε επιμέρους απλούστερα διαγράμματα και όγκους, των οποίων ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους και γενικότερον ο λογιστικός χειρισμός είναι **ευχερέστερος**!

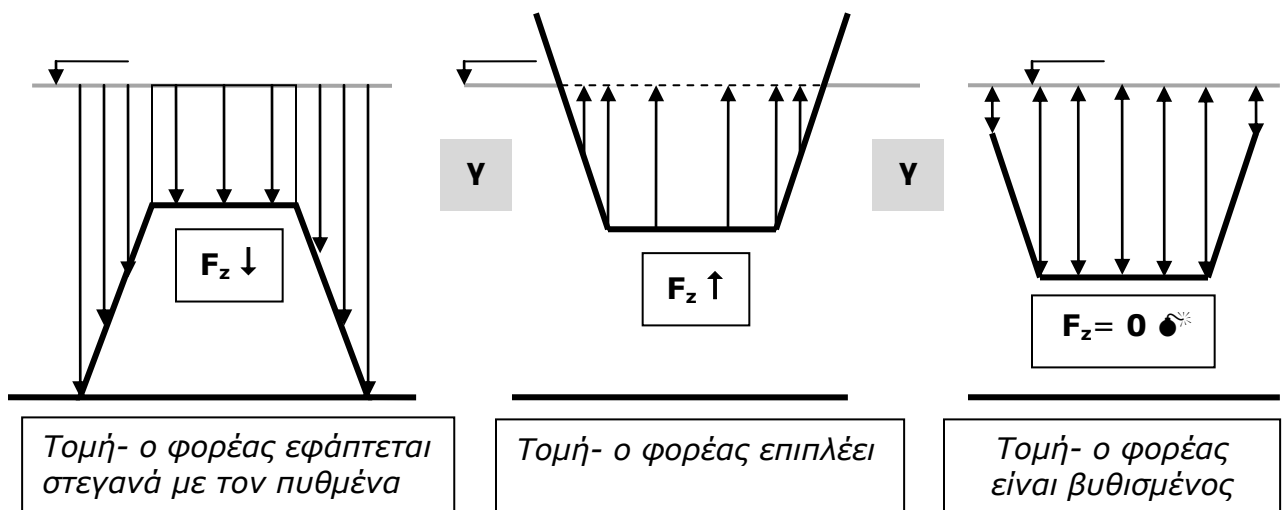
$$F_x = b \cdot \sum E_{ix} \quad (12a), \text{ όπου } E_{ix}: \text{ επιμέρους εμβαδά του διαγράμματος πιέσεων}$$

$$F_y = b \cdot \sum E_{iy} \quad (13a), \text{ όπου } E_{iy}: \text{ επιμέρους εμβαδά του διαγράμματος πιέσεων}$$

$$F_z = \gamma \cdot \sum U_{iz} \quad (14a), \text{ όπου } U_{iz}: \text{ επιμέρους όγκοι του όγκου } U_z$$

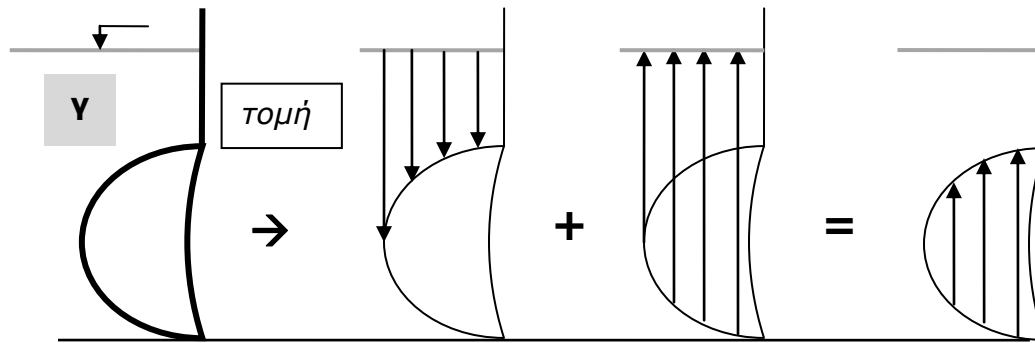
$$F = F_x + F_y + F_z \quad (15)$$

- Ο **όγκος U_z** παράγεται από:
 - τη **βρεχόμενη επιφάνεια** του *φορέα*
 - κατακόρυφες γενέτιρες** επαπτόμενες σε αυτή
 - την **ελεύθερη επιφάνεια** ή την **στάθμη** του *υγρού*, το οποίο την *βρέχει*
- Ο **όγκος U_z** είναι **λογιστικό μέγεθος**!
 - Στη σχέση (9): γ είναι το **ειδικό βάρος** του **υγρού** το οποίο **βρέχει** την επιφάνεια του *φορέα*!
 - ΟΧΙ** το ειδικό βάρος του υγρού το οποίο **περιέχεται** στον **όγκο U_z** ! ☹
 - Η **κατεύθυνση** της δύναμης F_z εξαρτάται από την καμπυλότητα της επιφάνειας του *φορέα* ... και την κοινή λογική! ☼

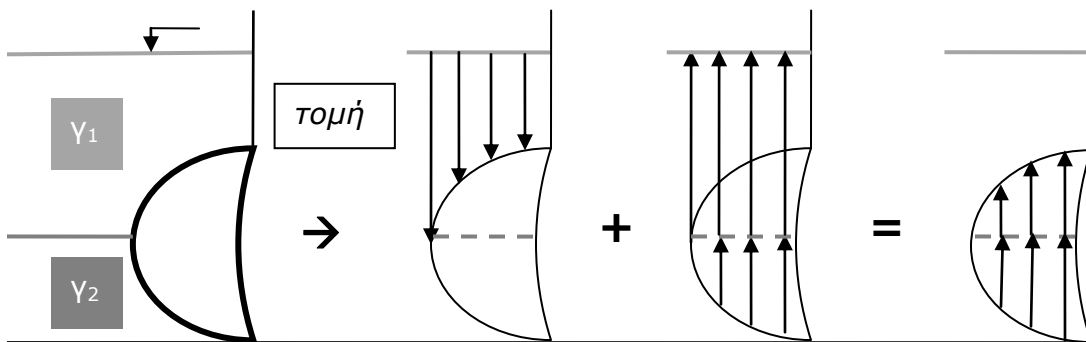


- Στην *αριστερή* περίπτωση του σχήματος, η επιφάνεια του *φορέα* **βρέχεται** από υγρό ειδικού βάρους γ και ο **όγκος U_z** **περιέχει** υγρό ειδικού βάρους γ → στις (14) ή (14a) χρησιμοποιούμε το γ .
- Στη *μεσαία* περίπτωση του σχήματος, η επιφάνεια του *φορέα* **βρέχεται** από υγρό ειδικού βάρους γ αλλά ο **όγκος U_z** **περιέχει αέρα** (κοπανιστό...) → στις (14) ή (14a) και πάλι χρησιμοποιούμε το γ !
- Στη *δεξιά* περίπτωση του σχήματος, οι **δύο επιφάνειες** του *φορέα* **βρέχονται** από υγρό ειδικού βάρους γ → αλλά οι δύο όγκοι U_z είναι **ίσοι** και οι δύο δυνάμεις **ίσες** και **αντίθετες**!

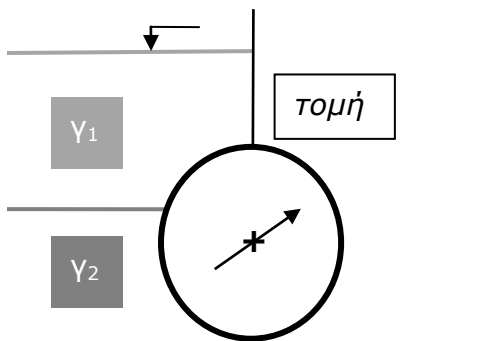
- Χρήσιμες επισημάνσεις



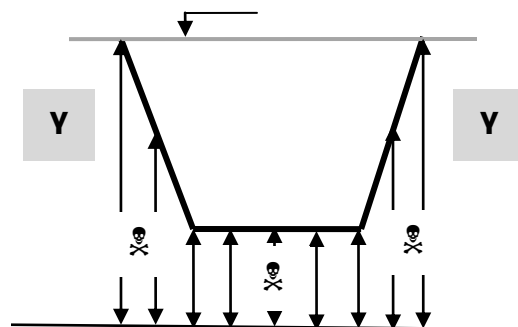
Σε **ομογενές** υγρό αναζητούμε – εφαρμόζουμε **αλληλοαναιρέση** όγκων $U_z \rightarrow$ **κατακόρυφων δυνάμεων**



Σε **στρωματοποιημένο** υγρό αναζητούμε – εφαρμόζουμε **αλληλοαναιρέση**, με προέκταση της **διεπιφάνειας** μέσα στον όγκο U_z και **διαφορετικά γ** !



