Άσκηση

1 Δίνεται η περιγραφή κίνησης σώματος κατά Lagrange (υλική):

$$x_1 = \bar{X}_1 \cdot (1+t)$$
$$x_2 = \bar{X}_2 \cdot (1+t)^2$$
$$x_3 = \bar{X}_3 \cdot (1+t^2)$$

$t=0$: $x_1 = \bar{X}_1$, $x_2 = \bar{X}_2$, $x_3 = \bar{X}_3$

Χωρική περιγραφή (Lagrange):

$$\bar{X}_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad \bar{X}_2 = \frac{x_2}{(1+t)^2}, \quad \bar{X}_3 = \frac{x_3}{1+t^2}$$

i) Να βρεθεί το πεδίο ταχύτητας σε περιγραφή Euler και Lagrange.

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = \bar{X}_1 \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = 2 \cdot \bar{X}_2 \cdot (1+t) \\ v_3 &= \frac{dx_3}{dt} = 2 \cdot t \cdot \bar{X}_3 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{υλική} \\ \text{περιγραφή} \\ \text{(Euler)} \end{array} \longrightarrow \left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{x_1}{1+t} \\ v_2 &= \frac{2 \cdot x_2}{1+t} \\ v_3 &= \frac{2 \cdot t \cdot x_3}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{χωρική} \\ \text{περιγραφή} \\ \text{(Lagrange)} \end{array}$$

ii) Να βρεθεί το πεδίο επιταχύνσεων κατά Euler και Lagrange.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{dv_1}{dt} + v_1 \cdot \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{x_1}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t} = 0 \\ a_2 &= \frac{dv_2}{dt} + v_2 \cdot \frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{2x_2}{(1+t)^2} + \frac{2 \cdot x_2 \cdot 2}{(1+t)^2} = \frac{2 \cdot x_2}{(1+t)^2} \\ a_3 &= \frac{dv_3}{dt} + v_3 \cdot \frac{dv_3}{dx_3} = -\frac{4t^2 \cdot x_3}{(1+t^2)^2} + \frac{4 \cdot t^2 \cdot x_3}{(1+t^2)^2} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{χωρική} \\ \text{περιγραφή} \\ \text{(Lagrange)} \end{array} \longrightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{2 \cdot \bar{X}_2}{(1+t)^2} \\ a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{υλική} \\ \text{περιγραφή} \\ \text{(Euler)} \end{array}$$

Άσκηση 2 Περιγραφή κίνησης κατά Lagrange - χωρική περιγραφή:

$$x_1 = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} \cdot e^{t} + \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{2} \cdot e^{-t} \quad ①$$
$$x_2 = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} \cdot e^{t} - \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{2} \cdot e^{-t} \quad ②$$
$$x_3 = \bar{X}_3 \quad ③$$

Από ① + ②: $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)}{2} \cdot e^{t}$ ④.

Από ① κ' ④: $x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{2} \cdot e^{-t} \Rightarrow \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{2} \cdot e^{-t} = \frac{x_1 - x_2}{2}$

i) Να βρεθεί το πεδίο ταχύτητας και να εκφραστεί κατά Euler και Lagrange.

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} \cdot e^{t} - \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{2} \cdot e^{-t} \quad \text{ή} \quad v_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{2} = x_2$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} \cdot e^{t} + \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{2} \cdot e^{-t} \quad \text{ή} \quad v_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2} = x_1$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0$$

ii) $a_1 = \frac{dv_1}{dt} + v_1 \cdot \frac{dv_1}{dx_1} = 0$

$a_2 = \frac{dv_2}{dt} + v_2 \cdot \frac{dv_2}{dx_2} = 0$

$a_3 = \frac{dv_3}{dt} + v_3 \cdot \frac{dv_3}{dx_3} = 0$

Δίνεται χωρική περιγραφή (κατά Lagrange) κίνησης ρευστού σωματιδίου $x_1 = (1+b^2 t^2) X_1$

