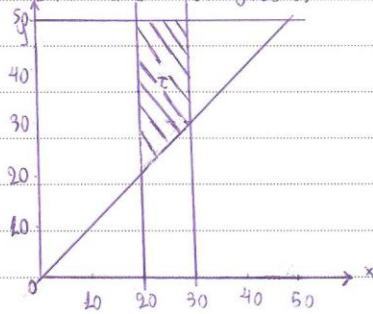


ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ (Αύγουστος 2024)

Θέμα 1

$$i) \quad f(x,y) = \begin{cases} c, & 20 \leq x \leq 30 \text{ ή } x \leq y \leq 50 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

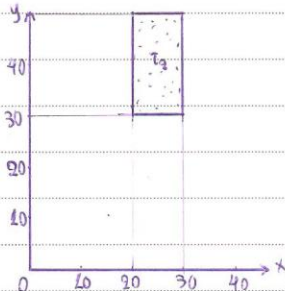
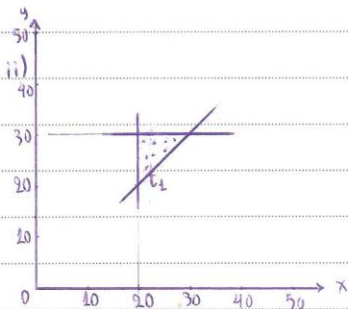


Από τη συνθήκη κανονικοποίησης ισχύει: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1 \Rightarrow \int_{20}^{30} \int_x^{50} c dy dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c \int_{20}^{30} [y]_x^{50} dx = 1 \Rightarrow c \cdot \int_{20}^{30} (50 - x) dx = 1 \Rightarrow c \cdot [50x - x^2/2]_{20}^{30} = 1 \Rightarrow c \cdot (50 \cdot 30 - 30^2/2 - 50 \cdot 20 + 20^2/2) = 1$$

$$\Rightarrow c \cdot 250 = 1 \Rightarrow c = 4 \cdot 10^{-3}$$

Οπότε η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y είναι: $f(x,y) = \begin{cases} 4 \cdot 10^{-3}, & 20 \leq x \leq 30 \text{ ή } x \leq y \leq 50 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$



$$20 \leq y \leq 30: f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_{20}^{30} 4 \cdot 10^{-3} dx = 4 \cdot 10^{-3} \cdot [x]_{20}^{30} = 4 \cdot 10^{-3} (30 - 20) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 0.08$$

$$30 \leq y \leq 50: f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_{30}^{50} 4 \cdot 10^{-3} dx = 4 \cdot 10^{-3} \cdot [x]_{30}^{50} = 0.08$$

$$\text{Οπότε είναι: } f(y) = \begin{cases} 4 \cdot 10^{-3} y - 0.08, & 20 \leq y \leq 30 \\ 0.08, & 30 \leq y \leq 50 \end{cases}$$

iii) Το μέσο εμβαδόν του τριγωνικού οικοπέδου (χωρίου I_1) είναι το $E(\frac{1}{2}XY) = \frac{1}{2} E(XY)$ για $20 \leq x \leq 30$
 $x \leq y \leq 30$

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{20}^{30} \int_x^{30} x \cdot y \cdot 4 \cdot 10^{-3} dy dx = \frac{1}{2} \int_{20}^{30} x \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^{30} \cdot 4 \cdot 10^{-3} dx = 10^{-3} \int_{20}^{30} x \cdot (30^2 - x^2) dx = 10^{-3} \int_{20}^{30} (900x - x^3) dx$$

$$= 10^{-3} \left[450x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{20}^{30} = 10^{-3} \cdot (450 \cdot 30^2 - 30^4/4 - 450 \cdot 20^2 + 20^4/4) = 62,5 \text{ m}^2$$

Το μέσο εμβαδόν του ορθογωνικού οικοπέδου (χωρίου I_2) είναι το $E(XY)$ για $20 \leq x \leq 30$ και $30 \leq y \leq 50$

$$E_2 = \int_{20}^{30} \int_{30}^{50} x \cdot y \cdot 4 \cdot 10^{-3} dy dx = 4 \cdot 10^{-3} \int_{20}^{30} x \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{30}^{50} dx = 2 \cdot 10^{-3} \int_{20}^{30} x \cdot 1600 dx = 10^{-3} 1600 \left[x^2 \right]_{20}^{30} = 800 \text{ m}^2$$

$$E(XY) = E(x) \cdot E(y)$$

iv) Για να είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες θα πρέπει

$$P(X, Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = E_1 + E_2 = 862,5 \text{ m}^2$$

$$E(X) = \int_{20}^{30} \int_{20}^y x \cdot 4 \cdot 10^{-3} dx dy + \int_{20}^{30} \int_{30}^{50} x \cdot 4 \cdot 10^{-3} dx dy = \int_{20}^{30} 2 \cdot 10^{-3} \cdot \left[x^2 \right]_{20}^y dy + \int_{20}^{30} \int_{30}^{50} x \cdot 4 \cdot 10^{-3} dx dy =$$

$$= \int_{20}^{30} 2 \cdot 10^{-3} (y^2 - 400) dy + \int_{20}^{30} 4 \cdot 10^{-3} \cdot x \cdot 20 dx = \int_{20}^{30} (2 \cdot 10^{-3} y^2 - 0,8) dy + \int_{20}^{30} 0,08 x dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot 10^{-3} y^3 - 0,8 y \right]_{20}^{30} + 0,04 \left[x^2 \right]_{20}^{30} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 30^3 - 0,8 \cdot 30 - \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 20^3 + 0,8 \cdot 20 + 0,04 \cdot 30^2 - 0,04 \cdot 20^2 =$$

$$= 24,667 \text{ m}$$

$$E(Y) = \int_{20}^{30} \int_x^{30} y \cdot 4 \cdot 10^{-3} dy dx + \int_{30}^{50} \int_{20}^{30} y \cdot 4 \cdot 10^{-3} dx dy = \int_{20}^{30} 2 \cdot 10^{-3} \left[y^2 \right]_x^{30} dx + \int_{30}^{50} 4 \cdot 10^{-3} (30 - 20) dy =$$

$$= \int_{20}^{30} 2 \cdot 10^{-3} (30^2 - x^2) dx + 4 \cdot 10^{-3} \int_{30}^{50} y dy = \int_{20}^{30} (1,8 - 2 \cdot 10^{-3} x^2) dx + 2 \cdot 10^{-3} \left[y^2 \right]_{30}^{50} = \left[1,8x - \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} x^3 \right]_{20}^{30} + 32 =$$

$$= 1,8 \cdot 30 - \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 30^3 - 1,8 \cdot 20 + \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 20^3 + 32 = 37,333 \text{ m}$$

$$E(XY) \neq E(X) \cdot E(Y)$$

Οπότε οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες