ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Γ. ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ

Καθηγητής του ΤΟΜΕΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ,
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ,
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

ΑΘΗΝΑ 2006

Κάθε γνήσιο αντίγραφο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα.

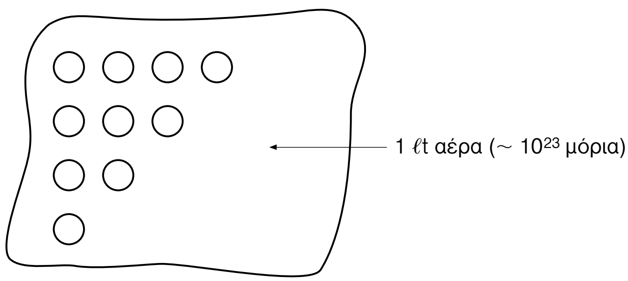
ΦΩΤΟΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ: Σ. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ - Ε. ΠΑΠΑΔΑΜΗ & ΣΙΑ Ε.Ε.

ΙΩΑΝ. ΘΕΟΛΟΓΟΥ 80 ΖΩΓΡΑΦΟΥ, ΤΗΛ. 210.77.10.548 - 210.77.02.033, FAX: 210.77.10.581

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

- Μηχανική είναι η επιστημονική περιοχή μελέτης της κίνησης και της παραμόρφωσης των σωμάτων, και των δυνάμεων που προξενούν αυτές. Η Μηχανική βασίζεται στις έννοιες του *χρόνου*, του *χώρου*, της *δύναμης*, της *ενέργειας* και της *ύλης*.

- Γιατί η υπόθεση *Συνεχούς Μέσου* εφόσον γνωρίζουμε ότι η φύση της ύλης είναι διακριτή;



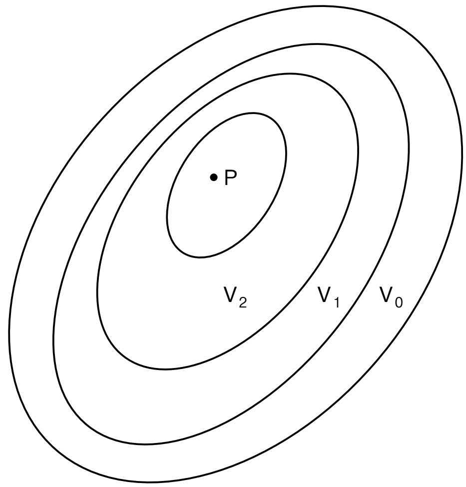
Τυπική ταχύτητα εκτέλεσης υπολογισμών από Η/Υ:
10^{10} πράξεις/sec.

Η δυναμική απόκριση όγκου 1 lt αέρα μέσω ανάλυσης που βασίζεται στην Μοριακή Δυναμική (Molecular Dynamics) θα απαιτούσε 10^{13} sec ~ 100000 έτη.

- Με την υπόθεση περί Συνεχούς Μέσου δεν λαμβάνεται υπόψιν η ατομική δομή υλικών όπως *ρευστά* (αέρια, υγρά) και *στερεά* και λαμβάνεται η συμπεριφορά τους σαν να ήταν η κατανομή της ύλης συνεχής. Έτσι τα σημεία του υλικού απεικονίζονται σε σημεία του Ευκλείδιου χώρου και αμελείται τελείως η ατομική δομή του υλικού.

- Η έννοια του Συνεχούς Μέσου είναι δανεισμένη από το *σύστημα πραγματικών αριθμών* στα Μαθηματικά: Μεταξύ 2 πραγματικών αριθμών υπάρχει πάντα ένας άλλος πραγματικός αριθμός, και επομένως, υπάρχει απειρία αριθμών μεταξύ 2 διακριτών τιμών στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Επεκτείνοντας την ιδέα αυτή του Συνεχούς και στην ύλη, θεωρούμε μία *συνεχή κατανομή της ύλης* στον χώρο. Αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό εξετάζοντας την έννοια της *πυκνότητας*.



ακολουθία περιοχών
που συγκλίνουν στο σημείο P

Έστω ότι συγκεκριμένη ποσότητα μάζας καταλαμβάνει το χωρίο (περιοχή) U_0. Θεωρούμε περαιτέρω ότι το σημείο P ανήκει στο U_0 και ότι η ακολουθία των υπο-χωρίων $U_0, U_1, U_2, \ldots$ *συγκλίνει* στο *P*

$$U_n \subset U_{n-1}, \quad P \in U_n, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Έστω επίσης ότι το χωρίο U_n έχει όγκο V_n και μάζα M_n. Θεωρούμε τον λόγο M_n/V_n. Ακολούθως, εάν υπάρχει το όριο του M_n/V_n καθώς $n \to \infty$ και $V_n \to 0$, αυτό *ορίζεται* ως η *πυκνότητα της κατανομής της μάζας* στο σημείο P και συμβολίζεται ως $\rho(P)$

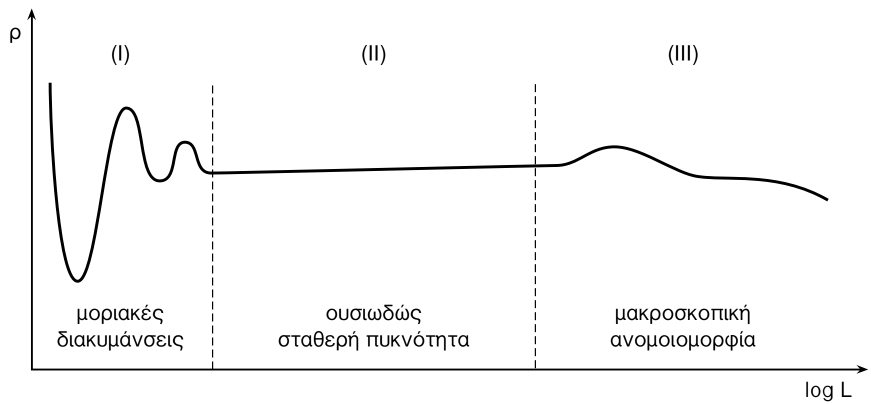
$$\rho(P) \overset{\triangle}{=} \lim_{\substack{n \to \infty \\ V_n \to 0}} \frac{M_n}{V_n} \tag{2}$$

Εφόσον η πυκνότητα ορίζεται σε όλα τα σημεία του U_0, τότε η μάζα είναι *συνεχώς* κατανεμημένη στο χωρίο αυτό.

- Όμοιες θεωρήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον ορισμό της *πυκνότητας της ορμής* και της *πυκνότητας της ενέργειας*.

- Το Συνεχές Μέσο *ορίζεται* ως το σώμα (υλικό) για το οποίο οι πυκνότητες της μάζας, ορμής και ενέργειας *υπάρχουν* κατά την μαθηματική τους έννοια. Η Μηχανική ενός τέτοιου μέσου καλείται Μηχανική του Συνεχούς Μέσου.

Τυπικό διάγραμμα μεταβολής της πυκνότητας συναρτήσει της διάστασης L ενός στοιχείου υλικού



Παράδειγμα: Η μοριακή διάσταση του ύδατος είναι $\sim 10^{-8}$ cm ($\sim \mathring{A}$). Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε (έχοντας σημαντική ακρίβεια) ανάλυση Μηχανικής Συνεχούς Μέσου (ΜΣΜ) εφόσον θεωρήσουμε διαστάσεις σε πρόβλημα ροής ύδατος μεγαλύτερες από π.χ. 10^{-6} cm. Για παράδειγμα, η ροή του ύδατος εντός αγωγού πολύ μικρής διαμέτρου μπορεί να αναλυθεί στα πλαίσια της ΜΣΜ εφόσον η διάμετρος δεν είναι μικρότερη της τάξεως του 10^{-6} cm.

- *Για μικρότερες κλίμακες* θα πρέπει κανείς να χρησιμοποιήσει την Φυσική των Σωματιδίων (Particle Physics) και την Στατιστική Μηχανική (Statistical Mechanics).

- Ο συνδυασμός *Μηχανικής του Συνεχούς* και *Φυσικής των Σωματιδίων* μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τον φυσικό κόσμο ως σύνολο όπως π.χ. συμβαίνει και στην Μοντέρνα Οπτική όπου το φως θεωρείται μερικές φορές ως σωματίδια και άλλες ως κύματα.

Η «θέση» της ΜΣΜ ως επιστημονικής περιοχής

Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων

↓

Μηχανική Συνεχούς Μέσου

Μηχανική Ρευστών	*Μηχανική Στερεών*
(Ροή εκ Δυναμικού, Μη - αδρανειακή Ροή, Στρωτή Ροή, Τυρβώδης Ροή, Ροή σε Ρηχά Ύδατα, ...)	(Αντοχή Υλικών, Ελαστικότητα, Ιξο - ελαστικότητα, Πλαστικότητα, Διάδοση Κυμάτων στα Υλικά, ...)

Νόμοι ισοζυγίου (balance laws or conservation laws)

Κεντρικής σημασίας νόμοι στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου είναι οι εξής:

– Ισοζύγιο μάζας (διατήρηση μάζας),
– Ισοζύγιο γραμμικής ορμής,
– Ισοζύγιο γωνιακής ορμής (στροφορμής),
– Ισοζύγιο ενέργειας (διατήρηση ενέργειας – 1ος νόμος της Θερμοδυναμικής).

Σημείωση: Οι ανωτέρω νόμοι οδηγούν σε *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις* (partial differential equations) που αποτελούν κατάλληλους «περιορισμούς», στους οποίους θα πρέπει να υπακούει η λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Οι ανωτέρω νόμοι δεν αρκούν πάντως για να οδηγηθούμε στην λύση προβλημάτων. Απαιτούνται επιπλέον και οι λεγόμενες *Καταστατικές Εξισώσεις* (constitutive equations), οι οποίες περιγράφουν τον τρόπο συμπεριφοράς του συγκεκριμένου σώματος ή υλικού. Τέλος, οι ανωτέρω νόμοι ισοζυγίου συνοδεύονται για την πλήρη περιγραφή του συστήματος από την λεγόμενη Ανισότητα της Εντροπίας (2ο νόμο της Θερμοδυναμικής).

Η σημασία της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου

Γνώσεις Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου απαιτούνται σε πολλούς κλάδους των Εφαρμοσμένων Επιστημών και των Επιστημών

Μηχανικού – αναφέρονται χαρακτηριστικά οι περιοχές της *Επιστήμης των Υλικών και των Κατασκευών, Εμβιο-μηχανικής, Σεισμολογίας, Τεκτονο-φυσικής, Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης*.

Επιπλέον, η Μηχανική του Συνεχούς Μέσου αποτελεί μία κλασική περιοχή Εφαρμογών για τα Μαθηματικά. Εκεί, οι Διαφορικές Εξισώσεις και οι Αριθμητικές Τεχνικές βρίσκουν πολλές φορές το *φυσικό τους παράδειγμα*. Επίσης, πολλές μέθοδοι των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών *αναπτύχθηκαν* επειδή υπήρξε η *ανάγκη επίλυσης* συγκεκριμένων προβλημάτων Μηχανικής – π.χ. για Προβλήματα Ελαστικότητας αναπτυχθηκαν η Μέθοδος Riemann-Hilbert και οι Αριθμητικές Μέθοδοι Galerkin και Πεπερασμένων Στοιχείων, για Προβλήματα Ροής Ρευστών αναπτύχθηκε η Μέθοδος Συνοριακού Στρώματος, για Προβλήματα Ταλαντώσεων αναπτύχθηκε η Μέθοδος Διαταραχών, για Προβλήματα Σκέδασης Κυμάτων αναπτύχθηκε η Μέθοδος Wiener-Hopf.

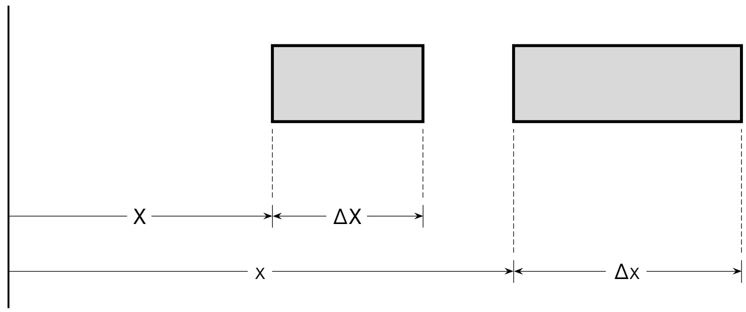
Δεν είναι τυχαίο λοιπόν που μερικοί από τους πιο σπουδαίους επιστήμονες, διαχρονικά, ασχολήθηκαν με την Επιστήμη της Μηχανικής – χαρακτηριστικά αναφέρονται οι Euler, Coulomb, Fourier, Cauchy, Lagrange, Rayleigh, Kirchhoff, Poincare, Hilbert, von Karman, Truesdell, Rivlin.

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι αρχές και οι ιδέες της Μηχανικής εφαρμόζονται τόσο σε *μεγάλες κλίμακες* (π.χ. ποιος είναι ο μηχανισμός γένεσης μιας κατολίσθησης ή πως διαδίδονται τα σεισμικά κύματα σε εδαφικές στρώσεις ή η ροή οχημάτων σε ένα δίκτυο δρόμων [πρόβλημα Συγκοινωνιακής Τεχνικής] ή η μελέτη προβλημάτων μεγάλων κατασκευών) όσο και σε *πολύ μικρές κλίμακες* (π.χ. μελέτη υλικών μικρο-ηλεκτρονικής ή προβλήματα βιο-τεχνολογίας). Γενικά, οι αρχές και οι ιδέες της Μηχανικής εφαρμόζονται σε όλες τις κλίμακες που ο άνθρωπος έχει την *δυνατότητα να σχεδιάζει κατασκευές*.

Η μελέτη της Μηχανικής απαιτεί ταυτόχρονα αναλυτικές και συνθετικές προσπάθειες.

2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΟ ΣΥΝΕΧΕΣ ΜΕΣΟ

Περιγραφή σε Μία Διάσταση



ΔX: αρχικό μήκος ενός στοιχείου,
Δx: μήκος του στοιχείου στον χρόνο t.

Χαρακτηριστικά των μονοδιάστατων καταστάσεων:

- Όλα τα υλικά σημεία ενός σώματος κινούνται κατά μήκος παραλλήλων γραμμών και η κίνηση είναι *ομοιόμορφη* σε επίπεδα κάθετα στην διεύθυνση της κίνησης.
- *Μία* μόνον χωρική μεταβλητή και ο χρόνος αρκούν για την περιγραφή του προβλήματος.