$x_2 = X_2$

$x_3 = X_3$

Υλική περιγραφή (κατά Euler) $X_1 = \frac{x_1}{1+b^2 t^2}$

$X_2 = x_2$

$X_3 = x_3$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 2 \cdot b^2 t \cdot X_1 = \frac{2 \cdot b^2 \cdot t \cdot x_1}{1+b^2 t^2}$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0$$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} + v_1 \cdot \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{2 \cdot b^2 \cdot x_1 (1+b^2 t^2) - 2b^2 t \cdot x_1 2b^2 \cdot t}{(1+b^2 t^2)^2} + \frac{2b^2 t x_1}{1+b^2 t^2} \cdot \frac{2 \cdot b^2 \cdot t}{1+b^2 t^2} = \frac{2b^2 x_1}{1+b^2 t^2} = 2 \cdot b^2 \cdot X_1$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

Άσκηση 4 Κίνηση ρευστού σωματιδίου (περιγραφή κατά Lagrange):

Lagrange	Euler
$x_1 = X_1 + 2 \cdot X_2 \cdot t^2$	$X_1 = x_1 - 2 X_2 t^2$ ⓐ
$x_2 = X_2 + 2 \cdot X_1 \cdot t^2$	$X_2 + 2x_1 - 4 X_2 t^2 = x_2 \Rightarrow X_2 = \frac{x_2 - 2x_1}{1-4t^2}$ ⓑ
$x_3 = X_3$	$X_3 = x_3$
	Από ⓐ και ⓑ: $X_1 = x_1 - 2t^2 \frac{x_2 - 2x_1}{1-4t^2}$

i) Να βρεθούν οι συνιστώσες της ταχ. για t=1,5sec αν για t=1 ήταν στο (2,3,4)

Για $t = 1s$: $x_1 = 2 \Rightarrow X_1 + 2 X_2 = 2 \Rightarrow X_1 = 2 - 2X_2$ ①

$x_2 = 3 \Rightarrow X_2 + 2 X_1 = 3 \Rightarrow X_2 + 2 \cdot (2 - 2 \cdot X_2) = 3 \Rightarrow -3 X_2 + 4 = 3 \Rightarrow X_2 = \frac{1}{3}$ ②

$x_3 = 4 \Rightarrow X_3 = 4$

Από ① κ' ②: $X_1 = 2 - 2/3 = 4/3$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 4 X_2 \cdot t, \quad v_1(4/3, 1/3, 4, 1.5) = \frac{4 \cdot 1.5}{3} = 2\ m/s$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 4 \cdot X_1 \cdot t, \quad v_2(4/3, 1/3, 4, 1.5) = \frac{16 \cdot 1.5}{3} = 8\ m/s$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0, \quad v_3(4/3, 1/3, 4, 1.5) = 0$$

ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις της σωματιδιακής τροχιάς:

$\frac{dx_1}{dt} = 4 \cdot X_2 \cdot t \Rightarrow x_1 = 2 \cdot X_2 t^2 + c_1$, για $t = 0s$ $x_1 = X_1 \Rightarrow c_1 = X_1$ άρα $x_1 = 2 \cdot X_2 t^2 + X_1$

$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cdot X_1 \cdot t \Rightarrow x_2 = 2 \cdot X_1 \cdot t^2 + c_2$ για $t = 0s$ $x_2 = X_2 \Rightarrow c_2 = X_2$ άρα $x_2 = 2 X_1 \cdot t^2 + X_2$

$\frac{dx_3}{dt} = X_3$

iii) Να βρεθούν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης για t=2sec

$a_1 = \frac{dv_1}{dt} + v_1 \cdot \frac{dv_1}{dx_1} = 4 \cdot X_2$, $a_1(4/3, 1/3, 4, 2) = 4/3$

$a_2 = \frac{dv_2}{dt} + v_2 \cdot \frac{dv_2}{dx_2} = 4 \cdot X_1$, $a_2(4/3, 1/3, 4, 2) = \frac{16}{3}$

