Ύλη Μιγαδικές

1. $\mathbb{C}$ αριθμοί
2. $\mathbb{C}$ συναρτήσεις
3) Αναλυτικές συναρτήσεις - Θ. Cauchy
4. Ολοκληρώματα
5. Ολ. τύποι Cauchy
6. Ακολουθίες, Σειρές Taylor, Laurent
7. Θεωρία Ολοκλ υπολοίπων

Επανάληψη

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

1. $f(z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\,\mathrm{Arctan}\frac{y}{x}$, $z \neq 0$, $-\pi < \mathrm{Arg}z < \pi$
να εξετασει πού είναι παραγωγίσιμη

Λύση

$u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ | $u_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$v = \mathrm{Arctan}\frac{y}{x}$

$x, y \neq 0$ | $v_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $v_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$

Συνθ C-R

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ $f'(z) = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

2. Αν $z \in \mathbb{C}$ να βρεθούν όλα τα w με $\sin w = z$

Λύση

$\sin w = z \Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \Leftrightarrow e^{iw} - e^{-iw} = 2iz \Leftrightarrow a^2 - 1 = 2iza$

$\Leftrightarrow a^2 - (2iz)a - 1 = 0$

$e^{iw} = a$, $\Delta = (2iz)^2 - 4(-1) = -4z^2 + 4 = 4(1-z^2)$

$a = \frac{2iz + \sqrt{\Delta}}{2} = iz + \sqrt{1-z^2}$

$iw = \log a \Rightarrow w = -i\log a$

$= \ln|a| + i\arg a$

$\theta_a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

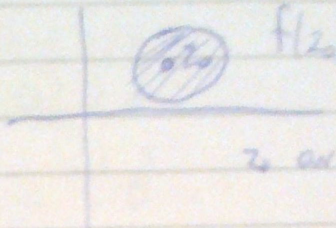
3. $f(z) = x^2 + y^2 + i\,2x^2y^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = 2x^2y^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Πού είναι διαφορίσιμη και αναλυτική;

$u_x = 2x,\ u_y = 2y$

$v_x = 4xy^2$

$v_y = 4yx^2$



$v_y = 4yx^2$ | $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x = \cancel{2}x^2y \\ \cancel{2}y = -\cancel{2}xy^2 \end{cases}$ και $\not\exists$

$\Rightarrow \begin{cases} x(1-2xy) = 0 \\ y(1+2xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{ή} \ 1-2xy = 0 \\ y = 0 \ \text{ή} \ 1+2xy = 0 \end{cases}$

$= \frac{1}{2},\ z \neq 0$

Για $z = 0$, $\exists f'(0)$

Πουθενά διαφορίσιμη, πουθενά αναλυτική

4. Δίνεται $u = \sin x \sinh y$. Να εξετάσετε αν $\exists f(z) = u + iv$ (αναλυτική)

Λύση

$\Delta(\sin x \sinh y) = -\sin x \sinh y + \sin x \sinh y = 0$

$(\sinh y)_y = \cosh y$

$(\cosh y)_y = \sinh y$

| v συζ. αρμ. της u

$\left.\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{matrix}$

$v_x = -u_y = -(\sin x \cosh y)$

$\int v_x\,dx = -\int \sin x \cosh y\,dx + c(y)$

$\Leftrightarrow \quad v(x,y) = \cos x \cosh y + c(y)$

$v_y = \cos x \sinh y + c'(y) = u_x = \cos x \sinh y \Leftrightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c$

$u = \sin x \sinh y$, $v = \cos x \cosh y + c \Rightarrow f(z) = \sin x \sinh y + i(\cos x \cosh y + c)$

Συμπληρώματα – 5ος

5. Να υπολογισθούν τα

$\int_\Gamma \operatorname{Im} z \, dz = ;$ Γ: ευθ. τμ. από 0 έως $1+i$

$\int_\Gamma \sin z \, dz = ;$

Θ. Cauchy – παράγ.

α) $\oint_c f(z)dz = 0$, f αν.