Υλική περιγραφή (material description) ή περιγραφή κατά Lagrange

Έστω ότι η θέση ενός υλικού σημείου P σε δεδομένη χρονική στιγμή t_0 (για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι $t_0 = 0$) καθορίζεται από την συντεταγμένη X. Σε επόμενες χρονικές στιγμές, η θέση του σημείου θα δίνεται ως

$$x = x(X, t), \tag{1}$$

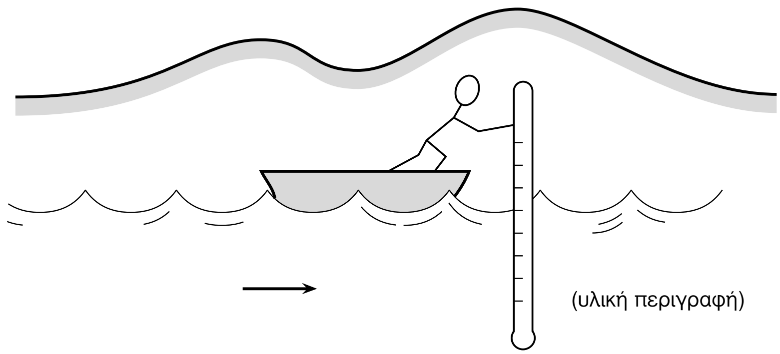
με την ιδιότητα $x(X, t_0) = X$. Η απεικόνιση $x = x(X, t)$ καλείται υλική περιγραφή της κίνησης. Στην περιγραφή αυτή, X και t είναι *ανεξάρτητες μεταβλητές*.

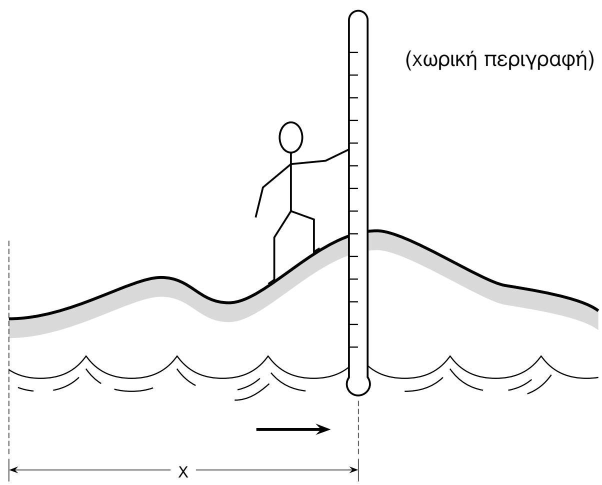
Χωρική περιγραφή (spatial description) ή περιγραφή κατά Euler

Ένας εναλλακτικός τρόπος περιγραφής είναι να θεωρηθούν ως *ανεξάρτητες μεταβλητές* οι x και t, έτσι ώστε

$$X = X(x, t). \qquad (2)$$

Στην χωρική περιγραφή, η προσοχή εστιάζεται σε δεδομένη περιοχή του χώρου παρά σε δεδομένη ποσότητα μάζας (δεδομένη περιοχή: π.χ. σήραγγα αέρα στο εργαστήριο, κανάλι ύδατος).





Προφανώς, οι δύο περιγραφές θα πρέπει να είναι *συνεπείς* μεταξύ τους. Για παράδειγμα, εάν $U(X, t)$ είναι η μετατόπιση στην υλική περιγραφή και $u(x, t)$ η μετατόπιση στην χωρική περιγραφή, θα έχουμε

$$U(X, t) = x(X, t) - X, \tag{3}$$

και

$$u(x, t) = x - X(x, t). \tag{4}$$

Παραμόρφωση

Εάν υποτεθεί ότι υφίσταται *ανομοιομορφία* του σώματος κατά την διεύθυνση της κίνησης (γεγονός που τυπικά συμβαίνει κατά την καταπόνηση παραμορφωσίμων σωμάτων), τότε η *κλίση ή βαθμίδα της μετατόπισης* (displacement gradient) αποτελεί ένα μέτρο της παραμόρφωσης του σώματος. Σε υλική περιγραφή, η βαθμίδα της μετατόπισης γράφεται ως

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X}. \tag{5}$$

Επίσης, ένα άλλο μέτρο της παραμόρφωσης του σώματος είναι η διαφορά των τετραγώνων γραμμικών στοιχείων του σώματος. Με τον τρόπο αυτό οδηγείται κανείς στον *τανυστή τροπής* (strain tensor) στην γενική μη-μονοδιάστατη περίπτωση.

Στην μονοδιάστατη κατάσταση, η τροπή κατά Lagrange δίνεται ως

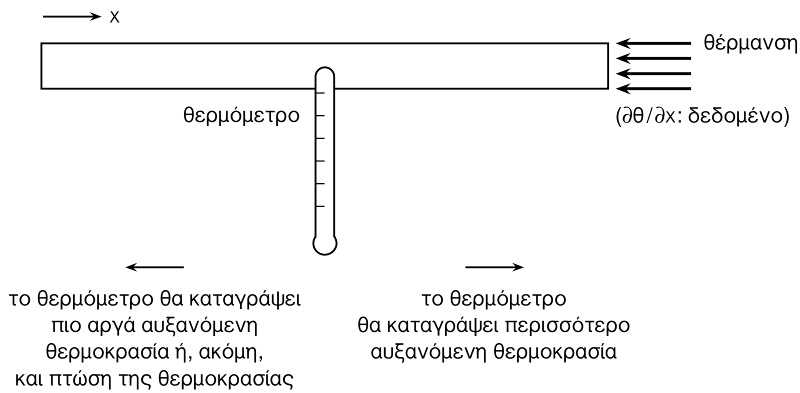
$$E = \frac{1}{2} \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta X)^2}{(\Delta X)^2} = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2, \tag{6}$$

ενώ η τροπή κατά Euler (Almansi strain) δίνεται ως

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \tag{7}$$

Τέλος, σημειώνεται ότι η περιγραφή κατά Lagrange είναι πιο κατάλληλη για ελαστικά στερεά (που πάντα επιστρέφουν στην αρχική τους κατάσταση) ενώ η περιγραφή κατά Euler είναι πιο κατάλληλη για ρευστά.

Υλική και Χωρική Περιγραφή σε Τρεις Διαστάσεις



$(\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2, \widehat{\mathbf{e}}_3)$ η ορθοκανονική βάση του συστήματος

[ισχύουν: για $i = j \leadsto \widehat{\mathbf{e}}_i \cdot \widehat{\mathbf{e}}_i = 1$, για $i \neq j \leadsto \widehat{\mathbf{e}}_i \cdot \widehat{\mathbf{e}}_i = 0$,

ενώ $\widehat{\mathbf{e}}_1 \times \widehat{\mathbf{e}}_2 = \widehat{\mathbf{e}}_3$, $\widehat{\mathbf{e}}_2 \times \widehat{\mathbf{e}}_3 = \widehat{\mathbf{e}}_1$, $\widehat{\mathbf{e}}_1 \times \widehat{\mathbf{e}}_3 = \widehat{\mathbf{e}}_2$].

Έστω π.χ. ένα βαθμωτό μέγεθος όπως η θερμοκρασία θ και ένα διανυσματικό μέγεθος όπως η ταχύτητα **v**. Τα μεγέθη αυτά έχουν την εξής περιγραφή:

Υλική περιγραφή (Lagrange)

$$\theta = \theta(X_1, X_2, X_3, t), \tag{1α}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(X_1, X_2, X_3, t). \tag{1β}$$

Χωρική περιγραφή (Euler)

$$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t), \tag{2α}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t), \tag{2β}$$

όπου

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{με} \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X}, \tag{3), (4}$$

ή σε μορφή συνιστωσών

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad \text{με} \quad X_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t_0). \tag{5), (6}$$

Σημείωση: Οι συνθήκες $\left|\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| \neq 0, \infty$ είναι ικανές για να είναι ο μετασχηματισμός *αντιστρεπτός* και *1-προς-1* (αποδεκτός μετασχηματισμός).

Άσκηση 1: Κινούμενο σώμα εισέρχεται σε δεδομένο θερμοκρασιακό πεδίο. Η (δεδομένη) κίνηση του σώματος περιγράφεται ως εξής $x_1 = X_1 + ktX_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$ (υλική περιγραφή). Εάν το θερμοκρασιακό πεδίο δίνεται από την χωρική περιγραφή $\theta = \lambda(x_1 + x_2)$, όπου λ είναι γνωστός συντελεστής (λ δίνεται σε διαστάσεις $[°C][L]^{-1}$), τότε:

(α) Να προσδιορισθεί η υλική περιγραφή της θερμοκρασίας, και

(β) Να προσδιορισθούν η ταχύτητα και ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας για υλικά σημεία (στοιχεία).

Λύση: (α) Με αντικατάσταση των x_i έχουμε

$$\theta = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda(X_1 + ktX_2 + X_2) = \lambda\big(X_1 + (kt+1)X_2\big).$$

(β) Για δεδομένο υλικό σημείο που αντιστοιχεί σε κάποιο X_i, η ταχύτητά του θα είναι

$$v_i = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{X_i\text{-δεσμευμένα}},$$

οπότε $v_1 = kX_2$, $v_2 = v_3 = 0$ σε υλική περιγραφή, ενώ επειδή $x_2 = X_2$ (από τα δεδομένα),

$$v_1 = kx_2, \quad v_2 = v_3 = 0 \quad \text{σε χωρική περιγραφή.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας για ένα υλικό σημείο θα είναι

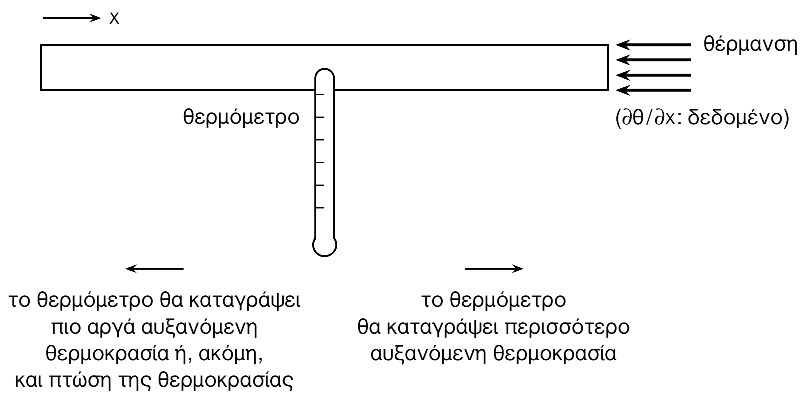
$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{X_i\text{-δεσμευμένα}} = \lambda k X_2 = \lambda k x_2.$$

Σημείωση: Παρά το γεγονός ότι η θερμοκρασία είναι ανεξάρτητη του χρόνου στην χωρική περιγραφή, κάθε υλικό σημείο «αισθάνεται» αλλαγές στην θερμοκρασία του επειδή κινείται από μία θέση στον χώρο σε κάποια άλλη γειτονική θέση.

Υλική Παράγωγος ως προς τον Χρόνο (material time derivative)

Επειδή τα στοιχεία του υλικού βρίσκονται συνήθως σε κίνηση σε φορτιζόμενο παραμορφώσιμο σώμα, είναι βασικής σημασίας να διακρίνουμε ανάμεσα σε μετρήσεις σε σχέση με *ακίνητο* σύστημα αναφοράς και *κινούμενο* σύστημα αναφοράς.

Παράδειγμα: Ράβδος υπό θερμική φόρτιση στο ένα της άκρο



Ορισμός: *Υλική παράγωγος* καλείται ο ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας (π.χ. θερμοκρασία ή ταχύτητα) που αναφέρεται σε υλικό σημείο. Συμβολίζεται ως D/Dt.

(i) Όταν χρησιμοποιείται η *υλική* περιγραφή

$\theta = \theta(\mathbf{X}, t)$

τότε

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{X_i\text{-δεσμευμένα}} . \qquad (1)$$

(ii) Όταν χρησιμοποιείται η *χωρική* περιγραφή

$\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$

τότε

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{X_i\text{-δεσμευμένα}} \overset{\downarrow \text{ εφαρμογή κανόνα αλυσίδας}}{=}$$

$$= \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{x_i\text{-δεσμευμένα}}, \qquad (2)$$

όπου οι παράγωγοι $(\partial x_i/\partial t)$ υπολογίζονται για σταθερές (δεσμευμένες) τιμές των X_i.

Στην συνήθη περίπτωση χρήσης Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων έχουμε

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{X_i\text{-δεσμευμένα}} = v_i, \qquad (3)$$

όπου v_i οι συνιστώσες της ταχύτητας σωματιδίου (particle velocity), και επομένως

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + v_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial\theta}{\partial x_3}. \qquad (4)$$

Τονίζεται ότι η ανωτέρω εξίσωση είναι κατάλληλη για *χωρική* περιγραφή, όπου $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$.

Σε μία διάσταση η Εξ. (4) γίνεται

$$\frac{D\theta}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\theta}{\partial t}}_{\substack{\text{τοπικός όρος}\\ \text{(local term)}}} + \underbrace{v\frac{\partial\theta}{\partial x}}_{\substack{\text{όρος εκ μεταφοράς}\\ \text{(convected term)}}}.$$

Στην περίπτωση *γενικού (καμπυλόγραμμου)* συστήματος συντεταγμένων, η υλική παράγωγος δίνεται ως

$$\frac{D\theta(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial\theta(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta(\mathbf{x},t), \tag{5}$$

όπου $v_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{X_i\text{-δεσμευμένα}}$ και $\nabla(\,) = \frac{\partial(\,)}{\partial x_i}\,\widehat{\mathbf{e}}_i$.

Παρατήρηση 1: *Σε χωρική περιγραφή*, η υλική παράγωγος της ποσότητας θ έχει δύο συνιστώσες, δηλ. τον ρυθμό μεταβολής της θ σε μία συγκεκριμένη θέση, $(\partial\theta/\partial t)$, και *επίσης* τον ρυθμό μεταβολής της θ που το στοιχείο του υλικού «αντιλαμβάνεται» καθόσον αυτό κινείται σε χωρικά *μη-ομοιόμορφο* πεδίο για την ποσότητα θ, $v\,(\partial\theta/\partial x)$.

Παρατήρηση 2: Εάν το πεδίο θ είναι ανεξάρτητο του χρόνου και εάν η ταχύτητα στοιχείου είναι κάθετη στο $\nabla\theta$ (δηλ. το στοιχείο κινείται κατά μήκος τροχιάς σταθερής θ) τότε, όπως αναμένεται και διαισθητικά, $D\theta/Dt = 0$.

Παρατήρηση 3 (γενίκευση σε τανυστικά πεδία): Η υλική παράγωγος που δρα σε ένα γενικό τανυστικό πεδίο λαμβάνει την ακόλουθη τελεστική μορφή

$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\overline{\nabla}(\,), \tag{6}$$

όπου στην περίπτωση ενός πεδίου **u** (π.χ. πεδίο μετατοπίσεων) που αποτελεί διανυσματικό πεδίο (δηλ. τανυστή 1ης τάξεως), η ποσότητα $\overline{\nabla}\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{e}}_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\widehat{\mathbf{e}}_j$ αποτελεί τανυστή 2ας τάξεως.

Σημείωση: Σε πλήρη γραφή έχουμε

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Για διανυσματικό πεδίο **u**, η Εξ. (6) δίνει

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})}_{\substack{\text{βαθμωτή}\\ \text{ποσότητα}}} - \mathbf{v}\times\underbrace{(\nabla\times\mathbf{u})}_{\text{διάνυσμα}}, \quad \text{σε διανυσματική γραφή,}$$

ή

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \text{σε γραφή με χρήση δεικτών.}$$

Σημείωση: Στην τελευταία περίπτωση γίνεται χρήση της λεγόμενης *σύμβασης δεικτών-άθροισης* (index and summation convention)

$$v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = v_1\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial u_i}{\partial x_3}.$$

Μία σύντομη παρουσίαση της γραφής με χρήση δεικτών καθώς και στοιχείων τανυστικού λογισμού παρατίθεται κατωτέρω στην ενότητα 3.