$a_3 = \frac{dv_3}{dt} + v_3 \frac{dv_3}{dx_3} = 0$, $a_3(4/3, 1/3, 4, 2) = 0$

5. Η κινηματική περιγραφή κατά Lagrange σε ένα συνεχές μέσο δίνεται:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cdot e^{t} - X_3 \cdot (e^{t}-1) \\ x_2 &= X_2 \cdot e^{-t} + X_3 (1-e^{-t}) \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \text{Lagrange} \longrightarrow \left.\begin{aligned} X_1 &= x_1 e^{-t} + x_3 (1-e^{-t}) \\ X_2 &= x_2 \cdot e^{t} - x_3 (e^{t}-1) \\ X_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \text{Euler}$$

i) Να βρεθεί το πεδίο μετατοπίσεων και να περιγραφεί κατά Euler και Lagrange.

$$u_1 = x_1 - X_1 = X_1 (e^{t}-1) - X_3 (e^{t}-1) = \underbrace{(X_1 - X_3)(e^{t}-1)}_{\text{Lagrange}} = x_1 (1-e^{-t}) - x_3 (1-e^{-t}) = \underbrace{(x_1 - x_3)(1-e^{-t})}_{\text{Euler}}$$

$$u_2 = x_2 - X_2 = X_2 (e^{-t}-1) + X_3 \cdot (1-e^{-t}) = \underbrace{(X_2 - X_3)(e^{-t}-1)}_{\text{Lagrange}} = x_2 (1-e^{t}) + x_3 (e^{t}-1) = \underbrace{(x_2 - x_3)(1-e^{t})}_{\text{Euler}}$$

$$u_3 = x_3 - X_3 = 0$$

ii) $\Theta = \frac{e^{-3t}}{x^2}$, $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Να βρεθεί η μεταβολή της θερμοκρασίας.

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = X_1 \cdot e^{t} - X_3 \cdot e^{t} = x_1 + x_3 (e^{t}-1) - x_3 \cdot e^{t} = x_1 - x_3$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -X_2 \cdot e^{-t} + X_3 e^{-t} = -x_2 + x_3 (1-e^{-t}) + x_3 e^{-t} = -x_2 + x_3$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + v_2 \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + v_3 \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} = -3 \frac{e^{-3t}}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + (x_1 - x_3) \cdot \frac{(-2x_1 \cdot e^{-3t})}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2} + (-x_2 + x_3) \frac{(-2 \cdot x_2 e^{-3t})}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}$$

<u>Άσκηση 6</u> Σε μονοδιάστατο συνεχές όπου $x = X \cdot (1 + f(t))$ ισχύει για $f(0) = 0$ και $x = X$ για $t = 0$. Επίσης ισχύει: $V^{E}(x,t) = x \cdot t$.

Να βρεθούν τα $f(t)$ και $X(x,t)$.

$$\frac{dx}{dt} = V^{E}(x,t) \Rightarrow \frac{df}{dt} \cdot X = x \cdot t \Rightarrow \frac{df}{dt} = (1+f) \cdot t \Rightarrow \frac{df}{1+f} = t\,dt \Rightarrow \ln(1+f) = \frac{t^2}{2} + c' \Rightarrow 1 + f = c \cdot e^{t^2/2} \Rightarrow f = c \cdot e^{t^2/2} - 1$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$x = X \cdot e^{t^2/2} \Rightarrow X(x,t) = e^{-t^2/2} x$$

<u>Άσκηση 7</u> Κινηματική περιγραφή συνεχούς μέσου (κατά Lagrange):

$$x_1 = X_1 e^{-t}$$
$$x_2 = X_2 e^{t}$$
$$x_3 = X_3 + X_2 (e^{-t} - 1)$$

Δίνεται η θερμοκρασία: $\Theta = e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3)$

Να βρεθεί το πεδίο ταχυτήτων και η υλική παράγωγος της θερμοκρασίας.

