Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Ονοματεπώνυμο:

1η Σειρά Ασκήσεων στην Μηχανική του Συνεχούς Μέσου

Άσκηση 1: Να προσδιορισθεί η τιμή των ακολούθων εκφράσεων που περιέχουν το δέλτα Kronecker: $\delta_{ik}u_k$, $\delta_{ij}\delta_{ij}$, $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$, $\delta_{ij}\delta_{jk}$, και $\delta_{ij}A_{ik}$.

Άσκηση 2: Να προσδιορισθεί η τιμή των ακολούθων εκφράσεων που περιέχουν το σύμβολο εναλλαγής: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij}$, και $\varepsilon_{ijk}a_j a_k$.

Άσκηση 3: Να δειχθεί ότι ο τανυστής $B_{ik} = \varepsilon_{ijk}a_j$ είναι αντι-συμμετρικός.

Άσκηση 4: Να προσδιοριστεί η τιμή της εκφράσεως $A_{ij}B_{ij}$, όταν ο τανυστής A_{ij} είναι συμμετρικός και ο τανυστής B_{ij} είναι αντι-συμμετρικός.

Άσκηση 5: Εάν A_{ij} είναι Καρτεσιανός τανυστής 2ας τάξεως, να δειχθεί ότι η παράγωγός του ως προς x_k, ήτοι η ποσότητα $A_{ij,k}$, είναι Καρτεσιανός τανυστής 3ης τάξεως.

Άσκηση 6 (Θεώρημα): Να δειχθεί ότι, εάν όλες οι συνιστώσες ενός Καρτεσιανού τανυστή μηδενίζονται σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε αυτές μηδενίζονται και σε κάθε άλλο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Άσκηση 7 (Θεώρημα): Το άθροισμα ή η διαφορά δύο Καρτεσιανών τανυστών της ίδιας τάξης είναι πάλι τανυστής της ίδιας τάξης.

Άσκηση 8 (Θεώρημα): Έστω $A_{a_1 \ldots a_n}$ και $B_{a_1 \ldots a_n}$ Καρτεσιανοί τανυστές. Να δειχθεί τότε ότι εάν η εξίσωση $A_{a_1 \ldots a_n}(x_1, x_2, x_3) = B_{a_1 \ldots a_n}(x_1, x_2, x_3)$ ισχύει σε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ισχύει και σε κάθε άλλο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

ηση 1: $\delta_{ik} \cdot u_k = u_i$ (τανυστής 1ης τάξης / διάνυσμα)

$\delta_{ij} \cdot \delta_{ij} = 1$

$\delta_{ij} \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{jk} = (\delta_{ij} \cdot \delta_{ik}) \cdot \delta_{jk} = \delta_{jk} \cdot \delta_{jk} = 1$

$\delta_{ij} \cdot \delta_{jk} = \delta_{ik} = 1$

$\delta_{ij} \cdot A_{jk} = A_{ik}$ (τανυστής 2ης τάξης / μητρώο 9 βαθμωτών μεγεθών)

Άσκηση 2: $\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{kij} = 1 \cdot 1 = 1$

$\varepsilon_{ijk} \cdot a_j \cdot a_k = a_i$ (διάνυσμα)

Άσκηση 3: Για να είναι ο τανυστής αντισυμμετρικός θα πρέπει $B_{ik} = -B_{ki}$

Ισχύει $\varepsilon_{ijk} \cdot a_j = -\varepsilon_{kji} \cdot a_j = -B_{ki}$. Οπότε $B_{ik} = -B_{ki}$.

Άσκηση 4: $A_{ij} \cdot B_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \cdot b_{12} + a_{13} \cdot b_{13} - a_{12} \cdot b_{12} + a_{23} \cdot b_{23} - a_{13} \cdot b_{13} - a_{23} \cdot b_{23}$

$= 0$

Άσκηση 5: $A_{ij,k} = \dfrac{\partial (A_{ij})}{\partial x'_k} = \dfrac{\partial (a_{ip} \cdot a_{jq} \cdot A_{pq})}{\partial x'_k} = a_{ip} \cdot a_{jq} \cdot \dfrac{\partial A_{pq}}{\partial x'_k} = a_{ip} \cdot a_{jq} \cdot \dfrac{\partial A_{pq}}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial x_m}{\partial x'_k} = a_{ip}\, a_{jq}\, a_{km} \cdot A_{pq,m}$

Το αποτέλεσμα είναι καρτεσιανός τανυστής 3ης τάξης.

Άσκηση 6: Έστω ο καρτεσιανός τανυστής $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ και σύστημα συντεταγμένων

$x_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (αυτό στο οποίο οι συνιστώσες μηδενίζονται). Τότε ισχύει $\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_{11} \cdot x_1 + r_{12} \cdot x_2 + r_{13} \cdot x_3 = 0$

$r_{21} \cdot x_1 + r_{22} \cdot x_2 + r_{23} \cdot x_3 = 0$

$r_{31} \cdot x_1 + r_{32} \cdot x_2 + r_{33} \cdot x_3 = 0$

Ισχύει $x'_1 = r_{11} \cdot x_1 + r_{12} \cdot x_2 + r_{13} \cdot x_3 = 0$

$x'_2 = r_{21} \cdot x_1 + r_{22} \cdot x_2 + r_{23} \cdot x_3 = 0$

$x'_3 = r_{31} \cdot x_1 + r_{32} \cdot x_2 + r_{33} \cdot x_3 = 0$

όπου $r_{11} = \cos(x'_1, x_1)$, $r_{12} = \cos(x'_1, x_2)$ κ.τ.λ.

Άσκηση 7

$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$B_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & (a_{13}+b_{13}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & (a_{23}+b_{23}) \\ (a_{31}+b_{31}) & (a_{32}+b_{32}) & (a_{33}+b_{33}) \end{pmatrix}$ τανυστής 2ης τάξης.

Άσκηση 8

Πολλαπλασιάζω τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον όρο $a_{ia_1} a_{ja_2} \dots a_{ka_n}$ οπότε η σχέση μετασχηματίζεται στην: $A_{ij\dots k}(x'_1, x'_2, x'_3) = B_{ij\dots k}(x'_1, x'_2, x'_3)$ που είναι η ισοδύναμη εξίσωση εκπεφρασμένη σε άλλο σύστημα συντεταγμένων.

Να αποδειχτεί ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ορθογώνιος ο Q είναι $Q^T = Q^{-1}$.

Σε ορθογώνιους τανυστές ισχύει $Q \cdot Q^T = I$. Άρα θα ισχύει και $Q^T (Q\, Q^{-1}) = Q^{-1} \Rightarrow Q^T \cdot I = Q^{-1} \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$