Σε **κυλινδρικούς** και **σφαιρικούς φορείς**, η συνολική δύναμη από υδροστατικές πιέσεις, **διέρχεται από το κέντρο τους!**



Ο όγκος U_z **ΔΕΝ** έχει καμία **σχέση** με την **απόσταση** του φορέα από τον **πυθμένα της θάλασσας!** ☠

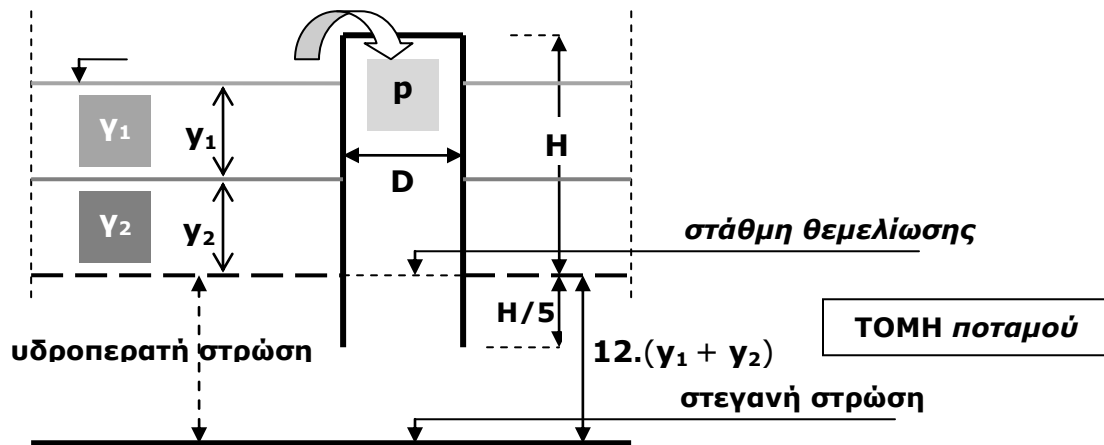
2.3 Εφαρμογές υπολογισμού

2.3.1 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 2.1.1 και 2.1.2

Πρόκειται να σκυροδετηθεί - σε συνθήκες στεγανότητας - η θεμελίωση μεσοβάθρου γέφυρας, σε ποταμό με νερό δύο στρώσεων (γ_1, γ_2), του οποίου ο πυθμένας έχει στρώση υδατοπερατού υλικού με πολύ μεγάλο βάθος: $12 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)$.

Προτείνετε την τοποθέτηση κυλινδρικού σιδηρότυπου κλειστού αεροστεγώς στο άνω μέρος και δημιουργία υπερπίεσης με τη χρήση αντλιών αέρος (βλ. σχήμα).

1. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της πίεσης p μέσα στον κύλινδρο;
2. Τι άλλο πρέπει να προδιαγράψετε (βλ. OHSAS 18001), για την προστασία της υγείας των εργαζομένων στη στάθμη θεμελίωσης;



1. $p = \gamma_1 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \cdot \gamma_2$

Οι υπόλοιπες διαστάσεις - πληροφορίες είναι **άσχετες** - **παραπλανητικές** ☹️

2. Η διαδικασία **αποσυμπίεσης** - από την υπερπίεση p έως την ατμοσφαιρική πίεση - επιβάλλεται να είναι **σταδιακή**! ⚠️

- Η ως άνω μέθοδος κατασκευής εφαρμόστηκε - για πρώτη φορά - στα μέσα του 19^{ου} αιώνα από τον διακεκριμένο Βρετανό - Πολιτικό Μηχανικό: **R. Stephenson** στην κατασκευή σιδηροδρομικής γέφυρας.

Οι εργαζόμενοι στην κατασκευή παρουσίασαν συμπτώματα μιας άγνωστης και μυστηριώδους νόσου, η οποία ονομάστηκε τότε : «νόσος του ποταμού».

Η Ιατρική επιστήμη - πολύ αργότερα - ανέλυσε τα αίτια της «νόσου» και έθεσε τις προδιαγραφές προφύλαξης. Είναι γνωστή πλέον ως «**νόσος των δυτών**»!

- Γενικός κανόνας:

«**Τα λάθη των Μηχανικών φράνονται, ενώ τα λάθη των Ιατρών θάπτονται**».

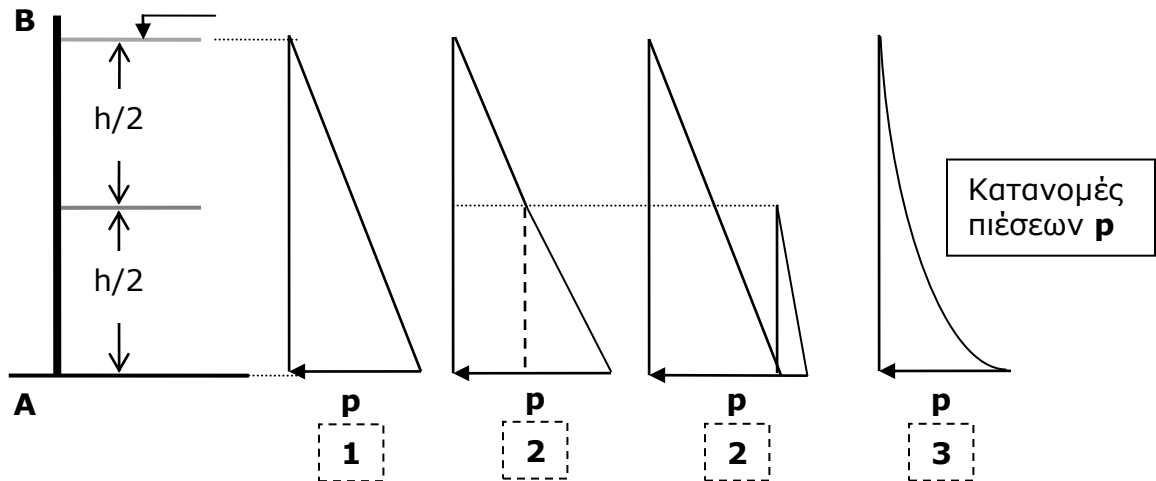
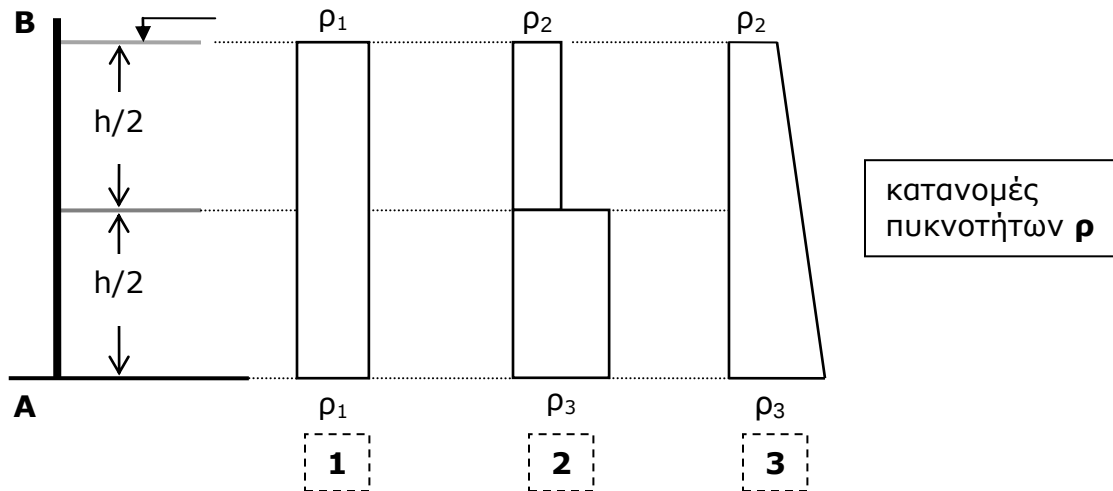
2.3.2 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.1.2

Σε μία λίμνη με βάθος $h = 20$ m σχεδιάζεται η κατασκευή κατακόρυφου φράγματος AB, το οποίο είναι πρόβολος με πάκτωση στο A.

Εξετάζονται τρεις περιπτώσεις κατανομής της πυκνότητας στο υγρό της λίμνης, όπου: $\rho_1 = 1.050 \text{ kgr / m}^3$, $\rho_2 = 1.000 \text{ kgr / m}^3$, $\rho_3 = 1.100 \text{ kgr / m}^3$ (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν η πίεση p στη βάση του φράγματος A, η συνολική δύναμη (ανά μέτρο πλάτους) F από υδροστατικές πιέσεις, η οποία ασκείται σε αυτό και η ροπή πάκτωσης (ανά μέτρο πλάτους) M για όλες τις περιπτώσεις.