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = -X_1 e^{-t} = -x_1 e^{t}$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = X_2 \cdot e^{t} = x_2$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = -X_2 \cdot e^{-t} = -x_2 e^{-2t}$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3) - x_1 e^{t} \cdot (-e^{t}) + x_2 \cdot 1 - x_2 e^{-2t} \cdot 0 = -e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3) + x_1 \cdot e^{2t} + x_2$$

σκηση 8

$$v_1 = \frac{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2}{1+t} = \frac{A \cdot x_1}{1+t}$$

$$v_2 = \frac{b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2}{1+t} = \frac{2 \cdot A \cdot x_2}{1+t}$$

$$v_3 = \frac{c \cdot x_3}{1+t} = \frac{3 \cdot A \cdot x_3}{1+t}$$

πεδίο ταχυτήτων

$a_1 = A$, $a_2 = b_1 = 0$

$b_2 = 2A$, $c = 3A$

i) Να βρεθούν οι εξισώσεις της σωματιδιακής τροχιάς

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{A \cdot x_1}{1+t} \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = A\frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_1 = \ln(1+t)^A + c_1' \Rightarrow \boxed{x_1 = c_1 (1+t)^A}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \frac{2 \cdot A \cdot x_2}{1+t} \Rightarrow \frac{dx_2}{x_2} = 2A\frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_2 = \ln(1+t)^{2A} + c_2' \Rightarrow \boxed{x_2 = c_2 (1+t)^{2A}}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = v_3 \Rightarrow \frac{dx_3}{dt} = \frac{3 \cdot A \cdot x_3}{1+t} \Rightarrow \frac{dx_3}{x_3} = 3A\frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_3 = \ln(1+t)^{3A} + c_3' \Rightarrow \boxed{x_3 = c_3 (1+t)^{3A}}$$

ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών ροής

$$\frac{dx_1}{v_1} = \lambda \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = \frac{\lambda \cdot A\,dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_1 = \ln(1+t)^{\lambda A} + c_4' \Rightarrow x_1 = c_4 \cdot (1+t)^{\lambda A}$$

$$\frac{dx_2}{v_2} = \lambda \Rightarrow \frac{dx_2}{x_2} = \frac{\lambda \cdot 2 \cdot A\,dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_2 = \ln(1+t)^{2\lambda A} + c_5' \Rightarrow x_2 = c_5 (1+t)^{2\lambda A}$$

$$\frac{dx_3}{v_3} = \lambda \Rightarrow \frac{dx_3}{x_3} = \frac{\lambda \cdot 3 \cdot A}{1+t} \Rightarrow \ln x_3 = \ln(1+t)^{3\lambda A} + c_6' \Rightarrow x_3 = c_6 \cdot (1+t)^{3\lambda A}$$

Άσκηση 9

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{a}{y} \\ v_y &= \frac{a}{x} \end{aligned}\right\} \text{Euler}$$

i) Να υπολογιστεί το πεδίο επιταχύνσεων.

ii) Να βρεθεί η περιγραφή κίνησης κατά Lagrange.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της σωματιδιακής τροχιάς αν για $t = 0sec$ $(x,y)(1,$

i) $$a_x = \cancel{\frac{dv_x}{dt}} + v_x \cancel{\frac{dv_x}{dx}} + v_y \frac{dv_x}{dy} = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{y^2} = \frac{a^2}{xy^2}$$

$$a_y = \cancel{\frac{dv_y}{dt}} + v_x \frac{dv_y}{dx} + v_y \cancel{\frac{dv_y}{dy}} = -\frac{a}{y} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) = \frac{a^2}{x^2 y}$$

iii)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_x &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{a}{y} \Rightarrow at = x \cdot y + c_1 \quad (1) \\ \frac{dy}{dt} = v_y &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{a}{x} \Rightarrow a \cdot t = x \cdot y + c_2 \quad (2) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(1)+(2)} 2x \cdot y = -c_1 - c_2 \Rightarrow x \cdot y = c \quad (3)$$

για $t = 0sec$: $x = X = 1$ και $y = Y = \frac{1}{2}$, οπότε αντικαθιστώντας στην (3): $c = \frac{1}{2}$