Παρατήρηση 4: Στην περίπτωση που υλικά σημεία (σωματίδια) *κινούνται* και *ταυτοχρόνως περιστρέφονται*, χρησιμοποιείται η λεγόμενη παράγωγος Jaumann.

Άσκηση 2: Να προσδιορισθεί η υλική παράγωγος $D\theta/Dt$ για το πεδίο ταχυτήτων και θερμοκρασίας της άσκησης 1.

Λύση: Είναι $\mathbf{v} = (kx_2)\widehat{\mathbf{e}}_1$ και $\theta = \lambda(x_1 + x_2)$.

Επειδή $\nabla\theta = \lambda(\widehat{\mathbf{e}}_1 + \widehat{\mathbf{e}}_2)$, έχουμε

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 + \lambda(k\,x_2\widehat{\mathbf{e}}_1)\cdot(\widehat{\mathbf{e}}_1 + \widehat{\mathbf{e}}_2) = \lambda k x_2.$$

3. ΤΑΝΥΣΤΕΣ – ΓΡΑΦΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΕΙΚΤΩΝ

Θεωρούμε τα σύμβολα a_i, b_{ij}, a_{ijk} και $a_{ijk\ell}$ που αποτελούν ομάδες ποσοτήτων αναλόγως των δεικτών τους.

$(a_1, a_2, a_3) : a_i$ όπου $(i = 1, 2, 3)$. Τα a_i αποτελούν ομάδα $3^1 = 3$ ποσοτήτων (στοιχείων).

$(b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33}) : b_{ij}$ όπου $(i, j = 1, 2, 3)$. Τα b_{ij} αποτελούν ομάδα $3^2 = 9$ ποσοτήτων.

Ομοίως έχουμε, τα a_{ijk} να αποτελούν ομάδα $3^3 = 27$ ποσοτήτων και τα $a_{ijk\ell}$ να αποτελούν ομάδα $3^4 = 81$ ποσοτήτων.

(α) Σύμβαση εύρους:

Όταν ένας δείκτης εμφανίζεται *μόνον μία φορά* σε έναν όρο, ο δείκτης λαμβάνει τις τιμές 1, 2 και 3, όταν αναφερόμαστε στον τρι-διάστατο χώρο.

(β) Σύμβαση αθροίσεως:

Όταν ένας δείκτης εμφανίζεται *δύο φορές στον ίδιο όρο*, αυτό σημαίνει *άθροισμα* των όρων που προκύπτουν, καθώς ο επαναλαμβανόμενος δείκτης λαμβάνει διαδοχικά τις τιμές 1, 2, 3.

Κανένας δείκτης *δεν είναι επιτρεπτό* να επαναληφθεί περισσότερο από μία φορά.

Παραδείγματα:

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_{13} b_3,$$

$$a_{ij} b_i c_j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_i c_j =$$

$$= a_{11} b_1 c_1 + a_{12} b_1 c_2 + a_{13} b_1 c_3 +$$

$$+ a_{21} b_2 c_1 + a_{22} b_2 c_2 + a_{23} b_2 c_3 +$$

$$+ a_{31} b_3 c_1 + a_{32} b_3 c_2 + a_{33} b_3 c_3 ,$$

$$a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3 .$$

Ο αριθμός των ελευθέρων δεικτών προσδιορίζει και τον αριθμό των ποσοτήτων που εκφράζονται με το εν λόγω σύμβολο:

$a_{ij}\, b_j$: εκφράζει $3^1 = 3$ ποσότητες (1 ελεύθερος δείκτης),

$a_{ji}\, b_{jk}$: εκφράζει $3^2 = 9$ ποσότητες (2 ελεύθεροι δείκτες),

$a_{ij}\, b_k$: εκφράζει $3^3 = 27$ ποσότητες (3 ελεύθεροι δείκτες).

Οι *επαναλαμβανόμενοι* δείκτες ονομάζονται και *άεργοι* ή *βωβοί* (dummy indices), αφού είναι αδιάφορο το συγκεκριμένο γράμμα το οποίο τους εκφράζει:

$$a_i b_i = a_\ell b_\ell , \quad a_{ii} = a_{jj} , \quad a_{ij} b_{jk} = a_{i\ell} b_{\ell k}$$

(σημειώστε την αναλογία με το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_b^a f(x)\, dx = \int_b^a f(t)\, dt).$$

(γ) Σύμβαση παραγωγίσεων:

Ο δείκτης κόμμα (,) που ακολουθείται από έναν δείκτη i υποδεικνύει μερική παράγωγο ως προς x_i.

Παραδείγματα:

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} , \qquad b_{ij,k} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} , \qquad c_{ij,k\ell} = \frac{\partial^2 c_{ij}}{\partial x_k \, \partial x_\ell}$$

(9 ποσότητες) (27 ποσότητες) (81 ποσότητες)

Προφανώς και εδώ ισχύουν οι προηγούμενες συμβάσεις. Έτσι:

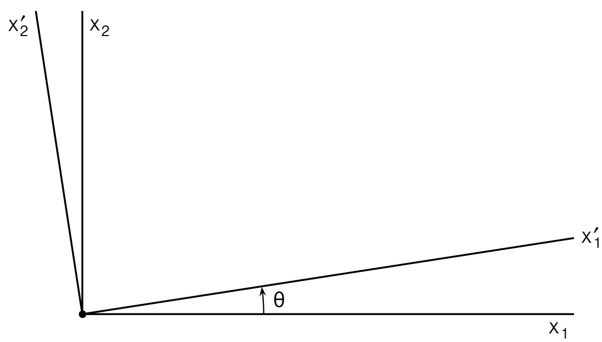
$$a_{i,i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3},$$

$$b_{ij,j} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial b_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial b_{i3}}{\partial x_3},$$

$$b_{i,jj} = \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_3^2}.$$

Στοιχεία Καρτεσιανών Τανυστών

Μετασχηματισμός συντεταγμένων:



(x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3'): δεξιόστροφα ορθογώνια συστήματα αξόνων με κοινή αρχή 0.

Το τυχόν σημείο P έχει συντεταγμένες x_i ως προς το πρώτο σύστημα, ενώ έχει συντεταγμένες x_i' ως προς το δεύτερο. Οι συντεταγμένες αυτές *συσχετίζονται* βάσει του γραμμικού μετασχηματισμού:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\ x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, \\ x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3, \end{aligned} \tag{1}$$

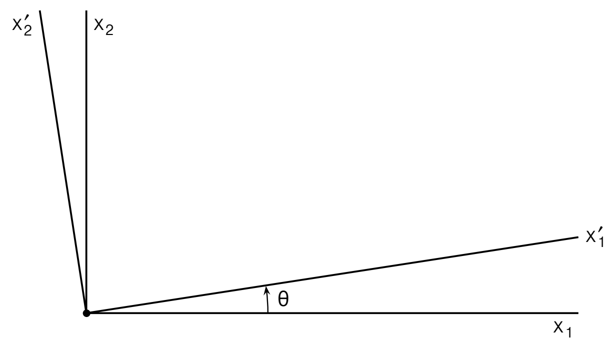
όπου οι εννέα ποσότητες a_{ij} καλούνται *συνημίτονα κατευθύνσεως* (direction cosines) και εκφράζουν τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζονται μεταξύ του i νέου άξονα (τονούμενου) και του j αρχικού άξονα (άτονου), δηλ.

$$a_{ij} = \cos(x'_i, x_j). \tag{2}$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας την γραφή με δείκτες, οι σχέσεις μετασχηματισμού (1) μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως

$$x'_i = a_{ij}\, x_j. \tag{3}$$

Παράδειγμα:



$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ασύμμετρος πίνακας}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ορισμοί τανυστών:

Τανυστής 1ης τάξεως (ή διάνυσμα) είναι το μέγεθος που ορίζεται από $3^1 = 3$ *βαθμωτές ποσότητες* (τις συνιστώσες του), οι οποίες μετασχηματίζονται από ένα σύστημα αξόνων x_i σε ένα άλλο x'_i υπακούοντας στον ακόλουθο *νόμο μετασχηματισμού*

$$A'_i = a_{ij} A_j, \tag{1}$$

όπου A_i : συνιστώσες τανυστή στο σύστημα x_i,
A'_i : συνιστώσες τανυστή στο σύστημα x'_i,
a_{ij} : συνημίτονα κατευθύνσεως.

Παραδείγματα τανυστών 1ης τάξεως: δύναμη, μετατόπιση, ταχύτητα.

Τανυστής 2ας τάξεως είναι το μέγεθος που ορίζεται από $3^2 = 9$ *βαθμωτές ποσότητες* (τις συνιστώσες του) A_{ij} που αναφέρονται σε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς x_i και οι οποίες *μετασχηματίζονται* σε ένα νέο σύστημα x'_i με βάση τον νόμο

$$A'_{ij} = a_{ik}\, a_{j\ell}\, A_{k\ell}. \tag{2}$$

Παραδείγματα τανυστών 2ας τάξεως: τάση σ_{ij}, τροπή ε_{ij}.

Τρίτης και μεγαλυτέρας τάξεως τανυστές ορίζονται με ανάλογο τρόπο.

Μητρωϊκή γραφή των σχέσεων ορισμού των τανυστών:

$$A'_i = a_{ij} A_j \qquad ή \qquad \{A'_i\} = [a_{ij}]\,\{A_j\},$$

$$A'_{ij} = a_{ik}\, a_{j\ell}\, A_{k\ell} \qquad ή \qquad [A'_{ij}] = [a_{ij}]\,[A_{ij}]\,[a_{ij}]^T, \qquad \text{κλπ.}$$

Συμμετρικοί και αντι-συμμετρικοί τανυστές:

$$D^{(\Sigma)}_{ij} = D^{(\Sigma)}_{ji} \equiv D_{(ij)},$$

$$D^{(A)}_{ij} = -D^{(A)}_{ji} \equiv D_{[ij]},$$

Κάθε *ασύμμετρος* τανυστής 2ας τάξεως μπορεί να αναλυθεί μοναδικά σε *άθροισμα συμμετρικού* και *αντι-συμμετρικού* τανυστή

$$D_{ij} = D_{(ij)} + D_{[ij]},$$

καθόσον

$$D_{(ij)} = \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{ji}),$$

$$D_{[ij]} = \frac{1}{2} (D_{ij} - D_{ji}).$$

4. ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (Χρονική Παράγωγος Ταχύτητας)

(i) Υλική περιγραφή

Ταχύτητα στοιχείου (σωματιδίου):

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \stackrel{\triangle}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}\text{-δεσμευμένο}} \equiv \frac{D\mathbf{x}}{Dt}, \tag{1}$$

όπου $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X}$. Στο παρόν κείμενο, το σύμβολο «$\stackrel{\triangle}{=}$» σημαίνει ισότητα εξ ορισμού ενώ το σύμβολο «$\equiv$» σημαίνει ισότητα εκ ταυτότητος.

Η σχέση (1) δίνει την ταχύτητα ενός στοιχείου ως συνάρτηση του χρόνου.

Επιτάχυνση στοιχείου:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) \stackrel{\triangle}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}\text{-δεσμευμένο}} \equiv \frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \tag{2}$$

(ii) Χωρική περιγραφή

Στην περίπτωση αυτή θα γνωρίζουμε την συνάρτηση $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Η ταχύτητα αυτή είναι η ταχύτητα ενός συγκεκριμένου υλικού σημείου που διέρχεται από την θέση $\mathbf{x}$ στην χρονική στιγμή t.

Έστω ότι

$$\mathbf{v} = v_1(x_1, x_2, x_3, t)\,\widehat{\mathbf{e}}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3, t)\,\widehat{\mathbf{e}}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3, t)\,\widehat{\mathbf{e}}_3$$

σε Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς.

Τότε η επιτάχυνση στοιχείου γράφεται ως

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{Dv_1}{Dt}\,\widehat{\mathbf{e}}_1 + \frac{Dv_2}{Dt}\,\widehat{\mathbf{e}}_2 + \frac{Dv_3}{Dt}\,\widehat{\mathbf{e}}_3, \tag{3}$$

όπου

$\downarrow$ τοπικός ρυθμός

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}. \tag{4}$$

[**Σημείωση:** Η χρησιμότητα της (4) είναι η εξής. Οι νόμοι της Δυναμικής χρησιμοποιούν την επιτάχυνση *(πραγματική)* ενός υλικού σημείου και *όχι* τους *τοπικούς ρυθμούς*. Επομένως, η Εξ. (4) δίνει την επιτάχυνση σε χωρική περιγραφή].

Σε συμπαγή μορφή, η Εξ. (3) γράφεται με χρήση δεικτών (σε *ορθογωνικό* σύστημα συντεταγμένων) ως

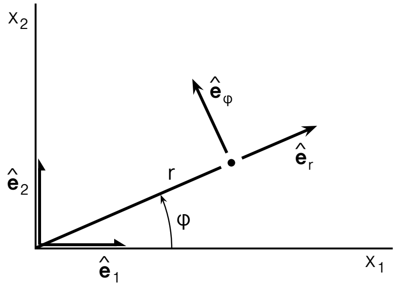
$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \tag{5}$$

ενώ σε *γενικό* σύστημα συντεταγμένων ως

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\overline{\nabla}\mathbf{v})\,\mathbf{v}, \tag{6}$$

όπου το μητρώο-στήλη $\left[(\overline{\nabla}\mathbf{v})\,\mathbf{v}\right]^{3\times1}$ δίνεται από τον πολλαπλασιασμό των μητρώων $\left[\overline{\nabla}\mathbf{v}\right]^{3\times3}\left[\mathbf{v}\right]^{3\times1}$.

Παράδειγμα καμπυλόγραμμου (μη-Καρτεσιανού) συστήματος συντεταγμένων:



$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$
$$\varphi = \tan^{-1}(x_2/x_1).$$

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi\right) \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r\right) \end{bmatrix}.$$

Τέλος, στην απλή μονοδιάστατη περίπτωση έχουμε την εξής σχέση που δίνει την επιτάχυνση στοιχείου:

$$a = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7}$$

τοπικός όρος ↑ (local term) ↑ όρος εκ μεταφοράς (convected part of the acceleration)

Άσκηση:

Δίνεται το εξής πεδίο ταχυτήτων (σε χωρική περιγραφή, δηλ. $v_1 = \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{X_i\text{-δεσμευμένα}}$)

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = \frac{x_2}{1+t}, \quad v_3 = \frac{x_3}{1+t}.$$

Να προσδιορισθούν: (α) το πεδίο επιταχύνσεων, και (β) οι σωματιδιακές τροχιές $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$.