Σημείωση: Η ροπή M προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τη δύναμη F με την απόσταση του κ.β. του πρίσματος πιέσεων από το σημείο A (μοχλοβραχίονας της δύναμης).



$$1. (1), (2) \rightarrow p = g \cdot \rho_1 \cdot h \rightarrow p = 21,00 \text{ t / m}^2 = 206,01 \text{ kN / m}^2$$

$$(4) \rightarrow F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \rho_1 \cdot h^2 \rightarrow F = 210,00 \text{ t / m} = 2.060,10 \text{ kN / m}$$

$$M = \frac{1}{6} \cdot g \cdot \rho_1 \cdot h^3 \rightarrow M = 1.400,0 \text{ tm / m} = 13.734,0 \text{ kNm / m}$$

$$2. (1), (2) \rightarrow p = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h}{2} + \frac{\rho_3 \cdot h}{2} \right) \rightarrow p = \mathbf{21,00 \text{ t / m}^2} = \mathbf{206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(4) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{8} + \frac{\rho_2 \cdot h^2}{4} + \frac{\rho_3 \cdot h^2}{8} \right) \rightarrow F = \mathbf{205,00 \text{ t / m}} = \mathbf{2.011,05 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{12} + \frac{\rho_2 \cdot h^3}{16} + \frac{\rho_3 \cdot h^3}{48} \right) \rightarrow M = \mathbf{1.350,0 \text{ tm / m}} = \mathbf{13.243,5 \text{ kNm / m}}$$

Εναλλακτικός τρόπος:

$$(1), (2) \rightarrow p = g \cdot \left(\rho_2 \cdot h + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h}{2} \right) \rightarrow p = \mathbf{21,00 \text{ t / m}^2} = \mathbf{206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(4) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{2} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^2}{8} \right) \rightarrow F = \mathbf{205,00 \text{ t / m}} = \mathbf{2.011,05 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{6} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^3}{48} \right) \rightarrow M = \mathbf{1.350,0 \text{ tm / m}} = \mathbf{13.243,5 \text{ kNm / m}}$$

$$3. (5), (6) \rightarrow p = g \cdot \left(\rho_2 \cdot h + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h}{2} \right) \rightarrow p = \mathbf{21,00 \text{ t / m}^2} = \mathbf{206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(8) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{2} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^2}{6} \right) \rightarrow F = \mathbf{206,67 \text{ t / m}} = \mathbf{2.027,40 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{6} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^3}{24} \right) \rightarrow M = \mathbf{1.366,67 \text{ tm / m}} = \mathbf{13.407,0 \text{ kNm / m}}$$

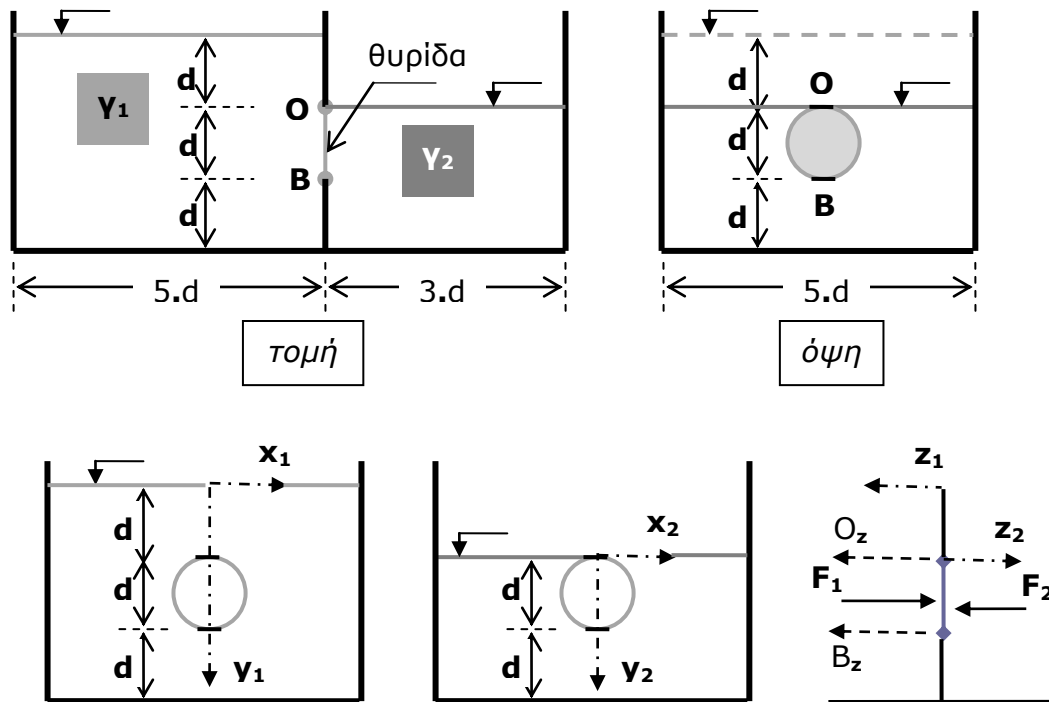
Επισημάνση: Παρότι – με τα αριθμητικά δεδομένα της άσκησης – η πίεση **p** στη βάση του φράγματος προκύπτει ίδια σε όλες τις περιπτώσεις, η συνολική δύναμη **F** και η ροπή πάκτωσης **M** είναι διαφορετικές σε κάθε περίπτωση!

2.3.3 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.2

Σε διθάλαμη δεξαμενή το διαχωριστικό τοίχωμα περιλαμβάνει αβαρκυκλική θυρίδα διαμέτρου d , η οποία στηρίζεται με άρθρωση στο **O** και απλή στήριξη στο **B**. Οι θάλαμοι περιέχουν υγρά διαφορετικού ειδικού βάρους (γ_1, γ_2) και στάθμης (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις των στηρίξεων.

Αριθμητική εφαρμογή: $d = 2,0 \text{ m}$, $\gamma_1 = 1,0 \text{ t/m}^3$, $\gamma_2 = 1,1 \text{ t/m}^3$.



Οι διαστάσεις των θαλάμων **δεν** επηρεάζουν τη **λύση**, είναι **παραπλανητικές** ☹*

Τα **δύο** - **διαφορετικά** ☹ συστήματα αξόνων είναι **ορισμένα** από τη μέθοδο

$$(9) \rightarrow F_1 = \gamma_1 \cdot \frac{3 \cdot d}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3 \cdot \gamma_1 \cdot \pi \cdot d^3}{8} \rightarrow \mathbf{F_1 = 9,424778 \text{ t} = 92,457 \text{ kN}}$$

$$(10) \rightarrow y_{\pi 1} = \frac{3 \cdot d}{2} + \frac{d}{24} \rightarrow e_{OF1} = \frac{d}{2} + \frac{d}{24} \rightarrow \mathbf{e_{OF1} = 1,083333 \text{ m}}$$

$$(9) \rightarrow F_2 = \gamma_2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\gamma_2 \cdot \pi \cdot d^3}{8} \rightarrow \mathbf{F_2 = 3,455752 \text{ t} = 33,901 \text{ kN}}$$

$$(10) \rightarrow y_{\pi 2} = \frac{d}{2} + \frac{d}{8} \rightarrow e_{OF2} = \frac{d}{2} + \frac{d}{8} \rightarrow \mathbf{e_{OF2} = 1,250 \text{ m}}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow B_z \cdot d - F_1 \cdot e_{OF1} + F_2 \cdot e_{OF2} = 0 \rightarrow \mathbf{B_z = 2,945243 \text{ t} = 28,893 \text{ kN}}$$

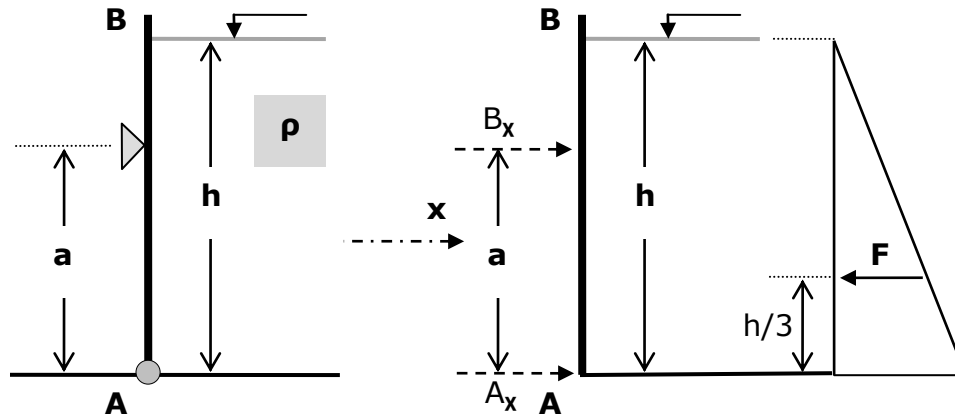
$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z - F_1 + F_2 = 0 \rightarrow \mathbf{O_z = 3,023783 \text{ t} = 29,663 \text{ kN}}$$

2.3.4 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.3

Σε μία λίμνη με βάθος **h** σχεδιάζεται η κατασκευή κατακόρυφου φράγματος AB με πλάτος **b**, το οποίο στηρίζεται με άρθρωση στο A και απλή στήριξη στο B. Η πυκνότητα της λίμνης είναι **ρ**.

Να υπολογιστεί το ύψος **a**, ώστε οι οριζόντιες αντιδράσεις των στηρίξεων να έχουν την ίδια τιμή, καθώς και η τιμή των αντιδράσεων (βλ. σχήμα).