Οπότε η εξίσωση της σωματιδιακής τροχιάς είναι $x \cdot y = \frac{1}{2}$

ii) $$\frac{dx}{dt} = -2ax \Rightarrow \frac{dx}{x} = -2a\,dt \Rightarrow \ln x = -2at + c_3' \Rightarrow x = c_3 \cdot e^{-2at}$$ Για $t = 0sec$ $x = X_1 \xRightarrow{c_3 = X} x = X \cdot e^{-2at}$

$$\frac{dy}{dt} = 2ay \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2a\,dt \Rightarrow \ln y = 2at + c_4' \Rightarrow y = c_4 \cdot e^{2at}$$ Για $t = 0sec$ $y = Y \xRightarrow{c_4 = Y} y = Y \cdot e^{2at}$

...υνηση 10

...ίνεται η διδιάστατη ροή: $V_1 = A \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^4}$

$$V_2 = A \cdot \frac{2x_1 x_2}{r^4}$$

$$V_3 = 0$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

ασυμπίεστο ρευστό $\rightarrow \partial\rho/\partial t = 0$

α) Ισχύει η εξίσωση της συνέχειας;

$$\frac{\overset{0 \text{ (ασυμπ. ρευστό)}}{\cancel{\partial \rho}}}{\cancel{\partial t}} + \rho \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \rho \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \rho \cdot \frac{\overset{0}{\cancel{\partial v_3}}}{\cancel{\partial x_3}} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = A \frac{2x_1(x_1^2+x_2^2)^2 - (x_1^2-x_2^2)\cdot 2(x_1^2+x_2^2)\cdot 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^4} = A \frac{2x_1^3 + 2x_1 \cdot x_2^2 - 4x_1^3 + 4x_1 x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^3} = A \frac{-2x_1^3 + 6x_1 \cdot x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^3}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = A \frac{2x_1(x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1 x_2 \cdot 2(x_1^2+x_2^2)\cdot 2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^4} = A \cdot \frac{2x_1^3 + 2x_1 \cdot x_2^2 - 8x_1 \cdot x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^3} = A \frac{2x_1^3 - 6x_1 x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^3}$$

Οπότε $\partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 = 0$ και ισχύει η εξίσωση της συνέχειας.

β) Είναι η ροή αστρόβιλη;

Για να είναι η ροή αστρόβιλη θα πρέπει ο τανυστής του ρυθμού περιστροφής να είναι

$$W_{ij} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_1 \cdot (\partial v_3/\partial x_2 - \partial v_2/\partial x_3) - e_2 \cdot (\partial v_3/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_3) + e_3 (\partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2) \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = A \frac{2x_2(x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1 x_2 \cdot 2(x_1^2+x_2^2)\cdot 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^4} = A \frac{2x_1^2 x_2 + 2x_2^3 - 8x_1^2 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3} = A \frac{2x_2^3 - 6x_1^2 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = A \frac{-2x_2(x_1^2+x_2^2)^2 - (x_1^2-x_2^2)\cdot 2(x_1^2+x_2^2)\cdot 2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^4} = A \cdot \frac{-2x_1^2 x_2 - 2x_2^3 - 4x_1^2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^3}{(x_1^2+x_2^2)^3} = A \frac{2x_2^3 - 6x_1^2 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3}$$

Άρα επειδή $\partial v_2/\partial x_1 = \partial v_1/\partial x_2$ η ροή είναι αστρόβιλη

<u>...σκηση 11</u>

Να ελεγχθεί εάν η ροή που περιγράφεται από το πεδίο ταχυτήτων: $v_1 = -\frac{2x_1 x_2 x_3}{r^4}$, $v_2 = \frac{(x_1^2 - x_2^2)x_3}{r^4}$, $v_3 = \frac{x_2}{r^2}$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ είναι αστροβιλ...