[**Σημείωση:** Σωματιδιακή τροχιά (path line) είναι η γραμμή (καμπύλη, εν γένει) που ενώνει τα σημεία από τα οποία διαδοχικά διήλθε το συγκεκριμένο υλικό σημείο]

Λύση: (α) Επειδή $v_i = x_i/(1+t)$ είναι $\partial v_i/\partial t = -x_i/(1+t)^2$ και

$$[(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}] = [\nabla \mathbf{v}]\,[\mathbf{v}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+t} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+t} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1}{(1+t)^2} \\ \dfrac{x_2}{(1+t)^2} \\ \dfrac{x_3}{(1+t)^2} \end{bmatrix},$$

οι συνιστώσες της επιταχύνσεως δίνονται ως

$$a_1 = \frac{Dv_1}{Dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \big((\overline{\nabla}\mathbf{v})\mathbf{v}\big)_1 = -\frac{x_1}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{(1+t)^2} = 0,$$

και ομοίως

$$\frac{Dv_2}{Dt} = \frac{Dv_3}{Dt} = 0.$$

Παρατήρηση: Αν και σε δεδομένη σταθερή θέση του χώρου, η ταχύτητα δείχνει να μεταβάλλεται (δηλ. $\partial v_i/\partial t \neq 0$), η *πραγματική* ταχύτητα του συγκεκριμένου σωματιδίου είναι σταθερή (δηλ. $Dv_i/Dt = 0$).

(β) Έχουμε

$$v_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{X_i\text{-δεσμευμένα}} = \frac{x_1}{1+t} \Rightarrow$$

$$\int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_0^t \frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_1 \Big|_{X_1}^{x_1} = \ln(1+t)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x_1}{X_1}\right) = \ln(1+t) \Rightarrow x_1 = X_1(1+t).$$

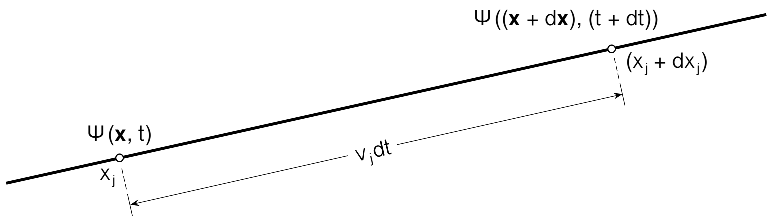
Ομοίως βρίσκουμε ότι $x_2 = X_2(1+t)$ και $x_3 = X_3(1+t)$.

Κατωτέρω, παρουσιάζεται επίσης ένας **εναλλακτικός** τρόπος εξαγωγής της εκφράσεως της **υλικής παραγώγου**

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + v_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j},$$

όπου ψ είναι τανυστής οποιασδήποτε τάξεως:

Η *τοπική παράγωγος* (τοπικός ρυθμός) $\partial(\ )/\partial t$ μετρείται από παρατηρητή τοποθετημένο (ακίνητο) σε συγκεκριμένο σημείο $\mathbf{x}$ (x_j), ενώ η *υλική παράγωγος* $D(\ )/Dt$ μετρείται από παρατηρητή κινούμενο μαζί με το υλικό σημείο $\mathbf{X}$.



Την χρονική στιγμή (t + dt) ο παρατηρητής βρίσκεται στο σημείο του χώρου $(x_j + dx_j)$ και μετρά την τιμή του πεδίου $\psi\big((x_j + dx_j),\ (t + dt)\big)$. Προσεγγίζοντας την τελευταία έκφραση με ανάπτυγμα σειράς Taylor έχουμε

$$\psi\big((x_j + dx_j), (t + dt)\big) =$$

$$= \psi(x_j, t) + \frac{\partial \psi(x_j, t)}{\partial t}\, dt + \frac{\partial \psi(x_j, t)}{\partial x_j}\, dx_j + \cdots .$$

Οπότε η *αλλαγή* που παρατηρείται είναι

$$\psi\big((x_j + dx_j), (t + dt)\big) - \psi(x_j, t) =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dt + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\, dx_j + \cdots ,$$

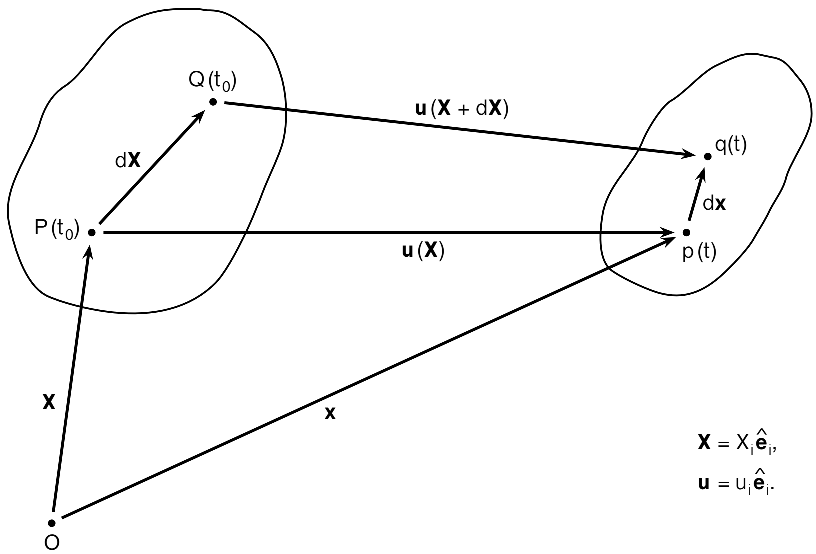
ενώ η *έκφραση ορισμού της* υλικής παραγώγου

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + v_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

προκύπτει πλέον εμφανώς παρατηρώντας ότι $dx_j = v_j\, dt$.

5. ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Κλίση (Βαθμίδα) της Μετατοπίσεως σε Τρεις Διαστάσεις



Εξετάζονται δύο γειτονικά σημεία P και Q στην «αρχική» (απαραμόρφωτη) και την «τελική» (παραμορφωμένη) κατάσταση του σώματος.

Τότε έχουμε:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \underset{\downarrow\ \text{μετατόπιση}}{\mathbf{u}}\,(X,\, t), \tag{1}$$

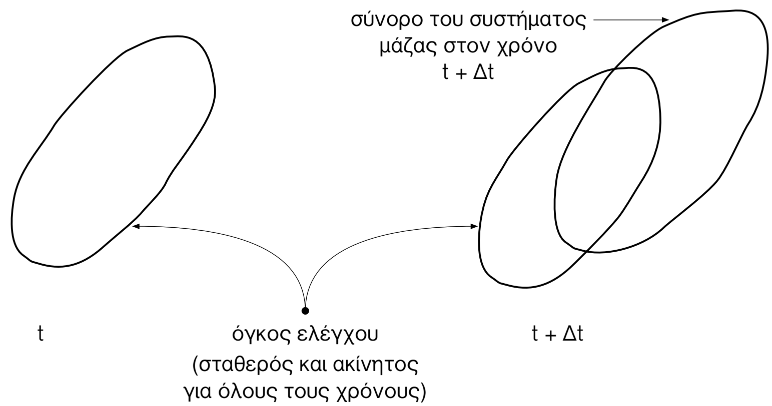
$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}\,(\mathbf{X} + d\mathbf{X},\, t) - \mathbf{u}\,(\mathbf{X},\, t) \Rightarrow$$

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \left(\overline{\nabla}\mathbf{u}\right) d\mathbf{X}, \tag{2}$$

όπου η κλίση του διανυσματικού πεδίου μετατοπίσεων (displacement gradient) έχει την έκφραση

$$\left[\overline{\nabla}\mathbf{u}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Οι Έννοιες του Όγκου Ελέγχου και του Συστήματος Μάζας

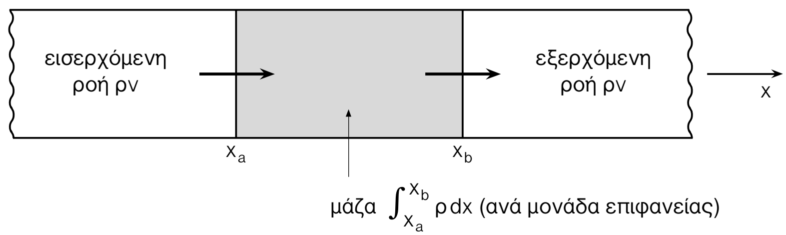


Στον χρόνο t, δεδομένη μάζα του ρευστού περιέχεται στον όγκο ελέγχου. Στον χρόνο t + Δt, ένα τμήμα του ρευστού μετακινείται εκτός του όγκου ελέγχου (εκροή) ενώ ένα άλλο τμήμα εισέρχεται εντός του όγκου ελέγχου (εισροή).

6. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ REYNOLDS

(Reynolds transport theorem) [Reynolds 1903, Spielrein 1916]

Χρησιμότητα: Για την διερεύνηση των νόμων διατήρησης (μάζας, ορμής, ενέργειας) είναι απαραίτητο να προσδιορισθούν οι χρονικοί ρυθμοί μεταβολής ολοκληρωμάτων.



Θεωρείται η *χωρική* περιγραφή της περιοχής $x_a \leqslant x \leqslant x_b$, η οποία περιέχει ένα κινούμενο σύστημα μάζας.

Ολική ποσότητα (π.χ. μάζα) που *στιγμιαία* περιέχεται ή φέρεται από το σύστημα μάζας: $\int_{x_a}^{x_b} f(x,t)\,dx$ (ανά μονάδα επιφανείας). Π.χ. η f μπορεί να παριστά την πυκνότητα ή την ορμή.

Ολικός ρυθμός μεταβολής συγκεκριμένης ποσότητας:

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{x_a}^{x_b} f(x,t)\,dx\right) \triangleq$$

$$\triangleq \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt}\left[\int_{x_a'}^{x_b'} f(x', t+dt)\,dx' - \int_{x_a}^{x_b} f(x,t)\,dt\right] \tag{1}$$

↑ (μετά την παρέλευση χρόνου dt, το σύνορο που περικλείει το σύστημα μάζας έχει μετακινηθεί σε άλλη θέση) ($x' = x + v\,dt$).

Εκμεταλλευόμενοι τώρα την έννοια της *υλικής παραγώγου* (και επειδή οι μεταβλητές x και t είναι *ανεξάρτητες* στην χωρική περιγραφή) έχουμε

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{x_a}^{x_b} f(x,t)\cdot dx\right) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{D}{Dt}(f\cdot dx) =$$

$$= \int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{Df}{Dt}\,dx + f\,\frac{D(dx)}{Dt}\right) =$$

$$= \int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} + f\cdot\partial v\,\frac{1}{\partial x}\right) dx =$$

$$= \int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx =$$

$$= \int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(v\cdot f)}{\partial x}\right] dx =$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + \Big[f(x,t)\cdot v(x,t)\Big]\Bigg|_{x=x_a}^{x=x_b}. \qquad (2)$$

↑	↑
ρυθμός μεταβολής εντός της περιοχής που *στιγμιαία* καταλαμβάνει το θεωρούμενο σύστημα μάζας	διαφορά των ρυθμών της εισερχόμενης και εξερχόμενης ροής [(εκροή) - (εισροή)]

Με εναλλακτικό τρόπο, ο ρυθμός μεταβολής που ορίζεται στην (1) μπορεί να προσδιορισθεί ως εξής:

↓ αλλαγή μεταβλητής

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{x_a}^{x_b} f(x,t)\,dx\right) = \frac{D}{Dt}\left(\int_{X_a}^{X_b} f\big[x(X,t)\big]\cdot\frac{\partial x}{\partial X}\,dX\right) =$$

↑ Ιακωβιανή του μετασχηματισμού

[**Σημείωση:** Στην περίπτωση της υλικής περιγραφής το σύνορο του συστήματος μάζας είναι ανεξάρτητο του χρόνου, και επομένως, η παράγωγος ως προς τον χρόνο μπορεί να μεταφερθεί εντός του ολοκληρώματος]

$$= \int_{X_a}^{X_b} \left(\frac{\partial x}{\partial X} \cdot \frac{D}{Dt} f\left[x(X,t)\right] + f\left[x(X,t)\right] \cdot \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) \right) dX =$$

$$= \int_{X_a}^{X_b} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial X} \right] dX, \tag{3}$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε το αποτέλεσμα για την *υλική παράγωγο* σε χωρική περιγραφή και το γεγονός ότι

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X}. \tag{4}$$

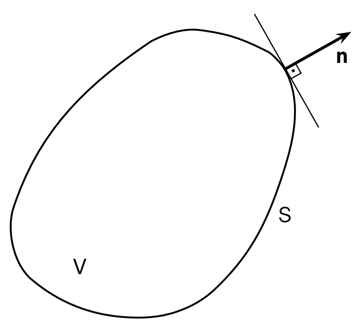
Με βάση τα ανωτέρω, ο ρυθμός που ορίζεται στην (1) δίνεται από την έκφραση στην Εξ. (2).

Η λεκτική διατύπωση του Θεωρήματος Reynolds έχει ως εξής:

$$\left(\begin{array}{c} \text{ρυθμός αλλαγής μιας} \\ \text{συγκεκριμένης ποσότητας} \\ \text{του συστήματος μάζας} \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{ρυθμός αλλαγής της} \\ \text{ποσότητας που στιγμιαία} \\ \text{περιέχεται εντός} \\ \text{του όγκου ελέγχου} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{διαφορά των ρυθμών} \\ \text{της ποσότητας κατά} \\ \text{την εκροή και εισροή} \end{array} \right).$$

Θεώρημα Reynolds σε 3 διαστάσεις:



$$\frac{D}{Dt}\left(\int_V f\,dV\right) = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int_S f\,v_j n_j\,dS = \int_V \left(\frac{Df}{Dt} + f\,\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) dV.$$

↑ εφαρμογή Θεωρήματος Green - Gauss

Η τελευταία σχέση γράφεται ως

$$\cdots = \int_V \left(\frac{Df}{Dt} + f\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) dV$$

↑ όγκος ελέγχου

καθόσον ισχύει

$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + \underbrace{(\nabla(\,)\cdot\mathbf{v})}_{v_j \frac{\partial(\,)}{\partial x_j}}.$$

Σημείωση: Θεώρημα αποκλίσεως των Green-Gauss

$$\int_S v_j n_j\,dS = \int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\,dV,$$

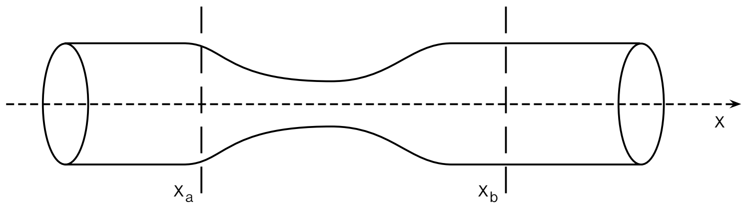
$$\int_S (f v_j) n_j\,dS = \int_V \frac{\partial (f v_j)}{\partial x_j}\,dV.$$

Για την γραφή του τελευταίου αποτελέσματος (Θεώρημα Reynolds σε 3 διαστάσεις), οι πράξεις αναλυτικά έχουν ως εξής:

$$\cdots = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int_S f\,v_j n_j\,dS = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (f v_j)}{\partial x_j}\right) dV =$$

$$= \int_V \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + v_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}}_{\frac{Df}{Dt}} + f\,\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) dV.$$

7. ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ Ή ΝΟΜΟΙ ΙΣΟΖΥΓΙΟΥ ΣΕ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ



7.1. Διατήρηση της Μάζας

Στα πλαίσια της Νευτώνειας (κλασσικής) Μηχανικής, η μάζα ούτε καταστρέφεται ούτε παράγεται. Για να περιγραφεί με μαθηματικούς όρους ο νόμος αυτός, ορίζουμε τις ποσότητες

$\rho(x,t)$: η πυκνότητα μάζας (mass density) στην θέση x και στον χρόνο t σε χωρική περιγραφή.