Αριθμητική εφαρμογή: **h = 10 m, b = 25 m, ρ = 1.050 kgr / m³.**



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τις **αντιδράσεις**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στην επιφάνεια του φράγματος

$$(11a) \rightarrow F = \frac{\gamma \cdot b \cdot h^2}{2} \rightarrow F = \mathbf{1.312,50 \text{ t} = 12.875,625 \text{ kN}}$$

$$\text{και } e_{AF} = \frac{h}{3}, e_{BF} = a - \frac{h}{3}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_x \cdot a - F \cdot e_{AF} = 0 \rightarrow B_x = \frac{F \cdot h}{3 \cdot a}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow A_x \cdot a - F \cdot e_{BF} = 0 \rightarrow A_x = F \cdot \left(1 - \frac{h}{3 \cdot a}\right)$$

$$A_x = B_x = \frac{F}{2} \rightarrow a = \frac{2 \cdot h}{3} \rightarrow a = \mathbf{6,666667 \text{ m}} \text{ και } \mathbf{A_x = B_x = 656,25 \text{ t} = 6.437,81 \text{ kN}}$$

2.3.5 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.3

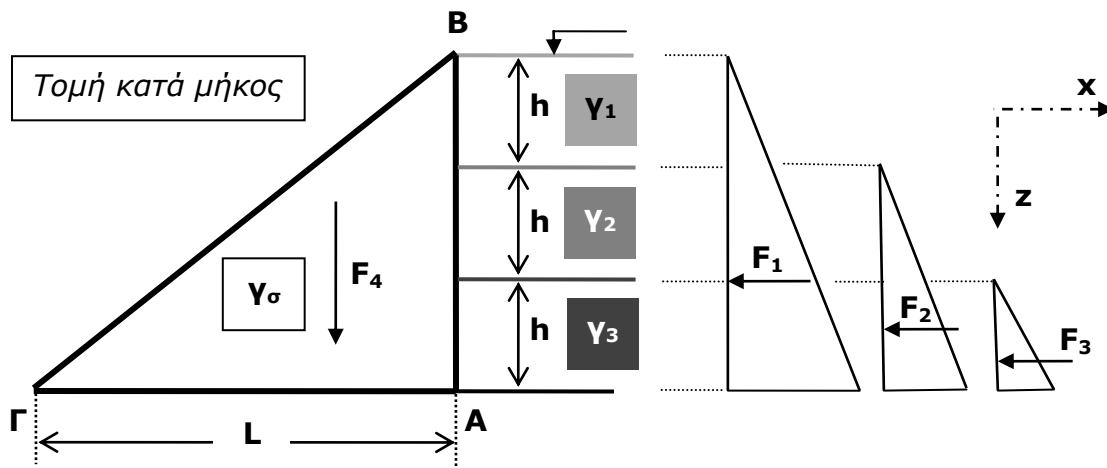
Σε ορθογωνική διατομή ποταμού με πλάτος **b** και βάθος **3.h** σχεδιάζεται η κατασκευή φράγματος βαρύτητας ΑΒΓ, τριγωνικής διατομής με μήκος **L**, από σκυρόδεμα ειδικού βάρους γ_σ .

Ο ανάντη του φράγματος ταμιευτήρας θα περιέχει τρεις στρώσεις υγρών με βάθη **h** και ειδικά βάρη γ_1 , γ_2 και γ_3 (βλ. σχήμα). Το έδαφος θεμελίωσης του φράγματος είναι στεγανό και έχει συντελεστή οριζόντιας τριβής **k**.

Να υπολογιστούν οι συντελεστές ασφαλείας:

1. Σε ολίσθηση C_1 : Κατακόρυφες δυνάμεις επί το **k** / Οριζόντιες δυνάμεις.
2. Σε ανατροπή (περί το σημείο Γ) C_2 : Ροπές ευσταθείας / Ροπές ανατροπής.

Αριθμητική εφαρμογή: **h= 5 m**, **b= 25 m**, **L= 30 m**, **k= 0,55**, $\gamma_\sigma= 2,50 \text{ t/m}^3$, $\gamma_1= 1,00 \text{ t/m}^3$, $\gamma_2= 1,05 \text{ t/m}^3$, $\gamma_3= 1,10 \text{ t/m}^3$.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από το **πρόβλημα**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στην επιφάνεια του φορέα με τον εναλλακτικός τρόπο

$$(11a) \rightarrow F_1 = \frac{9 \cdot \gamma_1 \cdot b \cdot h^2}{2} \rightarrow F_1 = 2.812,50 \text{ t} = 27.590,625 \text{ kN} \text{ και } e_{\Gamma F1} = h$$

$$(11a) \rightarrow F_2 = 2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot b \cdot h^2 \rightarrow F_2 = 62,50 \text{ t} = 613,125 \text{ kN} \text{ και } e_{\Gamma F2} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$(11a) \rightarrow F_3 = \frac{(\gamma_3 - \gamma_2) \cdot b \cdot h^2}{2} \rightarrow F_3 = 15,625 \text{ t} = 153,281 \text{ kN} \text{ και } e_{\Gamma F3} = \frac{h}{3}$$

$$F_4 = \frac{3 \cdot \gamma_\sigma \cdot b \cdot h \cdot L}{2} \rightarrow F_4 = 14.062,50 \text{ t} = 137.953,125 \text{ kN} \text{ και } e_{\Gamma F4} = \frac{2 \cdot L}{3}$$

$$\sum F_x = \sum_1^3 F \text{ και } \sum F_z = F_4 \rightarrow C_1 = \frac{3 \cdot k \cdot \gamma_\sigma}{9 \cdot \gamma_1 + 4 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2)} \cdot \frac{L}{h} \rightarrow C_1 = 2,67568$$

$$\sum M^- = \sum_1^3 M_F \text{ και } \sum M^+ = M_{F4} \rightarrow C_2 = \frac{6 \cdot \gamma_\sigma}{27 \cdot \gamma_1 + 8 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2)} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

$$\rightarrow C_2 = 19,672131$$

2.3.6 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.4

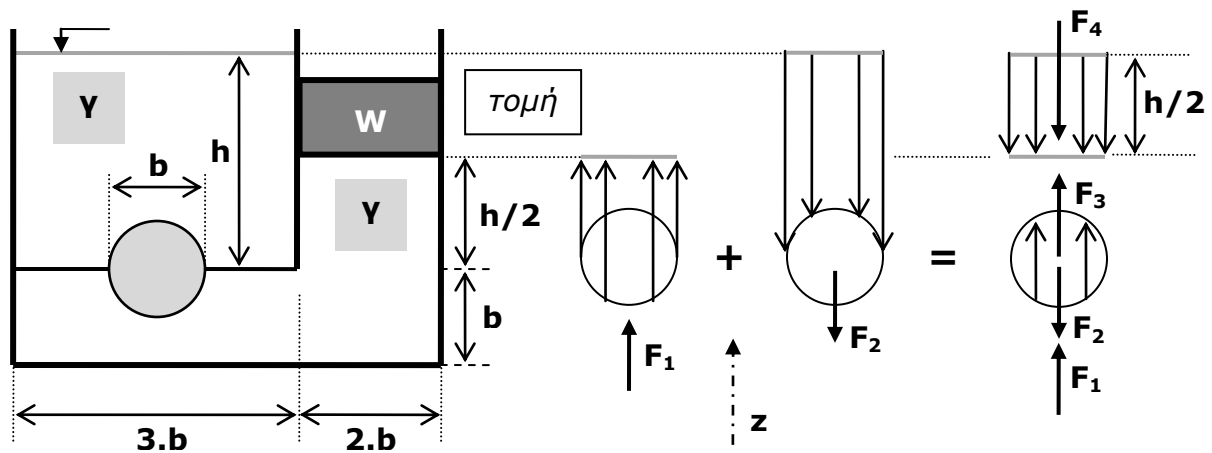
Διθάλαμη ορθογωνική δεξαμενή με συνολικό πλάτος **B** και μήκος **L** περιέχει υγρό ειδικού βάρους **γ** με βάθη **h** και **h/2**. Στον πρώτο θάλαμο υπάρχει οριζόντιο επίπεδο, το οποίο έχει άνοιγμα με πλάτος **b** και μήκος **L**, το οποίο φράζεται με κυλινδρικό πλωτήρα με διάμετρο **b**, μήκος **L** και ειδικό βάρος **γ***.

Ο πλωτήρας ισορροπεί και εξασφαλίζει τη στεγανότητα του ανοίγματος.

Στο δεύτερο θάλαμο υπάρχει έμβολο βάρους **W** με πλάτος **2.b** και μήκος **L** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί το βάρος **W**, ώστε ο πλωτήρας να ισορροπεί στη θέση αυτή.

Αριθμητική εφαρμογή: **B = 5.b**, **b = 1 m**, **h = 3 m**, **L = 3 m**,
γ = 1,00 t/m³, **γ* = 2,00 t/m³**.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τη **μέθοδο**

Κάποιες διαστάσεις **δεν** επηρεάζουν τη **λύση**, είναι **παραπλανητικές** ☹️

Οι οριζόντιες δυνάμεις αλληλοαναιρούνται!