$$W_{ij} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_1 \cdot (\partial v_3/\partial x_2 - \partial v_2/\partial x_3) - e_2 (\partial v_3/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_3) + e_3 (\partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} &= \frac{(x_1^2+x_2^2) - x_2 2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_3} &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \end{aligned}\right\} (\partial v_3/\partial x_2 - \partial v_2/\partial x_3) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} &= -\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= -\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \end{aligned}\right\} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= \frac{2x_1 \cdot x_3 (x_1^2+x_2^2)^2 - (x_1^2 - x_2^2)x_3 \cdot 2(x_1^2+x_2^2) 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^4} = \frac{2x_1^3 x_3 + 2x_1 x_2^2 x_3 - 4x_1^3 x_3 + 4x_1 x_2^2 \cdot x_3}{(x_1^2+x_2^2)^3} = \frac{-2x_1^3 x_3 + 6x_1 x_2^2 x_3}{(x_1^2+x_2^2)^3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= -\frac{2x_1 x_3 (x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1 x_2 x_3 \cdot 2(x_1^2+x_2^2) \cdot 2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^4} = -\frac{2x_1^3 \cdot x_3 + 2x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 - 8x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3}{(x_1^2+x_2^2)^3} = \frac{-2 \cdot x_1^3 \cdot x_3 + 6x_1 x_2^2 x_3}{(x_1^2+x_2^2)^3} \end{aligned}\right\} (\partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2) = 0$$

Άρα η ροή είναι αστρόβιλη.

<u>Άσκηση 12</u>

Δίνεται η ροϊκή συνάρτηση $\psi = x - \frac{x^3 \cdot y}{2}$. Να βρεθεί αν υπάρχει το δυναμικό της ταχύτ...

$v_x = -\partial\psi/\partial y = +x^3/2$

$v_y = \partial\psi/\partial x = 1 - 3/2 x^2 y$

Εάν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας θα ισχύει: $v_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ και $v_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

$$\left.\begin{aligned} &\partial\varphi/\partial x = -x^3/2 \Rightarrow \Phi(x,y) = -\frac{x^4}{8} + c(y) \\ &\partial\varphi/\partial y = -1 + 3/2 x^2 y \Rightarrow \Phi(x,y) = -y + \frac{3}{4}x^2 y^2 + c(x) \end{aligned}\right\} \text{Δεν υπάρχει δυναμικό ταχύτητας.}$$

<u>Άσκηση 13</u>

Η συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας δισδιάστατης αστρόβιλης ροής είναι $\Phi(x_1, x_2, t) = (x_1 - t)(x_2 - t)$

α) Δείξτε ότι οι εξίσωση των γραμμών ροής είναι $(x_1 - t)^2 - (x_2 - t)^2 = c$

β) Δείξτε ότι η εξίσωση των σωματιδιακών τροχιών είναι $\ln|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) - a(x_1 - x_2)^{-1}] + b$

$v_{x_1} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -x_2 + t$

$v_{x_2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -x_1 + t$

γρ. ρ.: $\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \Rightarrow \frac{dx_1}{-x_2 + t} = \frac{dx_2}{-x_1 + t} \Rightarrow (-x_1 + t)dx_1 = (-x_2 + t)dx_2 \Rightarrow -\frac{x_1^2}{2} + t \cdot x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + t \cdot x_2 + c' \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 - 2t \cdot x_1 = x_2^2 - 2t \cdot x_2 + c \Rightarrow x_1^2 - 2t \cdot x_1 + t = x_2^2 - 2t \cdot x_2 + t + c \Rightarrow (x_1 - t)^2 - (x_2 - t)^2 = c$

$$\text{σωμ. τροχ.: } \left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = v_1 \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + t \quad (1) \\ &\frac{dx_2}{dt} = v_2 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + t \quad (2) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(1)-(2)} \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \Rightarrow dx_1 - dx_2 = (x_1 - x_2)t \cdot \ldots \Rightarrow$$

Από γρ. ρ. $t = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) - a(x_1 - x_2)^{-1}]$

$\Rightarrow \frac{d(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = t \Rightarrow \ln|x_1 - x_2| = t + b \Rightarrow \ln|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) - a(x_1 - x_2)^{-1}] + b$