$\rho_0(X)$: η πυκνότητα μάζας στην κατάσταση αναφοράς (reference configuration) του σώματος, δηλ. σε χρόνο $t_0 = 0$.

Ο νόμος διατηρήσεως διατυπώνεται τότε ως εξής

$$\int_{x_a}^{x_b} \rho(x,t)\,dx = \int_{X(x_a,t)}^{X(x_b,t)} \rho_0(X)\,dX \;\Rightarrow \tag{1}$$

(αλλαγή μεταβλητής $x = x(X, t)$)

$$\int_{X(x_a,t)}^{X(x_b,t)} \rho(x,t)\cdot \frac{\partial x(X,t)}{\partial X}\,dX = \int_{X(x_a,t)}^{X(x_b,t)} \rho_0(X)\,dX \;\Rightarrow$$

$$\rho_0(X) = \rho(x,t)\cdot \frac{\partial x(X,t)}{\partial X}\,. \tag{2}$$

Σημείωση: Η σχέση (2) δείχνει ότι η πυκνότητα του υλικού σε μια κατάσταση καθορίζει και τις πυκνότητες σε άλλες (επόμενες) καταστάσεις.

Ο νόμος διατηρήσεως διατυπώνεται επίσης *εναλλακτικά* (και σε πιο εύχρηστη μορφή) ως εξής

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{x_a}^{x_b} \rho\,(x,t)\,dx\right) = 0, \tag{3}$$

που σημαίνει ότι ο *ρυθμός μεταβολής* της μάζας του συστήματος των σωματιδίων *μηδενίζεται* σε *τυχαία* περιοχή $x_a \leqslant x \leqslant x_b$.

Κατόπιν, η εφαρμογή του Θεωρήματος Reynolds στην Εξ. (3) δίνει την έκφραση

$$\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}\right] dx = 0, \tag{4}$$

η οποία σε τοπική ή διαφορική μορφή (local or differential form) γράφεται ως

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \qquad \text{(εξίσωση συνέχειας)} \tag{5}$$

ή εναλλακτικά επίσης ως

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Σημειώνεται ότι η μετάβαση από την (4) στην (5), ανωτέρω, ισχύει καθόσον οι συναρτήσεις ρ και v υποτίθενται *συνεχείς* και το διάστημα ολοκληρώσεως ελήφθη ως *τυχαίο*.

Πράγματι, η μετάβαση αυτή βασίζεται στο εξής Θεώρημα.

Θεώρημα: Εάν $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[c,d]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ για όλα τα a και b που ανήκουν στο διάστημα $[c,d]$, δηλ. για $c < a < b < d$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε x στο $[c,d]$.

Απόδειξη: («διά της εις άτοπον απαγωγής»). Έστω ότι το θεώρημα είναι εσφαλμένο $\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in (c,d)$ έτσι ώστε $f(x_0) \neq 0$, και έστω $f(x_0) > 0$ (η περίπτωση $f(x_0) < 0$ αναλύεται αναλόγως) $\Rightarrow$ (από την συνέχεια της συνάρτησης) $\exists\, \delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) > 0$ για όλα τα x στο διάστημα $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ $\Rightarrow$ θέτοντας $a = x_0 - \delta$ και $b = x_0 + \delta$, έχουμε $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ καθόσον έχει υποτεθεί ότι $f(x) > 0$ στο διάστημα $[a, b]$. Βεβαίως, το τελευταίο αποτέλεσμα βρίσκεται σε *αντίθεση* με το δεδομένο ότι $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

(Σημείωση: Το γεγονός ότι $f(c) = f(d) = 0$ οφείλεται στην συνέχεια της συνάρτησης f).

Παρατήρηση:

Η Εξ. (6) γράφεται ως

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{D\rho}{Dt} = -\,\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

η οποία δείχνει ότι εάν έμπροσθεν του συγκεκριμένου σωματιδίου υπάρχει *πύκνωση* των σωματιδίων (δηλ. αύξηση της πυκνότητας λόγω της συσσωρεύσεως τους) τότε είναι φυσικό να αναμένεται *μείωση* της ταχύτητας σε σχέση με την κατάσταση όπισθεν του σωματιδίου όπου τα σωματίδια είναι αραιωμένα και, επομένως, κινούνται με μεγαλύτερες ταχύτητες. Ως φυσικό ανάλογο μπορεί να σκεφθεί κανείς μια πομπή αυτοκινήτων (τα αυτοκίνητα παίζουν τον ρόλο των υλικών σωματιδίων).

Η Εξ. (5) καλείται *εξίσωση συνέχειας* (continuity equation). Για την εξαγωγή της, στην περίπτωση των *ρευστών*, υποτίθεται ότι δεν υπάρχουν πηγές (sources) ή απώλειες (sinks) του ρευστού εντός του θεωρούμενου όγκου ελέγχου. Αργότερα θα διερευνηθεί και αυτή η περίπτωση.

Στην γενική τρι-διάστατη περίπτωση, η εξίσωση συνέχειας γράφεται (σε σχέση με ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0\,, \qquad (7)$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{8}$$

όπου $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$ και $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, ενώ $i = 1, 2, 3$.

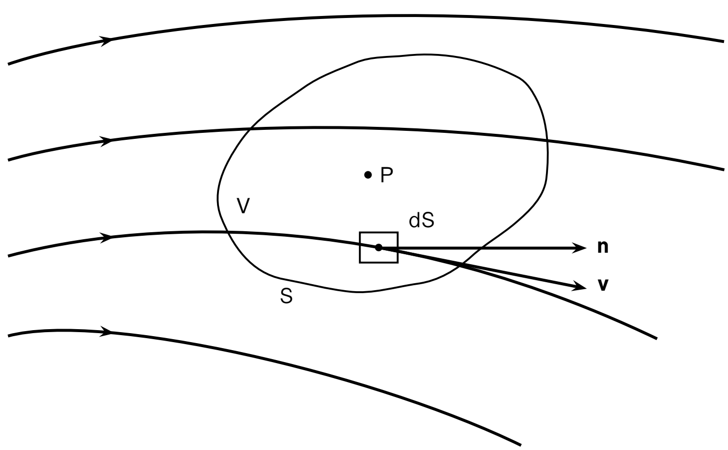
Σε γενικό (καμπυλόγραμμο) σύστημα συντεταγμένων έχουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{9}$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{10}$$

Υπενθύμιση: Τελεστής αποκλίσεως (divergence)



Ορισμός:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(P) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{V \to 0} \frac{\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS}{V}.$$

Τελεστής αποκλίσεως σε Καρτεσιανό σύστημα:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Τελεστής αποκλίσεως σε σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

(συντεταγμένες r, φ, z).

Ακολούθως, θα εξαχθεί ένα άλλο αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιηθεί κατόπιν για την διατύπωση των Νόμων Ισοζυγίου της Ορμής και της Ενέργειας. Θα χρησιμοποιηθεί η Εξ. (5), δηλ. ότι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

και το Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds, δηλ. ότι

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{x_a}^{x_b} f(x,t)\, dx\right) = \int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (f v)}{\partial x}\right] dx, \tag{11}$$

όπου $\rho = \rho(x, t)$ και $f = f(x, t)$.

Πράγματι, βάσει της Εξ. (11) γράφουμε

$$\frac{D}{Dt}\int_{x_a}^{x_b} \rho f\, dx = \int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{\partial (\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho f v)}{\partial x}\right] dx \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{x_a}^{x_b} \rho f\, dx = \int_{x_a}^{x_b} \rho \frac{Df}{Dt}\, dx, \tag{12}$$

όπου ρ η πυκνότητα και f τυχαία συνεχής συνάρτηση.

Τέλος, στην γενική τρι-διάστατη περίπτωση θα έχουμε:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(x_i)} \rho(x_i, t)\cdot f(x_i, t)\, dV(x_i) =$$

$$= \int_{V(x_i)} \rho(x_i, t)\cdot \frac{Df(x_i, t)}{Dt}\, dV(x_i). \tag{13}$$

Άσκηση 1:

Τα υλικά σημεία (σωματίδια) ενός ρευστού κινούνται με πεδίο ταχυτήτων $v_i = x_i/(1+t)$. Να προσδιορισθεί η πυκνότητα ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση: Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \underset{\downarrow \text{ σύμβαση αθροίσεως}}{\Rightarrow} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+t}\right) =$$

$$= -\frac{3\rho}{1+t} \underset{(\text{ολοκλήρωση})}{\Rightarrow}$$

$$\int \frac{D\rho}{\rho} = -3\int \frac{Dt}{1+t} \Rightarrow \ln\rho = -3\ln(1+t) + A,$$

όπου A η σταθερά ολοκληρώσεως.

Εάν $\rho = \rho_0$ για $t = 0$, τότε $A = \ln\rho_0$ και επομένως

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1+t)^3}.$$

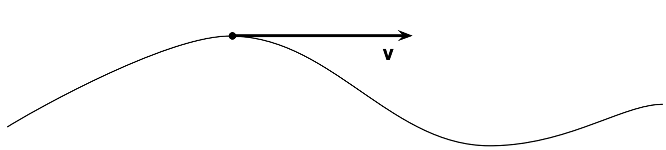
Άσκηση 2:

Δίνεται το ακόλουθο πεδίο ταχυτήτων και πυκνότητας ενός ρευστού $v_1 = x_1/(1+t)$, $v_2 = v_3 = 0$, $\rho = \rho_0/(1+t)$, όπου ρ_0 σταθερά.

(α) Να ελεγχθεί κατά πόσο ισχύει η εξίσωση συνέχειας.

(β) Να προσδιορισθεί η ολική μάζα και ο ρυθμός αλλαγής της μάζας εντός όγκου ελέγχου με διατομή A και σημεία εισροής και εκροής $x_1 = 1$ και $x_1 = 3$, αντιστοίχως.

(γ) Να προσδιορισθεί η διαφορά (εκροής) - (εισροής) στον προηγούμενο όγκο ελέγχου.



Λύση:

(α) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x_1} =$$

$$= -\frac{\rho_0}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{(1+t)}(0) + \frac{\rho_0}{(1+t)^2} = 0,$$

οπότε διαπιστώνεται ότι η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται.

(β) Η ολική μάζα εντός του όγκου ελέγχου στον χρόνο t είναι

$$m(t) = \int_V \rho(x,t)\, dV = \int_{x_1=1}^{x_1=3} \frac{\rho_0}{1+t} A\, dx_1 = \frac{A\rho_0}{1+t}(2) = \frac{2A\rho_0}{1+t},$$

ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είναι

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{2A\rho_0}{(1+t)^2},$$

δηλ. η μάζα *μειώνεται*.

(γ) Προφανώς, δεν υπάρχει ούτε εισροή ούτε εκροή ρευστού από τις πλευρικές επιφάνειες του όγκου ελέγχου, παρά μόνον στις διατομές των θέσεων $x_1 = 1$ και $x_1 = 3$. Επομένως

εισροή: $$(\rho A v)_{x_1=1} = \frac{\rho_0 A}{(1+t)^2},$$

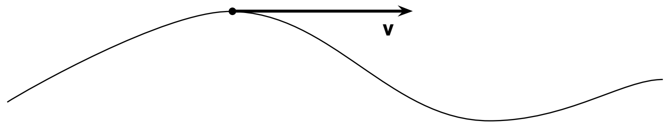
εκροή: $$(\rho A v)_{x_1=3} = \frac{3\rho_0 A}{(1+t)^2},$$

ενώ η διαφορά τους (εκροή) – (εισροή) $= -\dfrac{2\rho_0 A}{(1+t)^2}$,

συμφωνεί με το αποτέλεσμα (β).

Μερικές βασικές έννοιες της Μηχανικής των Ρευστών:

Γραμμή ροής (streamline) στον χρόνο t είναι μια καμπύλη που έχει την ιδιότητα, σε κάθε σημείο της, η εφαπτομένη γραμμή να έχει την διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας του σωματιδίου που καταλαμβάνει εκείνη την στιγμή το δεδομένο σημείο.



Εάν $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ είναι η παραμετρική εξίσωση της γραμμής ροής στον χρόνο t_0 η οποία διέρχεται από το δεδομένο σημείο $\mathbf{x}_0$, τότε θα ισχύει

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0), \\ &\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned}\right\} .$$

Άσκηση 3:

Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων $v_1 = x_1/(1 + t)$, $v_2 = x_2$, $v_3 = 0$. Να προσδιορισθεί η γραμμή ροής, στον χρόνο t_0, που διέρχεται από το σημείο (a_1, a_2, a_3).

Λύση: Έχουμε

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{x_1}{1 + t_0} \Rightarrow \int_{a_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{1}{1 + t_0} \int_0^s ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x_1 - \ln a_1 = \frac{s}{1 + t_0} \Rightarrow x_1 = a_1 \exp\left(\frac{s}{1 + t_0}\right).$$

Ομοίως,

$$\frac{dx_2}{ds} = x_2 \Rightarrow \int_{a_2}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_0^s ds \Rightarrow x_2 = a_2 \exp(s),$$

ενώ $x_3 = a_3$.

(Σημείωση: Οι γραμμές ροής δεν διασταυρώνονται ποτέ).

Σωματιδιακή τροχιά ή γραμμή (pathline) είναι η γραμμή που ενώνει τις διαδοχικές θέσεις ενός σωματιδίου. Η σωματιδιακή τροχιά ενός σωματιδίου (υλικού σημείου) που βρίσκεται στην θέση **X** στον χρόνο t_0 μπορεί να προσδιορισθεί από το πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad \text{η σωματιδιακή τροχιά}, \\ &\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \\ &\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}\,. \end{aligned}\right\}$$

Άσκηση 4:

Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων $v_1 = x_1/(1 + t)$, $v_2 = x_2$, $v_3 = 0$. Να προσδιορισθεί η σωματιδιακή τροχιά του σωματιδίου που βρισκόταν στην θέση (X_1, X_2, X_3) στον χρόνο t_0.

Λύση: Έχουμε

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{1+t} \Rightarrow \int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_1 - \ln X_1 =$$

$$= \ln(1+t) - \ln(1+t_0) \Rightarrow x_1 = X_1 \frac{1+t}{1+t_0}\,.$$

Ομοίως,

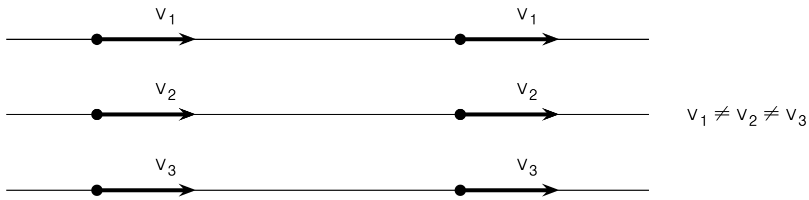
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \Rightarrow \int_{X_2}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow x_2 = X_2 \exp(t - t_0)\,.$$

Προφανώς επίσης $x_3 = X_3$.