Το έμβολο προκαλεί πίεση: $p_w = \frac{W}{2 \cdot b \cdot L}$, η οποία μεταφέρεται στον πλωτήρα!

$$F_1 = p_w \cdot b \cdot L = \frac{W}{2}$$

$$F_2 = \gamma^* \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot L \quad (\text{το βάρος του πλωτήρα})$$

$$(14) \rightarrow F_3 = \gamma \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot L$$

$$(14) \rightarrow F_4 = \gamma \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot L$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow W = (\gamma^* - \gamma) \cdot \frac{\pi \cdot b^2 \cdot L}{2} + \gamma \cdot b \cdot h \cdot L \rightarrow \mathbf{W = 13,712389 \text{ t} = 134,519 \text{ kN}}$$

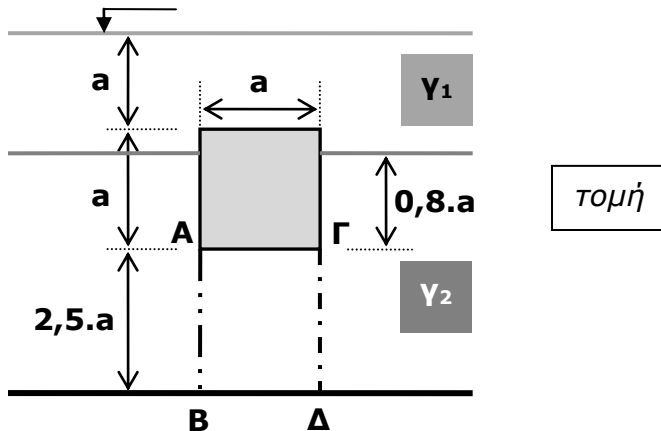
2.3.7 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.4

Αβαρές πρίσμα τετραγωνικής διατομής με πλευρά a και μήκος L έχει αγκυρωθεί στον πυθμένα λίμνης με δύο κατακόρυφα συρματόσχοινα AB και ΓΔ, τα οποία έχουν συνδεθεί συμμετρικά στο μέσο του μήκους του πρίσματος. Η λίμνη περιέχει δύο στρώσεις υγρού με ειδικά βάρη γ_1 και γ_2 . (βλ. σχήμα).

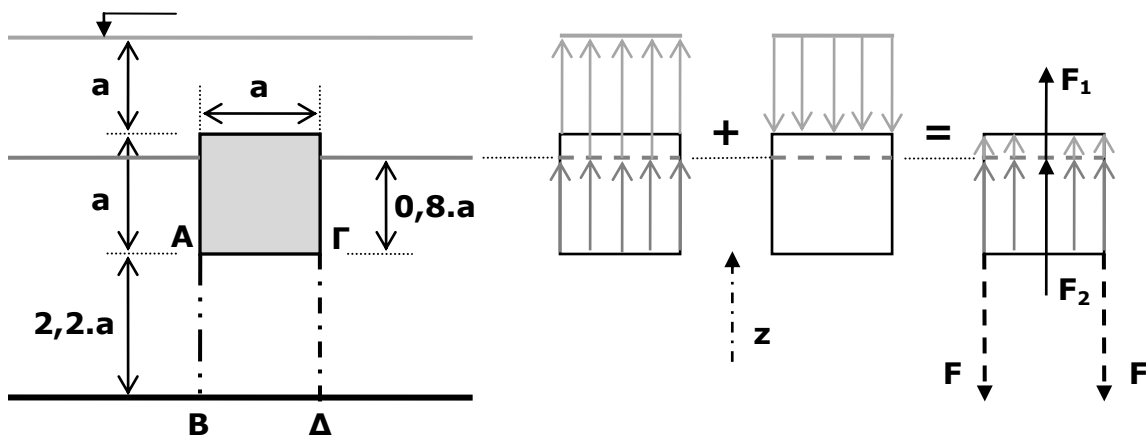
Να υπολογιστούν:

1. Η δύναμη F , την οποία αναλαμβάνει κάθε συρματόσχοινο.
2. Η δύναμη F^* , την οποία θα αναλάβει το συρματόσχοινο ΓΔ, εάν το συρματόσχοινο AB κοπεί.

Αριθμητική εφαρμογή: $a = 4,95 \text{ m}$, $L = 6,5 \text{ m}$, $\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$, $\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$.



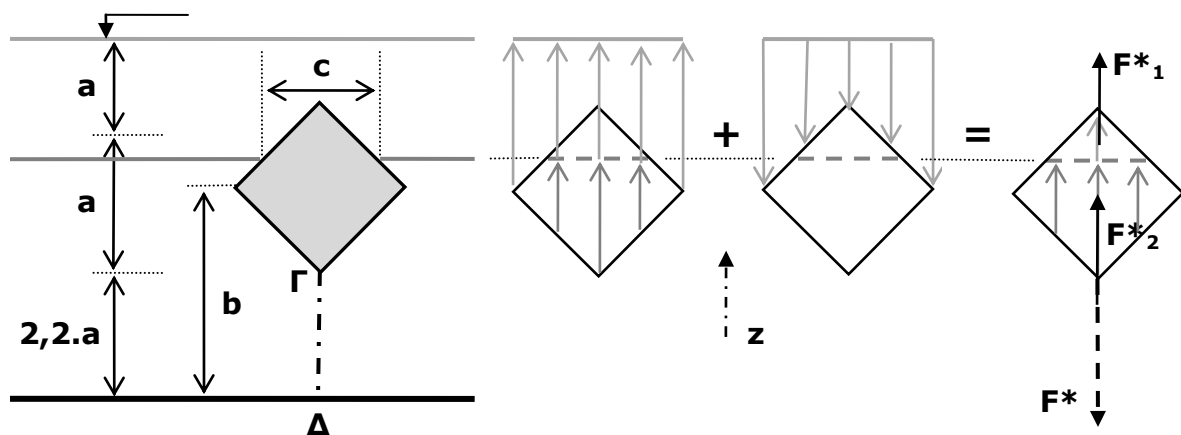
Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τη **μέθοδο**



1. Οι οριζόντιες δυνάμεις αλληλοαναιρούνται!

$$(14) \rightarrow F_1 = 0,2 \cdot \gamma_1 \cdot a^2 \cdot L \text{ και } F_2 = 0,8 \cdot \gamma_2 \cdot a^2 \cdot L$$

$$F = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{(0,2 \cdot \gamma_1 + 0,8 \cdot \gamma_2)}{2} \cdot a^2 \cdot L \rightarrow F = 86,003775 \text{ t} = 843,697 \text{ kN}$$



2. Οι οριζόντιες δυνάμεις αλληλοαναιρούνται!

$$b = \left(2,2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot a \text{ και } c = 2 \cdot (\sqrt{2} - 0,8) \cdot a$$

$$F^*_{*1} = \frac{1}{4} \cdot \gamma_1 \cdot c^2 \cdot L = (\sqrt{2} - 0,8)^2 \cdot \gamma_1 \cdot a^2 \cdot L \text{ και } F^*_{*2} = \left[1 - (\sqrt{2} - 0,8)^2 \right] \cdot \gamma_2 \cdot a^2 \cdot L$$

$$F^* = F^*_{*1} + F^*_{*2} = \left[\gamma_2 - (\sqrt{2} - 0,8)^2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \right] \cdot a^2 \cdot L$$

$$\rightarrow F^* = 169,184424 \text{ t} = 1.659,699 \text{ kN}$$

Επισήμανση: Η **F*** δεν είναι διπλάσια της **F**!

Η μετατόπιση του πρίσματος στη νέα θέση, προκάλεσε αλλαγή στους σχετικούς όγκους, άρα και στις σχετικές ανώσεις.

Εάν το υγρό ήταν ομογενές, όντως στη 2^η περίπτωση η αναλαμβανόμενη από το συρματόσχοινο δύναμη θα ήταν διπλάσια.

Υπό την προϋπόθεση όμως, ότι τα γεωμετρικά δεδομένα θα οδηγούσαν το πρίσμα σε πλήρη βύθιση ☹️