β) $\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

γ) $\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{\nu+1}} dz = \frac{2\pi i}{\nu!} f^{(\nu)}(z_0)$

$z(t) = 0 + (1+i - 0)t$

$= (1+i)t = t + it$

$t \in [0,1]$

$z'(t) = 1+i$

α) Με ορισμό

$\int_\Gamma \operatorname{Im} z \, dz$

$= \int_0^1 y(t) z'(t) dt$

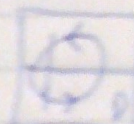
$= \int_0^1 t(1+i) dt = \frac{1}{2}(1+i)$

~~β) Με~~ $\int \sin z \, dz = \int_0^{1+i} \sin z \, dz = (-\cos z)\Big|_0^{1+i} = -\cos(i+1) + \cos 0$

$F(z) = -\cos z$, $F'(z) = \sin z$

$\cos(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}}{2}$

6. $I = \oint_c \frac{(z^2 - z + 2)}{(z-1)^3} dz$, $c: |z-1| = 2$, θ.π.



$f(z) = z^2 - z + 2$ αν. $\nu = 2$

$I = \frac{2\pi i}{2!} f''(1) = 2\pi i$ $f'(z) = 2z - 1$

$f''(z) = 2$

7. $I = \oint \frac{z}{z^2+1} dz$, $c: |z+i| = 1$, θ.π.

$\int \frac{z}{(z-i)(z+i)} dz = \int \frac{\left(\frac{z}{z-i}\right)}{(z+i)} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \frac{-i}{-i-i} = \pi i$

8. $\oint_c \frac{\sin z \, e^z}{z^2} dz$, $c: |z| = 1$ $\nu = 1$, $z = 0$

$I = 2\pi i f'(0) = 2\pi i (\sin z \, e^z)'_{z=0}$

9. Σειρές Laurent

$f(z)$ αν. $\Delta(a, r_1, r_2)$

$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$

9.1 Να αναπτυχθεί κατά Laurent η $f(z) = \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}$

$\Delta_1: 0 < |z-1| < 1$ και

$\Delta_2: 0 < |z-2| < 1$

9.1

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

{ Αξιοποιώ το $\frac{1}{1-w} = 1 + w + \dots + w^{\nu} + \dots,\ |w|<1$

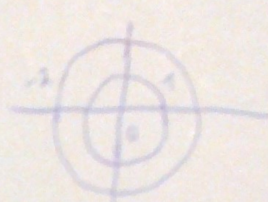
$A = B = 1$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu (z-1)^\nu \qquad f(z) = (z-1)^{-1} + \frac{1}{(z-2)}$$

$$\frac{1}{(z-2)} = \frac{1}{z-1-1} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -1\left(1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots + (z-1)^{\nu} + \dots\right)$$

9.2

Να αναπτυχθεί κατά Laurent με κέντρο το $z_0 = 0$ σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους η $f(z) = \frac{1}{(z+2)(1-z)}$



$1, -2$ ιδιάζοντα σημεία

0 ομαλό σημείο

α) $0 < |z| < 1$

β) $1 < |z| < 2$

γ) $|z| > 2$

α) $f(z) = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{1-z}$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \dots + z^{\nu} + \dots$$

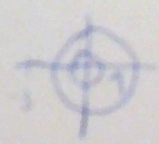
$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-z}{2} + \dots + \frac{(-1)^{\nu}}{2^{\nu}} z^{\nu} + \dots\right)$$

$|z| < 1 \Rightarrow \frac{|z|}{2} < \frac{1}{2} < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z}-1\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{-1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^{\nu}} + \dots\right)$$

10. Με ολ. υπ. νβ το

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)} dz \qquad C: |z| = r$$



α) $r < 1,\ I = 0$

β) $1 < r < 3 \qquad I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z)$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right] = \frac{e^1}{4^2}$$

γ) $r > 3 \qquad I = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-3} f(z)\right)$

$$\operatorname{Res}_{z=-3} f(z) = \lim_{z\to -3} \frac{1}{(2-1)!}\left[(z+3)^2 \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right]' = \left(\frac{e^z}{z-1}\right)'_{z=-3} = \frac{e^z(z-1) - e^z}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=-3}$$

$$= \frac{e^{-3}(-3-1) - e^{-3}}{(-4)^2}$$