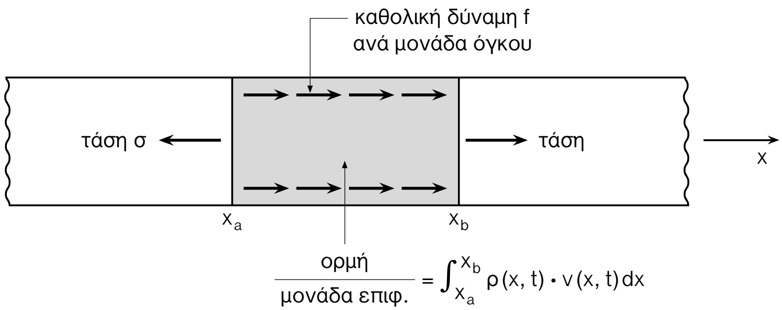
Μόνιμη ροή (steady flow) σε δεδομένη σταθερή θέση **x** καλείται η ροή για την οποία ισχύει $\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}\text{-δεσμευμένο}} = 0$ όπου ψ είναι οποιαδήποτε εξαρτημένη μεταβλητή (π.χ. η ταχύτητα). Σε μόνιμη ροή μπορεί πάντως να έχουμε $\dfrac{D\psi}{Dt} \neq 0$, γενικώς.

(Σημείωση: Στις μόνιμες ροές, οι σωματιδιακές τροχιές συμπίπτουν με τις γραμμές ροής).

Στρωτή ροή (laminar flow) είναι μια ειδική περίπτωση μόνιμης ροής στην οποία οι ταχύτητες όλων των σωματιδίων σε κάθε γραμμή ροής είναι ίδιες, ενώ τα σωματίδια σε διαφορετικές γραμμές ροής μπορούν να έχουν διαφορετικές ταχύτητες.



7.2. Ισοζύγιο Ορμής (balance of momentum)



Σημείωση: *Καθολικές δυνάμεις* καλούνται οι δυνάμεις που ασκούνται σε *όλα* τα σημεία (σωματίδια) ενός συνεχούς μέσου. Τυπικά παραδείγματα καθολικών δυνάμεων είναι η βαρύτητα, ηλεκτρομαγνητικές δράσεις, δυνάμεις αντιστάσεως λόγω τριβής ενός ρευστού σε τοιχώματα αγωγού, φυγόκεντρες δυνάμεις. Π.χ.

$f_z = -\rho g$ λόγω βαρύτητας (ο z-άξονας λαμβάνεται θετικός προς τα άνω: $\uparrow z$),

$f_x = -\mathbb{C}v$ λόγω αντιστάσεως τριβής (όπου $\mathbb{C}$ η σταθερά αντίστασης (coefficient of drag), v η ταχύτητα του ρευστού).

Ο νόμος ισοζυγίου (ή διατηρήσεως) της ορμής λέγει ότι ο στιγμιαίος ρυθμός αλλαγής της γραμμικής ορμής ενός συστήματος μάζας ισούται με την συνισταμένη εξωτερική δύναμη που δρα στο σύστημα στην συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Η μαθηματική διατύπωση του νόμου αυτού έχει ως εξής:

$$\sigma(x,t)\Big|_{x=x_a}^{x=x_b} + \int_{x_a}^{x_b} f(x,t)\,dx = \frac{D}{Dt}\left(\int_{x_a}^{x_b} \rho(x,t)\cdot v(x,t)\,dx\right), \qquad (1)$$

όπου $\sigma(x, t)$ είναι η τάση σε *χωρική* περιγραφή και $f(x, t)$ είναι η καθολική δύναμη ανά μονάδα όγκου (με διαστάσεις [δύναμη] [μήκος]$^{-3}$).

Περαιτέρω, γράφοντας το αριστερό μέλος της (1) ως *ολοκλήρωμα* και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα προηγούμενης ενότητας

$$\frac{D}{Dt}\int_{x_a}^{x_b} \rho F\,dx = \int_{x_a}^{x_b} \rho\,\frac{DF}{Dt}\,dx,$$

η Εξ. (1) λαμβάνει την εξής μορφή (που αποτελεί τον 2ο νόμο του Νεύτωνα)

$$\int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} + f\right)dx = \int_{x_a}^{x_b} \rho(x,t)\cdot\frac{Dv(x,t)}{Dt}\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + f = \rho\,\frac{Dv}{Dt} \qquad \text{(σε τοπική ή διαφορική μορφή).} \qquad (2)$$

(Σημείωση: Ισχύει $\dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\,\dfrac{\partial v}{\partial x}$).

Η Εξ. (2) είναι η λεγόμενη εξίσωση κινήσεως (equation of motion) σε χωρική περιγραφή.

Σε *υλική περιγραφή* τώρα, εκκινούμε από την Εξ. (1) και αλλάζουμε μεταβλητή σύμφωνα με την σχέση (απεικόνιση) $x = x(X, t)$, ενώ χρησιμοποιούμε και την σχέση $\rho_0(X) = \rho(x,t)\cdot\left[\partial x(X,t)/\partial X\right]$ που συνδέει τις πυκνότητες στην αρχική θέση και στην θεωρούμενη θέση x μετά παρέλευση χρόνου t (αρχή διατηρήσεως της μάζας). Έτσι, η εξίσωση κινήσεως στην υλική περιγραφή γράφεται ως

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial X} + F = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{3}$$

όπου $\Sigma(X, t) \equiv \sigma[x(X, t), t]$ είναι η τάση, F η καθολική δύναμη, και $v(X, t) \triangleq \partial x(X, t)/\partial t$ η ταχύτητα στοιχείου σε υλική περιγραφή.

Εάν περαιτέρω υποθέσουμε έναν *καταστατικό νόμο* της μορφής $\Sigma = \mathscr{F}(\partial U/\partial X)$, όπου $\partial U/\partial X$ η βαθμίδα της μετατοπίσεως, τότε η εξίσωση κινήσεως σε υλική περιγραφή και με απουσία καθολικών δυνάμεων (υποθέτοντας δηλ. μηδενικές καθολικές δυνάμεις) γράφεται ως

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{4}$$

όπου

$$c = \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{d\mathscr{F}}{d\left(\dfrac{\partial U}{\partial X}\right)} \right]^{1/2}, \tag{5}$$

είναι η ταχύτητα (εν γένει, μη-σταθερή) κινήσεως της διαταραχής. Η ταχύτητα αυτή *(ταχύτητα διαδόσεως κύματος – wave velocity)* είναι *διαφορετική* από την ταχύτητα στοιχείου (particle velocity).

7.3. Ισοζύγιο Ενέργειας (balance of energy)

Ο νόμος ισοζυγίου (ή διατήρησης) της ενέργειας λέγει ότι ο ρυθμός μεταβολής του αθροίσματος της *εσωτερικής* (π.χ. παραμορφωσιακής) *ενέργειας, της κινητικής ενέργειας* και της *ενέργειας λόγω βαρύτητας* ενός συστήματος μάζας **ισούται** με τον ρυθμό μεταβολής της *θερμότητας* (απορρόφηση θερμότητας) και τον ρυθμό μεταβολής του *έργου των εξωτερικών δυνάμεων*. Ο νόμος αυτός αποτελεί τον 1ο νόμο της Θερμοδυναμικής.

Για την μαθηματική διατύπωση του νόμου αυτού, θεωρούμε πάλι την περιοχή $x_a \leqslant x \leqslant x_b$ και συμβολίζουμε με $\mathscr{E}(x, t)$ *την εσωτερική ενέργεια* ανά μονάδα μάζας. Τότε η *ενέργεια* E που είναι αποταμιευμένη στην συγκεκριμένη περιοχή δίνεται ως

$$E = \int_{x_a}^{x_b} \rho\, \mathscr{E}\, dx. \tag{1}$$

Η *κινητική ενέργεια* επίσης δίνεται ως

$$K = \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_b} \rho\, v^2\, dx. \tag{2}$$

Η *ενέργεια λόγω βαρύτητας* (gravitational energy) εξαρτάται από την κατανομή της μάζας και γράφεται ως

$$G = \int_{x_a}^{x_b} \rho\, \varphi(x)\, dx, \tag{3}$$

όπου φ είναι το δυναμικό της βαρύτητας ανά μονάδα μάζας. Στην συνήθη περίπτωση ομοιομόρφου πεδίου βαρύτητας, έχουμε

$$G = \int_{x_a}^{x_b} \rho\, g z\, dx, \tag{4}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας και το ύψος z δείχνει την στάθμη που βρίσκεται το σώμα σε διεύθυνση αντίθετη από αυτήν του πεδίου βαρύτητας.

Τότε, ο *νόμος διατηρήσεως της ενέργειας* γράφεται ως

$$\frac{D}{Dt}(E + K + G) = \dot{Q} + \dot{W}, \tag{5}$$

όπου $\dot{Q}$ και $\dot{W}$ είναι οι ρυθμοί μεταβολής της θερμικής ενέργειας Q και του έργου των εξωτερικών δυνάμεων W. Σημειώνεται ότι $\dot{Q} \equiv \partial Q/\partial t$ και $\dot{W} \equiv \partial W/\partial t$ καθόσον οι ενέργειες Q και W είναι *αντικειμενικές* ποσότητες (δηλ. «πραγματικές» ποσότητες) που δεν επηρεάζονται με κανέναν τρόπο από τις κινήσεις ενός παρατηρητή.

Σημειώνεται επίσης ότι, όπως θα φανεί και από τις εκφράσεις των $\dot{Q}$ και $\dot{W}$, οι ποσότητες αυτές εξαρτώνται μόνον από τις «ακραίες» τιμές που λαμβάνουν οι συναρτήσεις «ροής» (θερμική ροή και τάση) και η ταχύτητα στο σύνορο της θεωρούμενης περιοχής.

Σημείωση: Οι Green και Rivlin (1964) έδειξαν ότι οι αρχές διατηρήσεως της ορμής και στροφορμής *εξάγονται* από την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας με την απαίτηση του αναλλοιώτου σε μετασχηματισμούς συντεταγμένων (observer transformations). Τούτο σημαίνει ότι η αρχή διατηρήσεως της ενέργειας είναι η πλέον γενική αρχή διατηρήσεως.

Περαιτέρω, ο ρυθμός $\dot{Q}$ μπορεί να εκφρασθεί μέσω της *θερμικής ροής* $q(x, t)$ ως

$$\dot{Q} = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx. \tag{6}$$

Η θερμική ροή έχει μονάδες $[q] =$ [ισχύς] [μήκος].

Ως παράδειγμα (σύνηθες στην πράξη), ο νόμος του Fourier (καταστατικός νόμος - constitutive law) προβλέπει για την θερμική ροή την σχέση

$$q = -k\,(\partial T / \partial x),$$

όπου k η θερμική αγωγιμότητα (thermal conductivity) και $T = T(x, t)$ η θερμοκρασία στην συγκεκριμένη θέση και στον συγκεκριμένο χρόνο.

Επίσης, *οι τάσεις*, που στην γενική περίπτωση εφαρμόζονται στην θεωρούμενη μάζα, προσδίδουν στο σύστημα μηχανικό έργο. Ο ρυθμός μεταβολής του έργου αυτού είναι η λεγόμενη *μηχανική ισχύς* $\dot{W}$ (mechanical power)

$$\dot{W} = -\sigma(x_a, t) \cdot v(x_a, t) + \sigma(x_b, t) \cdot v(x_b, t) + \int_{x_a}^{x_b} f\, v\, dx \equiv$$

$$\equiv \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial(\sigma v)}{\partial x}\, dx + \int_{x_a}^{x_b} f\, v\, dx. \tag{7}$$

Αντικαθιστώντας πλέον στην Εξ. (5) όλες τις ποσότητες που έχουν ορισθεί προηγουμένως έχουμε

$$\left(\rho \frac{D\mathscr{E}}{Dt} + \mathscr{E} \frac{D\rho}{Dt} + \mathscr{E}\rho \frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \rho \frac{Dv^2}{Dt} + \frac{v^2}{2} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{v^2}{2} \rho \frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+ \left(\rho \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \frac{D\rho}{Dt} + \varphi\rho \frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= - \frac{\partial q}{\partial x} + fv + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sigma \frac{\partial v}{\partial x} . \tag{8}$$

Η ανωτέρω εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί με την χρήση των εξισώσεων συνέχειας και κινήσεως, δηλ. των ακολούθων εξισώσεων

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 , \qquad \rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + f .$$

Θα θεωρήσουμε τώρα δύο σημαντικές **ειδικές** περιπτώσεις της Εξ. (8):

(α) Καθαρά **μηχανικό** σύστημα:

$$\rho \frac{D\mathscr{E}}{Dt} = \sigma \frac{\partial v}{\partial x} , \tag{9}$$

όπου, στην περίπτωση αυτή, $\mathscr{E}$ (η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας) είναι μόνον παραμορφωσιακή ενέργεια.

(β) Καθαρά **θερμικό** σύστημα:

$$\rho \frac{D\mathscr{E}}{Dt} = - \frac{\partial q}{\partial x} , \tag{10}$$

όπου, στην περίπτωση αυτή, $\mathscr{E}$ (η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας) είναι ενέργεια που εξαρτάται μόνον από την θερμοκρασία του σώματος.

Εάν περαιτέρω υποτεθεί ότι ισχύει ο νόμος Fourier $q = -k\,(\partial T / \partial x)$ που συνδέει την θερμική ροή με την θερμοκρασία, τότε η Εξ. (10) δίνει

$$\rho \frac{D\mathscr{E}}{Dt} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Επίσης εάν τεθεί $\mathscr{E} = cT$, όπου c η ειδική θερμότητα, και εάν επιπλέον αμεληθούν όροι «εκ μεταφοράς» στην υλική παράγωγο, τότε η Εξ. (11) δίνει την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{ή} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{12}$$

όπου κ είναι η σταθερά θερμικής διαχύσεως (thermal diffusivity) που ορίζεται ως $\kappa = k/\rho c$.

Σημειώσεις:

(1) Η ειδική θερμότητα c είναι σταθερά του υλικού και ισούται με το ποσό της θερμότητας που απαιτείται για την ανύψωση της θερμοκρασίας μάζας 1 gr του υλικού κατά 1 °C.
Η ειδική θερμότητα έχει μονάδες

$$[c] = [\text{ενέργεια}]\,[^\circ\text{C}]^{-1}\,[\text{μάζα}]^{-1}.$$

(2) Ο νόμος του Fourier έχει επαρκή πειραματική επιβεβαίωση.

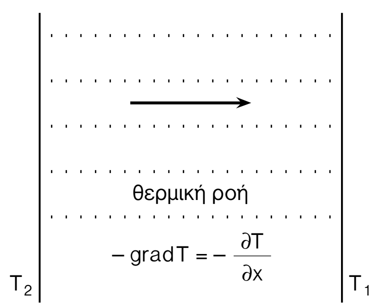
(3) Η θερμική αγωγιμότητα έχει μονάδες

$$[k] = [\text{ισχύς}]\,[\text{μήκος}]^{-1}\,[^\circ\text{C}]^{-1}.$$

(4) Η σταθερά θερμικής διαχύσεως έχει μονάδες

$$[\kappa] = [\text{μήκος}]^{2}\,[\text{χρόνος}]^{-1}.$$

(5) Το ακόλουθο σχήμα δείχνει την φορά της θερμικής ροής όταν $T_2 > T_1$



8. ΤΕΛΕΙΑ Ή ΙΔΕΑΤΑ ΡΕΥΣΤΑ – ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

Τέλεια μη-στροβιλιζόμενα ρευστά (perfect inviscid fluids) ονομάζονται εκείνα τα ρευστά των οποίων τα στοιχεία δεν στροβιλίζονται. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του ρευστού υπόκεινται μόνον σε δυνάμεις πιέσεως και βαρύτητας και όχι σε διατμητικές δυνάμεις.

Η αντίστοιχη μαθηματική έκφραση γράφεται ως

$$W_{ij} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

όπου $W_{ij} \triangleq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$ είναι ο ρυθμός περιστροφής, και v_i το διάνυσμα ταχυτήτων των στοιχείων του ρευστού.

Έτσι, τα τέλεια μη-στροβιλιζόμενα ρευστά έχουν *μηδενικό* ρυθμό περιστροφής των στοιχείων τους.

Τέλεια ασυμπίεστα ρευστά (perfect incompressible fluids) ονομάζονται τα ρευστά που είναι ασυμπίεστα (π.χ. ύδωρ, υδράργυρος).

Η αντίστοιχη μαθηματική έκφραση γράφεται ως

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \tag{2}$$

όπου $\rho \equiv \rho(\mathbf{x}, t)$ είναι η πυκνότητα του ρευστού.

Έτσι, τα τέλεια ασυμπίεστα ρευστά έχουν *μηδενικό* ρυθμό μεταβολής της πυκνότητάς τους.

Περαιτέρω, η Εξ. (2) σε συνδυασμό με την εξίσωση διατηρήσεως της μάζας (εξισώσεις συνέχειας) $D\rho/Dt + \rho(\partial v_i/\partial x_i) = 0$ δίνει

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{3}$$

Οι εξισώσεις (1) και (3) για τα τέλεια ρευστά γράφονται διανυσματικά ως

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{5}$$

Σημείωση 1: Ο ρυθμός περιστροφής W_{ij} προκύπτει ως τμήμα της κλίσεως (βαθμίδας) του διανυσματικού πεδίου της ταχύτητας. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\left[\overline{\nabla}\mathbf{v}\right] = \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_1/\partial x_3 \\ \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_3 \\ \partial v_3/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_3 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

όπου

$$\overline{\nabla}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{D}}_{\substack{\text{τανυστής ρυθμού} \\ \text{παραμορφώσεως} \\ \text{(rate of deformation)}}} + \underbrace{\mathbf{W}}_{\substack{\text{τανυστής ρυθμού} \\ \text{περιστροφής} \\ \text{(spin)}}} = D_{ij} + W_{ij}, \tag{7}$$

με

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right), \tag{8}$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right), \tag{9}$$

ή

$$[\mathbf{D}] = [D_{ij}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

$[\mathbf{W}] = [W_{ij}] =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε τέλος ότι ισχύουν οι ιδιότητες

$D_{ij} = D_{ji}$ (*συμμετρία* για τον ρυθμό παραμορφώσεως), (10)

$W_{ij} = -W_{ji}$ (*αντι-συμμετρία* για τον ρυθμό περιστροφής). (11)

Σημείωση 2: Σε ένα ασυμπίεστο ρευστό, η πυκνότητα μπορεί να μεταβάλλεται *χωρικά* (ανομοιόμορφη πυκνότητα). Π.χ. αλμυρό ύδωρ με διαφορετικές συγκεντρώσεις άλατος κατά το βάθος.

Περαιτέρω, θα εξαχθεί η **εξίσωση Bernoulli** η οποία εκφράζει τον συσχετισμό των διαφόρων όρων της ολικής πιέσεως.

Εκκινούμε από την συνθήκη μη-στροβιλότητας (Εξ. (1)) και παρατηρούμε ότι εάν εισαχθεί μία νέα συνάρτηση $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{x}, t)$ που καλείται δυναμικό της ταχύτητας (velocity potential) μέσω της σχέσεως

$$v_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \tag{12}$$

δηλαδή

$$v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad v_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad v_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3},$$

τότε η Εξ. (1) ικανοποιείται *αυτομάτως*.

Με τον τρόπο αυτό, η Εξ. (12) αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η ροή αστρόβιλη.

Στην περίπτωση τώρα αστρόβιλου *και* ασυμπιέστου ρευστού, η Εξ. (12) συνδυάζεται με την Εξ. (3) και δίνουν την λεγόμενη **εξίσωση Laplace**.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0 \tag{13}$$

ή σε σύστημα Oxyz

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{14}$$

Παρατήρηση: Ενώ το αρχικό σύστημα εξισώσεων ήταν μη-γραμμικό (*), με τις υποθέσεις της *μη-στροβιλότητας* και της *ασυμπιεστότητας* έχουμε οδηγηθεί σε γραμμική (**) διαφορική εξίσωση.

(*) Π.χ. οι μη-γραμμικοί όροι στο αρχικό σύστημα έρχονται από την σχέση $Dv/Dt = \partial v/\partial t + v(\partial v/\partial x)$.

(**) Ένας διαφορικός τελεστής L ονομάζεται *γραμμικός* όταν $L(\varphi + \psi) = L(\varphi) + L(\psi)$ *και* $L(a\varphi) = aL(\varphi)$.

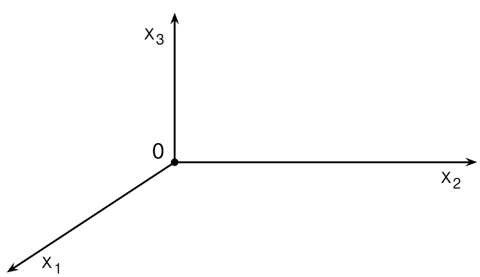
Παραδείγματα: $L = d^2/dx^2$ γραμμικός διαφορικός τελεστής,

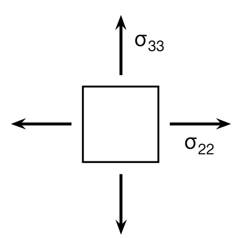
$L = (d/dx)^2$ μη-γραμμικός διαφορικός τελεστής.

Επίσης, στα ιδεατά *αστρόβιλα* ρευστά αμελούνται διατμητικές τάσεις λόγω τριβών. Στην περίπτωση αυτή και με την επιπλέον υπόθεση της ασυμπιεστότητας υφίσταται η εξής σχέση μεταξύ τάσεως και πιέσεως.

$$\sigma_{11} = -p, \qquad \sigma_{22} = -p, \qquad \sigma_{33} = -p, \tag{15}$$

ή $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, όπου δ_{ij} είναι το δέλτα Kronecker.





Οι *εξισώσεις κινήσεως* λαμβάνουν τότε την μορφή

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+f_i, \tag{16}$$

ενώ όταν οι καθολικές δυνάμεις παράγονται από δυναμικό (όπως στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας) τότε

$$f_i=-\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}=-\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i}, \tag{17}$$

όπου h *είναι* η ανύψωση επάνω από το επίπεδο αναφοράς. Π.χ. για άξονα x_3 διευθυνόμενο προς τα επάνω (δηλ. αντίθετα με την βαρύτητα) *το δυναμικό βαρύτητας είναι* $\Omega = \rho g x_3$ και επομένως, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = -\rho g$.

Οι Εξ. (16) και (17) δίνουν

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i}-\frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{18}$$

Περαιτέρω, η αντικατάσταση της (12) στην (18) δίνει

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\,\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-g\frac{\partial h}{\partial x_i}. \tag{19}$$

Ο δεύτερος όρος του πρώτου μέλους της Εξ. (19) γράφεται με τη βοήθεια της Εξ. (12) ως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v_j v_j}{2}\right), \tag{20}$$

ενώ σημειώνεται ότι

$$v_j v_j = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2. \tag{21}$$

Υποθέτοντας επιπλέον ότι ρ = σταθ., δηλ. ανεξάρτητο του **x** (περίπτωση *ομογενούς* ρευστού), συνδυάζοντας τις Εξ. (19) - (21) και εναλλάσσοντας την σειρά της διαφορίσεως έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gh\right)=0. \tag{22}$$

Η ανωτέρω εξίσωση δείχνει ότι η παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι αμετάβλητη σε *κάθε* διεύθυνση, άρα το πολύ είναι μία συνάρτηση του χρόνου, δηλ.

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = F(t), \tag{23}$$

όπου F(t) είναι άγνωστη συνάρτηση του χρόνου.

Εάν όμως η ροή είναι *μόνιμη* (δηλ. η εικόνα των ροϊκών γραμμών δεν αλλάζει), η Εξ. (23) οδηγεί στην λεγόμενη **εξίσωση Bernoulli**, η οποία γράφεται ως εξής

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = \text{σταθ.} \tag{24}$$

Σημείωση 3: Η σταθερά στην Εξ. (24) συνήθως προκύπτει στην πράξη από συνθήκες που υφίστανται για την ταχύτητα και την πίεση σε «απομακρυσμένες» περιοχές του ρευστού.

Τελικά, η ανωτέρω εξίσωση γράφεται ως εξής για την λεγόμενη *ολική πίεση* Π

$$\Pi \stackrel{\triangle}{=} p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{σταθ.}, \tag{25}$$

η οποία εκφράζει ότι: «η ολική πίεση είναι σταθερή σε κάθε σημείο ενός ομογενούς ρευστού».

Οι επιμέρους όροι στην Εξ. (25) είναι

$$\left.\begin{array}{lll} p & : & \text{στατική πίεση,} \\ \rho g h & : & \text{γεωδαιτική πίεση,} \\ \frac{1}{2}\rho v^2 & : & \text{δυναμική πίεση.} \end{array}\right\}$$

Σημείωση 4: Η Εξ. (25) ισχύει για κάθε σημείο του ρευστού, είναι δηλ. μία εξίσωση πεδίου. Αυτό σημαίνει ότι το μέγεθος της σταθεράς στο δεξιό μέλος της (25) είναι το ίδιο για οποιαδήποτε γραμμή ροής.

Άσκηση 1:

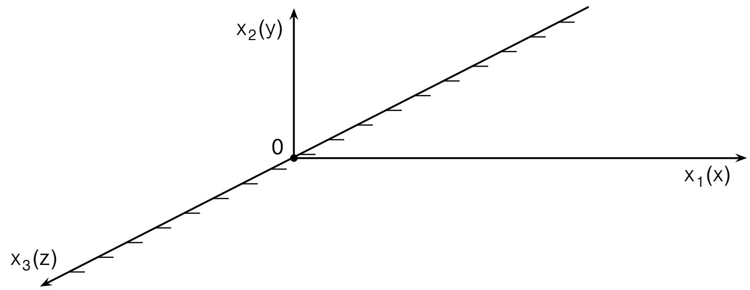
Δίνεται η συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας ενός ρευστού $\Phi = x^3 - 3xy^2$.

(α) Να δειχθεί ότι η Φ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

(β) Να προσδιορισθεί το αστρόβιλο πεδίο ταχυτήτων των στοιχείων του ρευστού.

(γ) Να προσδιορισθεί η κατανομή της πιέσεως στην περίπτωση ασυμπίεστου ομογενούς ρευστού, εάν στο σημείο (0, 0, 0) ισχύει ότι $p = p_0$ και $\Omega = \rho g h$.

(δ) Εάν το επίπεδο $y = 0$ είναι ένα σταθερό σύνορο (π.χ. στερεό δάπεδο), να προσδιορισθεί η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας στο σύνορο αυτό.



Λύση: (α) Είναι

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -6x, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

οπότε πράγματι

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 6x - 6x = 0.$$

(β) Από την σχέση $v_i = -(\partial\Phi/\partial x_i)$, έχουμε

$$v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2, \qquad v_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 6xy, \qquad v_2 = 0.$$

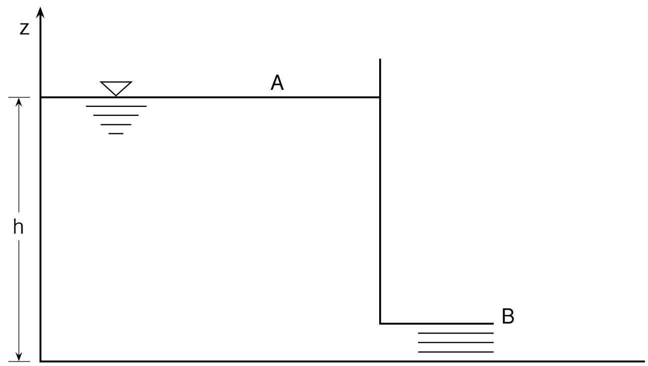
(γ) Από την εξίσωση Bernoulli $\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = C$, όπου C σταθερά, έχουμε στο σημείο (0, 0, 0), $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $p = p_0$ και $\Omega = 0$. Έτσι $C = p_0/\rho$ και

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2) - \rho g h \qquad ή$$

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2}\left[g\,(y^2 - x^2)^2 + 36x^2y^2\right] - \rho g h.$$

(δ) Στο επίπεδο $y = 0$ είναι $v_1 = -3x^2$ και $v_2 = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το ρευστό «ολισθαίνει» κατά μήκος του στερεού συνόρου.

Άσκηση 2:



Εάν υποτεθεί μόνιμη ροή του ρευστού, να προσδιορισθεί η ταχύτητα εκροής της φλέβας του ρευστού (liquid jet) ως συνάρτηση του h.

Λύση: Σημείο A στην επιφάνεια: $p = p_{ατμ.}$, $v = 0$, $z = h$.
Από την εξίσωση Bernoulli έχουμε τότε

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{p_{ατμ.}}{\rho} + gh.$$

Σημείο B εκροής: $z = 0$, $p = p_{ατμ.}$.
Επομένως

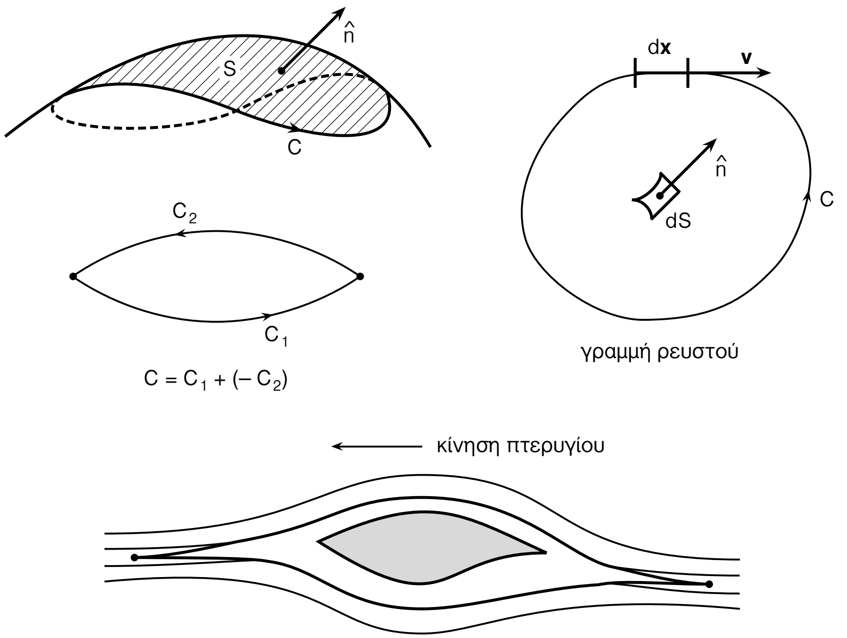
$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_{ατμ.}}{\rho} = \frac{p_{ατμ.}}{\rho} + gh,$$

και τελικά

$$v = (2gh)^{1/2}.$$

Η ανωτέρω σχέση είναι γνωστή ως *τύπος του Torricelli.*

9. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ KELVIN ΚΑΙ HELMHOLTZ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΡΕΥΣΤΩΝ



Καλείται *κυκλοφορία* (circulation) το εξής ολοκλήρωμα (ορισμός)

$$\mathbf{I}(C) \triangleq \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_C v_i \, dx_i, \qquad (1)$$

όπου d**x** είναι το διάνυσμα μήκους dx που είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της *κλειστής* γραμμής C, **v** είναι το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας, ενώ παρατηρούμε ότι η κυλοφορία είναι συνάρτηση τόσο του πεδίου ταχύτητας όσο και της καμπύλης C.

Με εφαρμογή του Θεωρήματος Stokes, εάν η καμπύλη C περικλείει μια απλώς-συνεκτική περιοχή, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επιφανειακό ως

$$\mathrm{I}(C) = \int_S \widehat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\, dS = \int_S (\mathrm{curl}\,\mathbf{v})_i\, n_i\, dS, \qquad (2)$$

όπου S είναι κάθε επιφάνεια στο ρευστό που περικλείεται από την καμπύλη C, και $\widehat{\mathbf{n}}$ (με συνιστώσες n_i) είναι το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω διάνυσμα σε κάθε σημείο της S. Η ποσότητα curl **v** είναι η *στροβιλότητα* του πεδίου ταχύτητας και δίνεται ως

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \widehat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \widehat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial zx} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \widehat{\mathbf{k}}\,.$$

Ο νόμος μεταβολής της κυκλοφορίας με τον χρόνο, όταν η καμπύλη C είναι μία *γραμμή ρευστού* (δηλ. γραμμή που σχηματίζουν τα *ίδια* πάντα στοιχεία του ρευστού καθώς αλλάζει ο χρόνος), δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα Kelvin

Εάν το ρευστό είναι χωρίς τριβές (δηλ. δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις στο εσωτερικό του) και οι καθολικές δυνάμεις είναι συντηρητικές (δηλ. προέρχονται από δυναμικό, π.χ. το δυναμικό της βαρύτητας), τότε ισχύει ότι

$$\frac{D\mathrm{I}}{Dt} = -\int_C \frac{dp}{\rho}\,.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα Reynolds έχουμε

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_C v_i\, dx_i \right) = \int_C \frac{D}{Dt}\,(v_i\, dx_i) = \int_C \left(\frac{Dv_i}{Dt}\, dx_i + v_i\, \frac{D(dx_i)}{Dt} \right). \qquad (3)$$

Επειδή τώρα ισχύει $D(dx_i)/Dt = dv_i$ και επειδή

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho}\left(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)$$

από τις εξισώσεις κινήσεως, έχουμε

$$\frac{DI}{Dt} = \int_C \left[\frac{1}{\rho} \left(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dx_i + v_i\, dv_i \right] =$$

$$= -\int_C \frac{1}{\rho}\, dp + \int_C \frac{f_i}{\rho}\, dx_i + \int_C dv^2, \tag{4}$$

όπου μπορεί να παρατηρήσει κανείς στο τελευταίο μέλος ότι ο δεύτερος όρος μηδενίζεται για συντηρητικό πεδίο f_i και ότι ο τρίτος όρος επίσης μηδενίζεται επειδή η συνάρτηση v είναι μονότιμη και η καμπύλη C είναι κλειστή.

- Περαιτέρω, από το Θεώρημα Kelvin εξάγεται ως ειδική περίπτωση το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα Helmholtz

Εάν επιπλέον των συνθηκών του Θεωρήματος Kelvin υποτεθεί και ότι η πυκνότητα του ρευστού ρ είναι μοναδική συνάρτηση της ασκούμενης πιέσεως p (εξαρτάται δηλ. μόνο από την πίεση – ένα τέτοιο ρευστό καλείται *βαροτροπικό* – barotropic), τότε DI/Dt = 0.

[Σημείωση: Για βαροτροπικό ρευστό ισχύει $p = p(\rho)$ και $\rho = \rho(p)$. Π.χ. $p = \beta\rho^{\gamma}$, όπου β και γ είναι σταθερές].

Απόδειξη: Μπορεί να παρατηρήσει κανείς αμέσως ότι το ανωτέρω θεώρημα ισχύει καθόσον το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{dp}{\rho(p)}$ μηδενίζεται λόγω του ό,τι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι *μονότιμη* και η καμπύλη C είναι *κλειστή*.

Παρατήρηση: Σε ορισμένες περιπτώσεις ρευστών, η πυκνότητα ρ δεν εξαρτάται *μόνον* από την πίεση p *αλλά και* από την θέση του υπ' όψιν σημείου (π.χ. περίπτωση στρωτής ροής) και την θερμοκρασία.

Συμπεράσματα του Θεωρήματος Helmholtz:

Επειδή I = σταθ., εάν η κυκλοφορία μηδενίζεται για κάποια χρονική στιγμή θα πρέπει να μηδενίζεται και για όλους τους επόμενους χρόνους. Αυτό σημαίνει ότι, λόγω της Εξ. (2), *εάν μία ροή ήταν αρχικά αστρόβιλη θα παραμείνει και σε επόμενους χρόνους αστρόβιλη*.

Γενικά επίσης, σε ένα βαροτροπικό και χωρίς τριβές ρευστό, ο ρυθμός περιστροφής (spin – στροβιλισμός) παραμένει σταθερός με τον χρόνο.

Τα ανωτέρω έχουν ιδιαίτερη σημασία στην Θεωρία Οριακού Στρώματος (boundary layer theory) όπου γίνεται *διαχωρισμός* της ροής σε περιοχές αστρόβιλης και ιξώδους ροής.

10. ΔΙΑΔΟΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΡΕΥΣΤΑ

Η διάδοση ακουστικών κυμάτων (διάδοση του ήχου) μπορεί να προσεγγισθεί θεωρώντας την διάδοση *απειροστών* διαταραχών σε *συμπιεστά ρευστά χωρίς ιξώδες* (χωρίς τριβές - inviscid fluids). Έτσι, στην ενότητα αυτή αίρεται η υπόθεση της ασυμπιεστότητας: $D\rho/Dt \equiv 0$.

Για ρευστό χωρίς ιξώδες και αμελώντας καθολικές δυνάμεις (βαρύτητα), οι εξισώσεις κινήσεως (που προέρχονται από την Αρχή Διατηρήσεως της Ορμής) γράφονται ως εξής

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{1}$$

Υποθέτουμε ότι το ρευστό βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία με

$$v_i = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0 \quad (\text{για } t = 0). \tag{2}$$

Κατόπιν, το ρευστό διαταράσσεται έτσι ώστε να έχουμε

$$v_i = \overline{v}_i(\mathbf{x}, t), \quad \rho = \rho_0 + \overline{\rho}(\mathbf{x}, t), \quad p = p_0 + \overline{p}(\mathbf{x}, t). \tag{3}$$

Εάν οι Εξ. (3) αντικατασταθούν στην (1) έχουμε

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \overline{v}_j \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0\left(1 + \dfrac{\overline{\rho}}{\rho_0}\right)}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Θα θεωρήσουμε περαιτέρω απειροστές διαταραχές (δηλ. μικρή παραμόρφωση των στοιχείων του ρευστού γύρω από την θέση ηρεμίας). Έτσι μπορούμε να αμελήσουμε τους όρους $\overline{v}_j(\partial \overline{v}_i/\partial x_j)$ και $(\overline{\rho}/\rho_0)$ στην Εξ. (4), με αποτέλεσμα την *γραμμικοποιημένη* σχέση

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}. \tag{5}$$

Ομοίως, θεωρώντας την Διατήρηση της Μάζας λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \overline{v}_i \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_i} + \rho_0 \left(1 + \frac{\overline{\rho}}{\rho_0}\right) \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_i} = 0, \tag{6}$$

από την οποία εξάγεται η ακόλουθη *γραμμικοποιημένη* εξίσωση

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}. \tag{7}$$

Ακολούθως, διαφορίζοντας την Εξ. (5) ως προς x_i και την Εξ. (7) ως προς t, και απαλείφοντας τον όρο $(\partial^2 \overline{v}_i / \partial x_i \partial t)$ μεταξύ των δύο σχέσεων λαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 \overline{\rho}}{\partial t^2} \quad \text{ή} \quad \nabla^2 \overline{p} = \frac{\partial^2 \overline{\rho}}{\partial t^2}, \tag{8}$$

όπου

$$\nabla^2(\,) \equiv \frac{\partial^2(\,)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2(\,)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\,)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\,)}{\partial x_3^2}.$$

Στην περίπτωση τώρα βαροτροπικού ρευστού (όπου η πίεση εξαρτάται μόνον από την πυκνότητα) μπορεί να γραφεί $p = p(\rho)$ και με ανάπτυξη της συνάρτησης $p(\rho)$ σε σειρά Taylor ως προς την τιμή της πιέσεως στην θέση ηρεμίας, έχουμε

$$p = p_0 + \left.\left(\frac{dp}{d\rho}\right)\right|_{\rho_0} \cdot (\rho - \rho_0) + \cdots. \tag{9}$$

Αμελώντας όρους ανωτέρας τάξεως (σε συνέπεια με τις προηγούμενες γραμμικοποιήσεις) έχουμε

$$\overline{p} = c_0^2 \overline{\rho}, \tag{10}$$

όπου

$$c_0 = \left[\left.\left(\frac{dp}{d\rho}\right)\right|_{\rho_0}\right]^{1/2}. \tag{11}$$

Έτσι, συνδυάζοντας τις Εξ. (8) και (10) λαμβάνουμε τις εξής δύο κυματικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα απειροστών διαταραχών σε βαροτροπικά συμπιεστά ρευστά

$$\nabla^2 \overline{p} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial t^2}, \tag{12}$$

$$\nabla^2 \overline{\rho} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \overline{\rho}}{\partial t^2}. \tag{13}$$

Λύση D' Alembert της κυματικής εξισώσεως

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Εισάγονται οι νέες ανεξάρτητες μεταβλητές (ξ, η) ως

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \tag{14α, β}$$

ενώ παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \equiv \eta_x = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \equiv \xi_x = 1. \tag{15α, β}$$

Περαιτέρω έχουμε

$$\zeta_x = \zeta_\eta \eta_x + \zeta_\xi \xi_x = \zeta_\eta + \zeta_\xi, \tag{16}$$

ενώ η Εξ. (16) με διαφόριση και κανόνα αλυσίδας γίνεται

$$\zeta_{xx} = (\zeta_\eta + \zeta_\xi)_x = (\zeta_\eta + \zeta_\xi)_\eta \eta_x + (\zeta_\eta + \zeta_\xi)_\xi \xi_x = \zeta_{\eta\eta} + 2\zeta_{\eta\xi} + \zeta_{\xi\xi}. \tag{17}$$

Ομοίως

$$\zeta_{tt} = c^2(\zeta_{\eta\eta} - 2\zeta_{\eta\xi} + \zeta_{\xi\xi}). \tag{18}$$

Από τις Εξ. (12), (17) και (18) λαμβάνουμε

$$\zeta_{\eta\xi} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta\, \partial \xi} = 0, \tag{19}$$

η οποία ονομάζεται *κανονική* μορφή και μπορεί να δώσει την γενική λύση με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις

$$\text{Εξ. (19)} \xrightarrow{\text{ολοκλ. ως προς } \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \underbrace{F(\eta)}_{\substack{\text{αυθαίρετη}\\ \text{συνάρτηση}}} \xrightarrow{\text{ολοκλ. ως προς } \eta}$$

$$\zeta = \underbrace{\int F(\eta)\, d\eta}_{\text{συνάρτηση } \varphi(\eta)} + \underbrace{\psi(\xi)}_{\substack{\text{αυθαίρετη}\\ \text{συνάρτηση}}} .$$

Οπότε τελικά η λύση (λύση D' Alembert) γράφεται ως

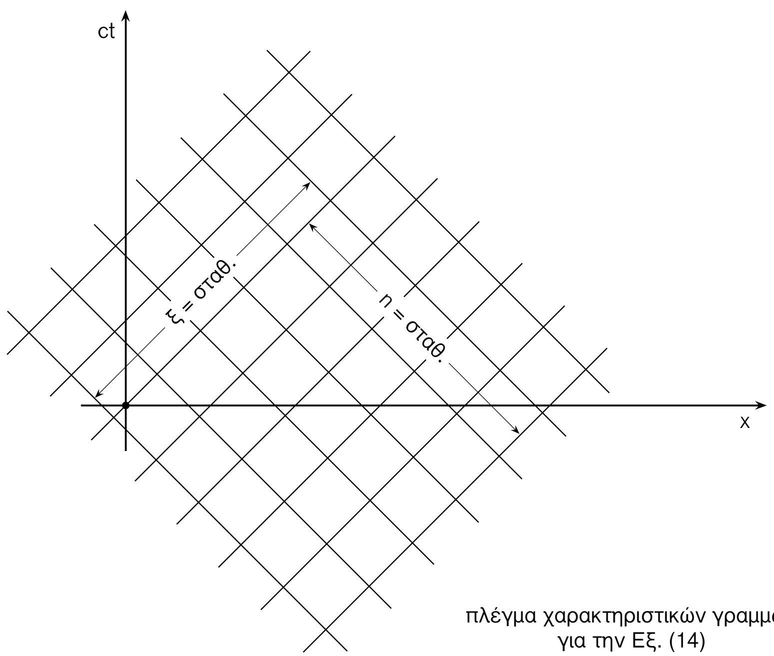
$$\zeta = \varphi(\eta) + \psi(\xi) \quad \text{ή} \quad \zeta = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct). \tag{20}$$

Οι αυθαίρετες συναρτήσεις μπορεί να προσδιορισθούν μέσω των αρχικών συνθηκών. Πράγματι αποδεικνύεται ότι

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x + ct) + f(x - ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds, \tag{21}$$

όπου

$$\zeta(x, t = 0) = f(x), \qquad \frac{\partial \zeta(x, t = 0)}{\partial t} = g(x). \tag{22α, β}$$



πλέγμα χαρακτηριστικών γραμμών
για την Εξ. (14)

Παράδειγμα: Να προσδιορισθεί η λύση της κυματικής εξισώσεως στο πεδίο $-\infty < x < \infty$ για τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες

$$f(x) = H(x+a) - H(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{για} \quad |x| < a \\ 0 & \text{για} \quad |x| > a \end{cases},$$

$$g(x) = 0,$$

όπου $H(x)$ η συνάρτηση Heaviside.

Η λύση D' Alembert δίνει

$$\zeta(x,t) = \frac{1}{2}\left[H(x-ct+a) - H(x-ct-a) + H(x+ct+a) - H(x+ct-a)\right]$$

με την ακόλουθη σχηματική παράσταση της κυματικής διαδόσεως