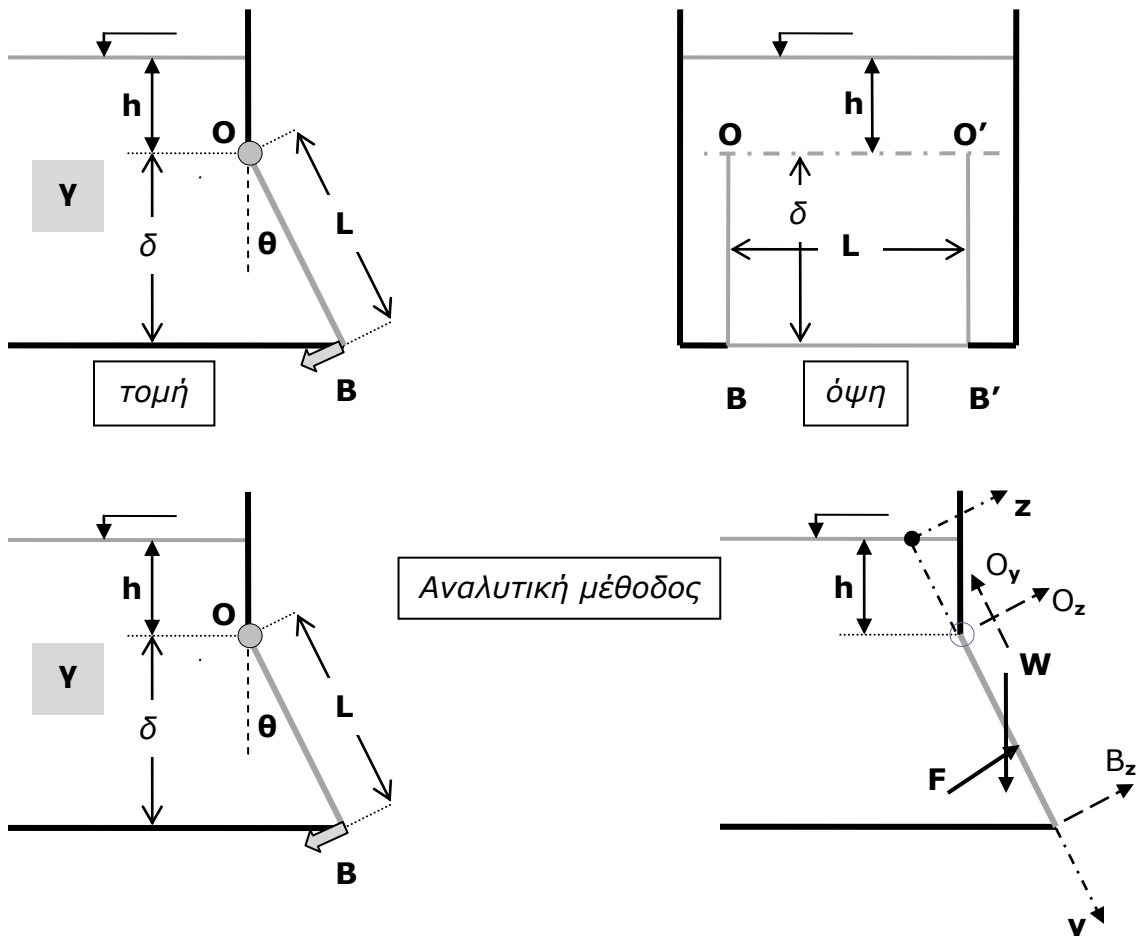
2.3.8 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 2.2.2, 2.2.3 και 2.2.4

Στο τοίχωμα δεξαμενής, η οποία περιέχει νερό, προβλέπεται τετραγωνική θυρίδα, με πλευρές μήκους L και βάρος w (ανά μονάδα επιφανείας). Το τοίχωμα έχει κλίση με γωνία θ και το βάθος μέχρι τη θυρίδα είναι h . Η θυρίδα είναι στρεπτή (γραμμική άρθρωση) περί οριζόντιο άξονα OO' και στηρίζεται με απλή γραμμική στήριξη (κύλιση) BB' (βλ.σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Οι αντιδράσεις των στηρίξεων.
2. Η συνολική δύναμη η οποία ασκείται στη θυρίδα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα).

Αριθμητική εφαρμογή: $L = 2,0 \text{ m}$, $h = 2,0 \text{ m}$, $w = 5,0 \text{ t / m}^2$, $\theta = 30^\circ$.



Το σύστημα αξόνων είναι **ορισμένο** από τη μέθοδο

$$(9) \rightarrow F = \gamma \cdot \left(h + \frac{L \cdot \cos \theta}{2} \right) \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{F = 11,464_{102} \text{ t} = 112,463 \text{ kN}}$$

$$(10) \rightarrow y_{\pi} = \left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{L}{2} \right) + \frac{L^2}{12 \cdot \left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{L}{2} \right)} \rightarrow \mathbf{y_n = 3,410_{124} \text{ m}}$$

$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OF} = \frac{L}{2} + \frac{L^2}{12 \cdot \left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{L}{2} \right)} \rightarrow e_{OF} = \mathbf{1,100723 \text{ m}}$$

$$W = w \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{W = 20,000 \text{ t} = 196,200 \text{ kN}},$$

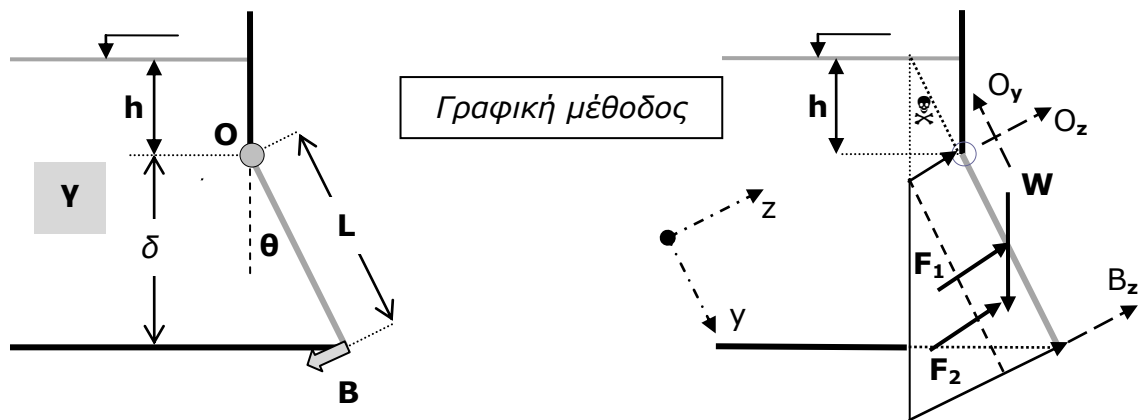
$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OW} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow e_{OW} = \mathbf{0,500 \text{ m}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -O_y + W \cdot \cos \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_y = 17,320508 \text{ t} = 169,914 \text{ kN}}$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow -B_z \cdot L + W \cdot e_{OW} - F \cdot e_{OF} = 0 \rightarrow \mathbf{B_z = -1,309401 \text{ t} = -12,845 \text{ kN}}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z + F - W \cdot \sin \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_z = -0,154701 \text{ t} = -1,518 \text{ kN}}$$

Η συνολική δύναμη και το σημείο εφαρμογής της έχουν ήδη υπολογιστεί: **F, y_n**
 Η διεύθυνση της: κάθετη στη θυρίδα → **30°** ως προς οριζόντιο άξονα.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τις **αντιδράσεις**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πίεσεις στην επιφάνεια του φορέα

$$(11a) \rightarrow F_1 = \gamma \cdot h \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{F_1 = 8,000 \text{ t} = 78,480 \text{ kN}}$$

$$e_{OF1} = \frac{L}{2} \rightarrow e_{OF1} = \mathbf{1,000 \text{ m}}$$

$$(11a) \rightarrow F_2 = \frac{\gamma \cdot \delta \cdot L^2}{2} = \frac{\gamma \cdot L^3 \cdot \cos \theta}{2} \rightarrow \mathbf{F_2 = 3,464102 \text{ t} = 33,983 \text{ kN}}$$

$$e_{OF2} = \frac{2 \cdot L}{3} \rightarrow e_{OF2} = \mathbf{1,333333 \text{ m}}$$

$$W = w \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{W = 20,000 \text{ t} = 196,200 \text{ kN}},$$

$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OW} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow e_{OW} = \mathbf{0,500 \text{ m}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -O_y + W \cdot \cos \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_y = 17,320 \text{ t} = 169,914 \text{ kN}}$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow -B_z \cdot L + W \cdot e_{ow} - F_1 \cdot e_{of1} - F_2 \cdot e_{of2} = 0 \rightarrow \mathbf{B_z = -1,309 \text{ t} = -12,845 \text{ kN}}$$

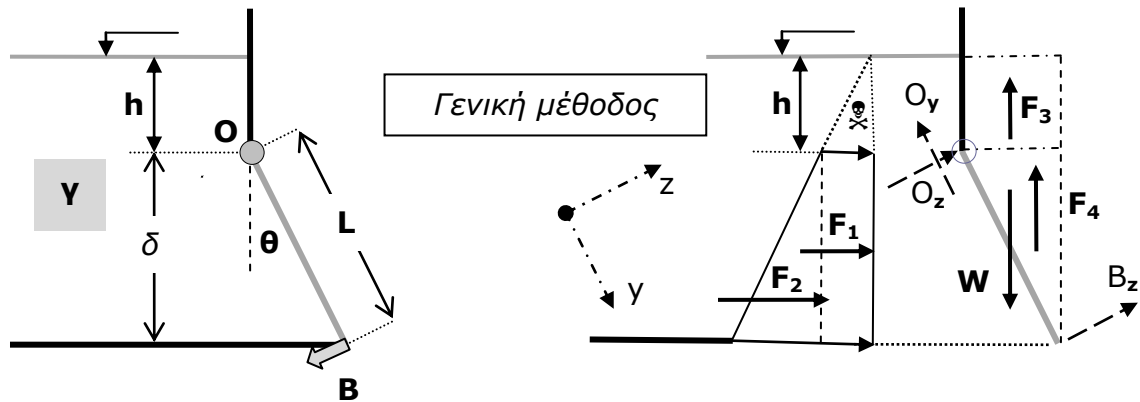
$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z + F_1 + F_2 - W \cdot \sin \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_z = -0,154 \text{ t} = -1,518 \text{ kN}}$$

Συνολική δύναμη $F = F_1 + F_2 \rightarrow \mathbf{F = 11,464 \text{ t} = 112,463 \text{ kN}}$

Η διεύθυνση της: κάθετη στη θυρίδα $\rightarrow 30^\circ$ ως προς οριζόντιο άξονα.

Το σημείο εφαρμογής της πρέπει να υπολογιστεί (συνδυασμός των F_1 και F_2).

Προφανώς θα προκύψει το y_n !



Η επιλογή του συστήματος αξόνων καθορίστηκε από τις αντιδράσεις

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στους άξονες της μεθόδου

$$(12a) \rightarrow F_1 = \gamma \cdot h \cdot \delta \cdot L = \gamma \cdot h \cdot L^2 \cdot \cos \theta \rightarrow \mathbf{F_1 = 6,928203 \text{ t} = 67,966 \text{ kN}}$$

$$e_{of1} = \frac{\delta}{2} = \frac{L \cdot \cos \theta}{2} \rightarrow \mathbf{e_{of1} = 0,866025 \text{ m}}$$

$$(12a) \rightarrow F_2 = \frac{\gamma \cdot \delta^2 \cdot L}{2} = \frac{\gamma \cdot L^3 \cdot (\cos \theta)^2}{2} \rightarrow \mathbf{F_2 = 3,000 \text{ t} = 29,430 \text{ kN}}$$

$$e_{of2} = \frac{2 \cdot \delta}{3} = \frac{2 \cdot L \cdot \cos \theta}{3} \rightarrow \mathbf{e_{of2} = 1,154701 \text{ m}}$$

$$(14a) \rightarrow F_3 = \gamma \cdot h \cdot L \cdot L \cdot \sin \theta = \gamma \cdot h \cdot L^2 \cdot \sin \theta \rightarrow \mathbf{F_3 = 4,000 \text{ t} = 39,240 \text{ kN}}$$

$$e_{of3} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow \mathbf{e_{of3} = 0,500 \text{ m}}$$

$$(14a) \rightarrow F_4 = \frac{\gamma \cdot \delta \cdot L \cdot L \cdot \sin \theta}{2} = \frac{\gamma \cdot L^3 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow \mathbf{F_4 = 1,732051 \text{ t} = 16,991 \text{ kN}}$$

$$e_{of4} = \frac{2 \cdot L \cdot \sin \theta}{3} \rightarrow \mathbf{e_{of4} = 0,666667 \text{ m}}$$

$$W = w \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{20,000 \text{ t} = 196,200 \text{ kN}},$$

$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{ow} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow \mathbf{e_{ow} = 0,500 \text{ m}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -O_y + W \cdot \cos \theta + F_1 \cdot \sin \theta + F_2 \cdot \sin \theta - F_3 \cdot \cos \theta - F_4 \cdot \cos \theta = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{O_y = 17,320 \text{ t} = 169,914 \text{ kN}}$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow -B_z \cdot L + W \cdot e_{ow} - F_1 \cdot e_{OF1} - F_2 \cdot e_{OF2} - F_3 \cdot e_{OF3} - F_4 \cdot e_{OF4} = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{B_z = -1,309 \text{ t} = -12,845 \text{ kN}}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z + F_1 \cdot \cos \theta + F_2 \cdot \cos \theta + F_3 \cdot \sin \theta + F_4 \cdot \sin \theta - W \cdot \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{O_z = -0,154 \text{ t} = -1,518 \text{ kN}}$$

$$\text{Συνολική δύναμη } F = \left[(F_1 + F_2)^2 + (F_1 + F_2)^2 \right]^{1/2} \rightarrow \mathbf{F = 11,464 \text{ t} = 112,463 \text{ kN}}$$

Η διεύθυνση της: κάθετη στη θυρίδα $\rightarrow \mathbf{30^\circ}$ ως προς οριζόντιο άξονα.

Το σημείο εφαρμογής της **πρέπει να υπολογιστεί** (συνδυασμός των $\mathbf{F_1}$ έως $\mathbf{F_4}$).

Προφανώς θα προκύψει το $\mathbf{y_n}$!

Επισήμανση: Παρότι η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί και με τις τρεις κατευθύνσεις – μεθόδους, είναι **εμφανέστατη η υπεροχή επιλογής** (κατά σειρά παρουσίασης) των μεθόδων, στο συγκεκριμένο πεδίο! (βλ. 2.2.1)

2.3.9 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 2.2.3 και 2.2.4

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ABOA** σε όλο το πλάτος της **b**. Η γωνία του θυροφράγματος στο B είναι 90° .

Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **O** και απλή γραμμική στήριξη (κύλιση) στον οριζόντιο άξονα **A**.

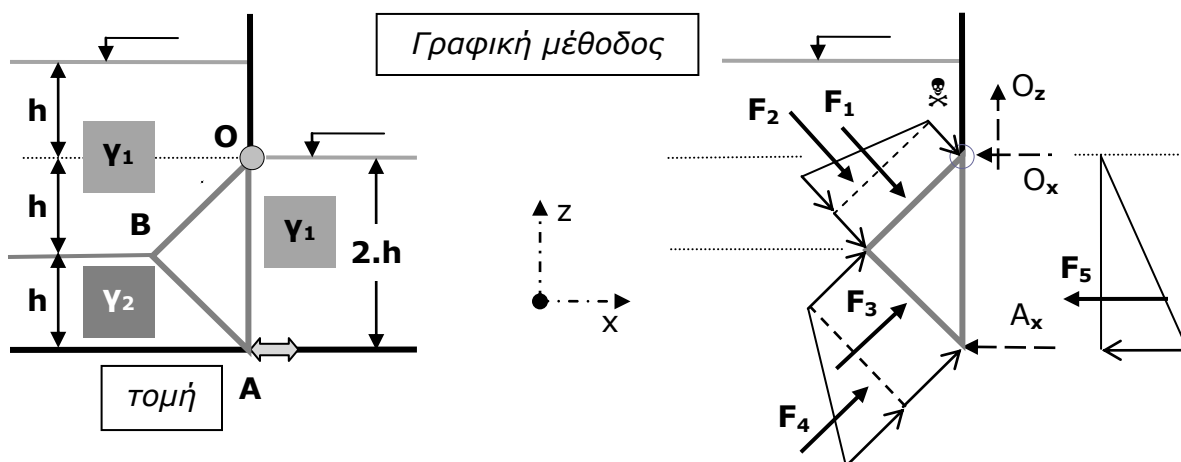
Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **2.h** και **h** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατόντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **2.h** και ειδικό βάρος **γ_1** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Οι αντιδράσεις των στηρίξεων, ανά μέτρο πλάτους του θυροφράγματος.
2. Η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα)

Αριθμητική εφαρμογή: **h = 1,5 m**, **b = 8 m**, **$\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$** , **$\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$** .

Σημείωση: Σε φορείς, των οποίων η μορφή παραμένει σταθερή σε όλο το πλάτος, είναι σύνηθες να υπολογίζουμε τις αντιδράσεις των στηρίξεων ανά μέτρο πλάτους.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τις **αντιδράσεις**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στις επιφάνειες του φορέα

Τα μήκη των πλευρών AB και BO είναι: $\sqrt{2} \cdot h$

$$F_1 = \sqrt{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}, e_{AF1} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}, e_{AF2} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_3 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}, e_{AF3} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}, e_{AF4} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}, e_{AF5} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow A_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{OFi} + M_{OF5} = 0 \rightarrow A_x = \frac{3 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2}{6} \cdot h^2 \cdot b$$

→ **A_x = 15,600 t = 153,036 kN** → **A_x/m = 1,950 t/m = 19,130 kN/m**

$$\sum M_A = 0 \rightarrow O_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{AFi} + M_{AF5} = 0 \rightarrow O_x = \frac{6 \cdot \gamma_1 + \gamma_2}{6} \cdot h^2 \cdot b$$

→ **O_x = 21,300 t = 208,953 kN** → **O_x/m = 2,663 t/m = 26,119 kN/m**

Επισήμανση 1: Η επιλογή της $\sum M_A = 0$ αντί της $\sum F_x = 0$, όταν (όπως <εδώ>) είναι ευχερής ο προσδιορισμός των μοχλοβραχιόνων, είναι προτιμότερη. Οι δύο αντιδράσεις προκύπτουν με ανεξάρτητο υπολογισμό και η $\sum F_x = 0$ είναι δυνατό να αξιοποιηθεί για έλεγχο!

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + O_x - \left(\sum_1^4 F_i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + F_5 = 0$$

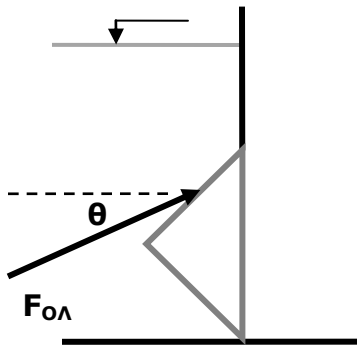
$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z - \left(\sum_1^2 F_i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\sum_3^4 F_i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \rightarrow O_z = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot h^2 \cdot b$$

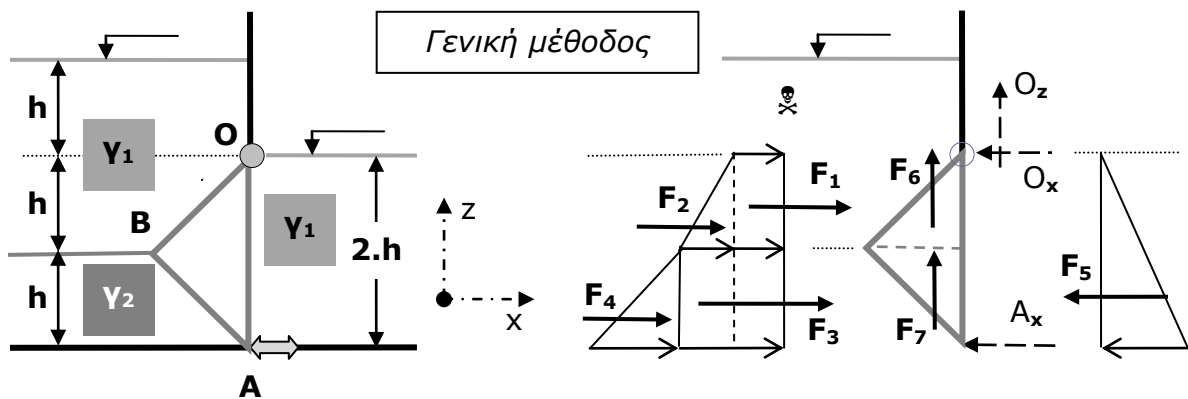
→ **O_z = -18,900 t = -185,409 kN** → **O_z/m = -2,363 t/m = -23,176 kN/m**

$$F_{O\Lambda} = \left[(\sum F_x)^2 + (\sum F_z)^2 \right]^{1/2} = \left[(3 \cdot \gamma_1 + \gamma_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{h^2 \cdot b}{2}$$

→ **F_{OΛ} = 41,459 t = 406,709 kN**

$$\tan \theta = \frac{\sum F_z}{\sum F_x} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{3 \cdot \gamma_1 + \gamma_2} \rightarrow \tan \theta = 0,512195 \rightarrow \theta = 27,121^\circ$$





Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τη **μέθοδο** και τις **αντιδράσεις**. Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στους άξονες της μεθόδου.

$$F_1 = \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{h}{2}, e_{AF1} = \frac{3 \cdot h}{2}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot h}{3}, e_{AF2} = \frac{4 \cdot h}{3}$$

$$F_3 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{3 \cdot h}{2}, e_{AF3} = \frac{h}{2}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{5 \cdot h}{3}, e_{AF4} = \frac{h}{3}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}, e_{AF5} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$F_6 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{h}{3}, e_{AF2} = \frac{h}{3}$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{h}{3}, e_{AF2} = \frac{h}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow A_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{OFi} + \sum_5^7 M_{OFi} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow O_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{AFi} + M_{AF5} - \sum_6^7 M_{AFi} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + \left(\sum_6^7 F_i \right) = 0$$

Επισημάνση 2: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με τις δύο κατευθύνσεις – μεθόδους και είναι **εμφανέστατη** η **υπεροχή επιλογής** (κατά σειρά παρουσίασης) των μεθόδων, στο συγκεκριμένο πεδίο! (βλ. 2.2.1)

2.3.10 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.4

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΟΓ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει διατομή ημικυκλίου με ακτίνα **h**.

Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **Ο** και απλή γραμμική στήριξη (κύλιση) στον οριζόντιο άξονα **Α**.

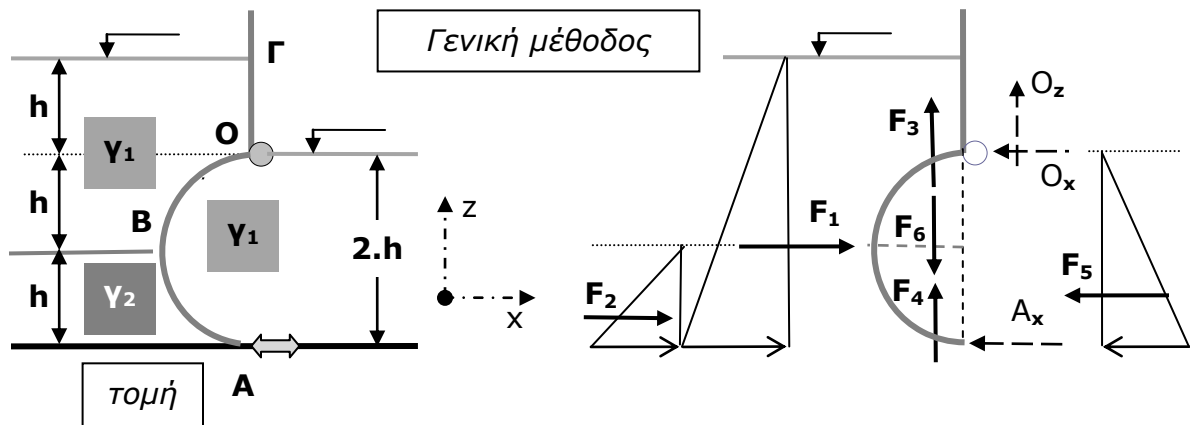
Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **2.h** και **h** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατόντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **2.h** και ειδικό βάρος **γ_1** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Οι αντιδράσεις των στηρίξεων, ανά μέτρο πλάτους του θυροφράγματος.
2. Η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα)

Αριθμητική εφαρμογή: **h = 1,5 m**, **b = 8 m**, **$\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$** , **$\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$** .

Σημείωση: Προσοχή στη διαφορετική μορφή του *φορέα* και της άρθρωσης!



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τη **μέθοδο** και τις **αντιδράσεις**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πίεσεις στους άξονες της μεθόδου

$$F_1 = \frac{9}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = h, e_{AF1} = h$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{5 \cdot h}{3}, e_{AF2} = \frac{h}{3}$$

$$F_3 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}, e_{AF3} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$F_4 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}, e_{AF4} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}, e_{AF5} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$F_6 = \frac{\pi}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}, e_{AF2} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow A_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^2 M_{OFi} + \sum_3^5 M_{OFi} - M_{OF6} = 0$$

$$\rightarrow A_x = \frac{8 \cdot \gamma_1 + 3 \cdot \gamma_2}{12} \cdot h^2 \cdot b$$

$$\rightarrow A_x = 16,950 \text{ t} = 166,280 \text{ kN} \rightarrow A_x/m = 2,119 \text{ t/m} = 20,785 \text{ kN/m}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow O_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{AFi} + \sum_5^6 M_{AFi} = 0$$

$$\rightarrow O_x = \frac{16 \cdot \gamma_1 + 3 \cdot \gamma_2}{12} \cdot h^2 \cdot b$$

$$\rightarrow O_x = 28,950 \text{ t} = 283,000 \text{ kN} \rightarrow O_x/m = 3,619 \text{ t/m} = 35,500 \text{ kN/m}$$

Επισήμανση 1: Η επιλογή της $\sum M_A = 0$ αντί της $\sum F_x = 0$, όταν (όπως <εδώ>) είναι ευχερής ο προσδιορισμός των μοχλοβραχιόνων, είναι προτιμότερη.

Οι δύο αντιδράσεις προκύπτουν με ανεξάρτητο υπολογισμό και η $\sum F_x = 0$ είναι δυνατό να αξιοποιηθεί για έλεγχο!

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + O_x - \sum_1^2 F_i + F_5 = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + \left(\sum_6^7 F_i \right) = 0 \rightarrow O_z = - \frac{\pi \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)}{4} \cdot h^2 \cdot b$$

$$\rightarrow O_z = -1,414 \text{ t} = -13,869 \text{ kN} \rightarrow O_z/m = -0,177 \text{ t/m} = -1,734 \text{ kN/m}$$

$$F_{O\lambda} = \left[\left(\sum F_x \right)^2 + \left(\sum F_z \right)^2 \right]^{1/2} = \left[4 \cdot (4 \cdot \gamma_1 + \gamma_2)^2 + \pi^2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{h^2 \cdot b}{4}$$

$$\rightarrow F_{O\lambda} = 45,922 \text{ t} = 450,493 \text{ kN}$$

$$\tan \theta = \frac{\sum F_z}{\sum F_x} = \frac{\pi \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)}{2 \cdot (4 \cdot \gamma_1 + \gamma_2)} \rightarrow \tan \theta = 0,030800 \rightarrow \theta = 1,764^\circ$$

Επισήμανση 2: Η συνολική δύναμη από πιέσεις είναι σχεδόν οριζόντια.

Προσοχή! ΔΕΝ διέρχεται από το κέντρο του ημικυκλίου, διότι συμμετέχει και το τμήμα των πιέσεων στο ΟΓ.

Επισήμανση 3: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με μία από τις κατευθύνσεις – μεθόδους! (βλ. 2.2.1)